ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 3η

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: 7 Ιανουαρίου 2008

Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 1 Φεβρουαρίου 2008.

Πριν από την λύση κάθε άσκησης καλό είναι να μελετούνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις των υποδείξεων και παραπομπών στα συγγράμματα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι Ασκήσεις της **3ης** εργασίας αναφέρονται στα:

Κεφάλαιο 5 (5.3, 5.5.2, 5.5.2α),
του συγγράμματος του ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα» των Γρ. Καμβύσα και Μ. Χατζηνικολάου.

Ενότητες 1 και **2**,
Ενότητα 3 (3.1 και 3.2)
του συγγράμματος του ΕΑΠ «Λογισμός μιας Μεταβλητής» Τόμος Α του Γ. Δάσιου.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα συμβουλευθείτε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στη http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm ως εξής:

Εναλλακτικό **Δ**ιδακτικό **Υ**λικό: και **Σ**υνοδευτικό **Ε**κπαιδευτικό **Υ**λικό

ΕΔΥ Κεφ1 Εισαγωγικές Έννοιες (Μιγαδικοί Αριθμοί, Συναρτήσεις) και ΣΕΥ Σύνολα αριθμών (Μιγαδικοί Αριθμοί),
ΕΔΥ και ΣΕΥ Κεφ10. Διαγωνοποίηση (Συμμετρικοί Πίνακες)
ΕΔΥ και ΣΕΥ Κεφ 11. Τετραγωνικές Μορφές
ΣΕΥ Ακολουθίες και Σειρές

Στόχοι: Κατανόηση α) των ιδιοτήτων και των εφαρμογών των τετραγωνικών μορφών, των συμμετρικών και ερμιτιανών πινάκων, β) των μιγαδικών αριθμών, γ) των εννοιών που συνδέονται με τον ορισμό μιας συνάρτησης, τις ιδιότητες «1-1», «επί», αντιστρεψιμότητας και σύνθεσης συναρτήσεων, δ) της έννοιας της ακολουθίας και τις ιδιότητες του φραγμένου, της σύγκλισης και του ορίου της και ε) της έννοιας της σειράς και της σύγκλισης σειρών.

Άσκηση 1. (15 μονάδες) (Μπορείτε να συμβουλευθείτε το Βιβλίο Γ. Καμβύσα-Μ. Χατζηνικολάου «Γραμμική Άλγεβρα» 5.5.2 και 5.5.2$^{\alpha}$ (παραδείγματα 24, 25) και ΣΕΥ-ΕΔΥ Τετραγωνικές Μορφές).

Στο κλασικό ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων δίνεται η τετραγωνική μορφή :

$$q(x,y)=13x^2+10xy+13y^2.$$

(α) Να βρείτε την αντίστοιχη κανονική μορφή της, q^*. Πώς σχετίζεται το σύστημα συντεταγμένων στο οποίο έχετε εκφράσει τώρα την διαγώνια τετραγωνική μορφή με το αρχικό σύστημα O*xy*;

(β) Περιγράψτε την κωνική τομή που παριστάνει η εξίσωση $q(x,y)=72$.

<u>**Λύση**</u> **:** (α) Η q εκφράζεται μέσω συμμετρικού πίνακα ως εξής :

$$q(x,y)=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\ \text{όπου } A=\begin{pmatrix}13 & 5\\ 5 & 13\end{pmatrix}.$$

Για να βρούμε μία κανονική μορφή της **αρκεί** να διαγωνοποιήσουμε τον πίνακα A. Ξέρουμε ότι ένας διαγωνοποιών πίνακας για τον A μπορεί να κατασκευαστεί από μία ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων του A γι'αυτό βρίσκουμε τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματά του:

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}13-\lambda & 5\\ 5 & 13-\lambda\end{vmatrix}=(13-\lambda)^2-5^2=(13-\lambda-5)(13-\lambda+5)=(8-\lambda)(18-\lambda)$$

με ρίζες $\lambda_1=8$ και $\lambda_2=18$.

Για $\lambda=\lambda_1$, λύνουμε το αντίστοιχο ομογενές σύστημα:

$$(A-\lambda_1 I)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}13-8 & 5\\ 5 & 13-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\boxed{1} & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$$

επομένως ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην λ_1 είναι $\{\ y\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix},\ x\in R\}$ και παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$.

Ομοία, για $\lambda=\lambda_2$, έχουμε:

$$(A-\lambda_2 I)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}13-18 & 5\\ 5 & 13-18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-5 & 5\\ 5 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\boxed{1} & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

επομένως ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην λ_2 είναι $\{y\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\ y\in R\}$ και παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

Καθώς ο Α είναι συμμετρικός ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Οπότε κανονικοποιώντας τα, $v_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$, $v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$, ο πίνακας $\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ που προκύπτει με στήλες τα ιδιοδιανύσματα αυτά είναι **ορθογώνιος** και διαγωνοποιεί τον Α. Για να είναι πίνακας στροφής **αρκεί** επιπλέον να έχει θετική ορίζουσα. Ομως η ορίζουσά του είναι αρνητική ίση προς -1. Βρίσκουμε ένα αντίστοιχο πίνακα στροφής που διαγωνοποιεί τον Α αλλάζοντας το πρόσημο μιάς στήλης του (π.χ. της πρώτης) οπότε προκύπτει ο πίνακας $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ που είναι αντιστρέψιμος και διαγωνοποιεί τον Α καθώς οι στήλες του αποτελούν μία βάση ιδιοδιανυσμάτων του Α. Ο P είναι ορθογώνιος και είναι πίνακας στροφής, ως **ορθογώνιος** με **ορίζουσα +1** :

$$P^{-1}AP = P^T AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} \text{ με } P = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & \sin(\pi/4) \\ -\sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}.$$

Με την αλλαγή μεταβλητών $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} u+v \\ v-u \end{pmatrix}$ δηλ. $x = \frac{u+v}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{v-u}{\sqrt{2}}$ (ισοδύναμα, $u = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$, $v = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$),
η q μετατρέπεται σε κανονική μορφή:

$$q(x,y) = 13x^2 + 10xy + 13y^2 = 8u^2 + 18v^2 = q^*(u,v).$$

Από τις εξισώσεις αλλαγής μεταβλητών και την μορφή του πίνακα στροφής P, βλέπουμε ότι η αρχή των αξόνων του (x,y) συστήματος είναι και αρχή των αξόνων του (u,v) και οι νέοι άξονες είναι στραμμένοι ως προς τους παλιούς κατά 45^o αριστερόστροφα (δηλ. με την φορά των δεικτών του ωρολογίου).

(β) Η εξίσωση $q(x,y)$=72 ισοδυναμεί με την εξίσωση $q^*(u,v)$=72, η οποία με την αλλαγή μεταβλητών έρχεται στην μορφή

$$q^*(u,v) = 72 \Leftrightarrow 8u^2 + 18v^2 = 72 \Leftrightarrow \frac{u^2}{9} + \frac{v^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{u^2}{3^2} + \frac{v^2}{2^2} = 1.$$

Δηλαδή η εξίσωση παριστάνει έλλειψη με ημιάξονες 3 (στον Ou) και 2 (στον Ov).

Άσκηση 2. (15 μονάδες) (Μπορείτε να συμβουλευθείτε το Βιβλίο Γ. Καμβύσα-Μ. Χατζηνικολάου «Γραμμική Άλγεβρα» 5.3 και ΣΕΥ-ΕΔΥ Διαγωνοποίηση).

Για τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ να βρεθούν διαγώνιος πίνακας *Δ* και ορθογώνιος πίνακας *P* έτσι ώστε $P^{-1}AP = \Delta$.

<u>Λύση</u> : Παρατηρούμε ότι ο A είναι συμμετρικός. Το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι :

$$\det(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-\lambda & 0 & 7-\lambda \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (7-\lambda)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (7-\lambda)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6-\lambda & 4 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (7-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & 4 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(\lambda^2-5\lambda-14) = -(\lambda-7)^2(\lambda+2).$$

(άλλος τρόπος εύρεσης των ιδιοτιμών είναι να υπολογίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο με άμεσο ανάπτυγμα της ορίζουσας και να βρούμε με τη βοήθεια των διαιρετών του σταθερού όρου τις ρίζες του).

Για τον ιδιόχωρο της ιδιοτιμής λ=7 έχουμε:

$$(A-7I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-7 & -2 & 4 \\ -2 & 6-7 & 2 \\ 4 & 2 & 3-7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow 2x + y - 2z = 0.$

Οι λύσεις είναι της μορφής

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y/2+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} z.$$

Καθώς τα διανύσματα $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $u_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ο ιδιοχώρος της λ=7 θα έχει βάση αυτά τα διανύσματα.

Για τον ιδιόχωρο της ιδιοτιμής λ=-2 έχουμε:

$$(A+2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3+2 & -2 & 4 \\ -2 & 6+2 & 2 \\ 4 & 2 & 3+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{\gamma_2 \leftarrow \gamma_2 + 2\gamma_1}{\overset{\gamma_1 \leftarrow \gamma_1 - \gamma_3}{\Leftrightarrow}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\gamma_3 \leftarrow \gamma_3 - 4\gamma_1}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x-4y-z=0 \\ 2y+z=0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=-z \\ y=-z/2 \end{matrix}, \text{ άρα}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} z,\ z \in R.$$

Συνεπώς, ο ιδιόχωρος παράγεται από το $u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα u_1 και u_2 δεν είναι ορθογώνια. Εφαρμόζουμε την διαδικασία Gram-Schmidt :

$v_1 = u_1$,

$$v_2 = u_2 - \frac{u_2 \bullet v_1}{v_1 \bullet v_1} v_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

Κανονικοποιούμε τα v_1, v_2, u_3 και παίρνουμε μια ορθοκανονική βάση που αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα :

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{18} \\ 4/\sqrt{18} \\ 1/\sqrt{18} \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας $P = \left(w_1 \,|\, w_2 \,|\, w_3\right) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} & -2/3 \\ 0 & 4/\sqrt{18} & -1/3 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/3 \end{pmatrix}$ διαγωνοποιεί τον A και ο αντίστοιχος διαγώνιος πίνακας είναι ο $P^{-1}AP = P^T AP = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 3. (10 μονάδες) (Βλέπε ΕΔΥ, Κεφ. 1-Εισαγωγικές έννοιες και βιβλίο Γ.Δάσιου, Λογισμός μιας Μεταβλητής Ενότητα 1)

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = 1 + i$.

(α) Να βρεθεί το μέτρο, το όρισμα και ο αντίστροφος του z.

(β) Να δοθεί η τριγωνομετρική μορφή του z και να υπολογισθεί η δύναμη z^{2008} (Υπόδειξη: βλ. Εφαρμογή 1.4.14 στις Εισαγωγικές Έννοιες της ΘΕ).

(γ) Να λυθεί η εξίσωση $w^3 = 1 + i$

Λύση

α) Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z είναι: $\rho = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Το πρωτεύον όρισμα θ του z ορίζεται από τις σχέσεις:

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad \sin\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{με } 0 \le \theta < 2\pi. \text{ Οπότε } \theta = \frac{\pi}{4}$$

Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z είναι: $\rho = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Το πρωτεύον όρισμα θ του z ορίζεται από τις σχέσεις:

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad \sin\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{με } 0 \le \theta \le 2\pi. \text{ Οπότε } \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Ο αντίστροφος του z δίνεται από τη σχέση

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1-i}{|z|^2} = \frac{1-i}{\rho^2} = \frac{1-i}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

β) Η τριγωνομετρική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού είναι $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

οπότε η τριγωνομετρική μορφή του δοθέντα μιγαδικού αριθμού z είναι $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Σύμφωνα με το θεώρημα De Moivre (βλέπε Θεώρημα 1.4.15 στις Εισαγωγικές Έννοιες της ΘΕ) η δύναμη του μιγαδικού αριθμού z είναι:

$$z^{2008} = \rho^{2008}\left(\cos(2008\theta) + i\sin(2008\theta)\right) =$$
$$= 2^{1004}\left(\cos\left(2007\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(2007\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\sqrt{2}\right)^{2008}\left(\cos(502\pi) + i\sin(502\pi)\right) = 2^{1004}$$

γ) Οι ρίζες της εξίσωσης $w^{\nu} = 1 + i$ είναι οι νιοστές ρίζες του μιγαδικού αριθμού $\alpha = 1 + i$, οι οποίες είναι ν διαφορετικοί μιγαδικοί αριθμοί και δίνονται από τον τύπο:

$$z_k = \sqrt[\nu]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi + \theta}{\nu} + i\sin\frac{2k\pi + \theta}{\nu}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1$$

Αφού $\rho = \sqrt{2}$ και $\theta = \frac{\pi}{4}$ το πρωτεύον όρισμα , έχουμε:

$$z_k = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}}{3} + i\sin\frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}}{3}\right), \quad \kappa = 0,1,2$$

Οπότε για $\kappa = 0,1,2$ παίρνουμε διαδοχικά:

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right), \; z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \text{ και } z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$$

Άσκηση 4. (12 μονάδες) (Βλέπε βιβλίο Γ.Δάσιου, Λογισμός μιας Μεταβλητής, σελ. 13-17)

(α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων που δίδονται από τους παρακάτω τύπους:

1) $y=\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1+x}}$, 2) $y=\sqrt{\dfrac{\frac{x-1}{x-2}}{\frac{x-3}{x-4}}}$.

(Βλέπε ΕΔΥ, Κεφ. 1-Εισαγωγικές έννοιες , Σ.Ε.Υ. , ΛΟΓΙΣΜΟΣ-Συναρτήσεις σελ. 2.-9, κεφ. 4.1.1-4.1.6)

(β) Είναι οι παρακάτω συναρτήσεις 1-1; Είναι επί; Να δοθεί η αντίστροφη συνάρτηση κάθε μιάς αν υπάρχει.(Βλέπε Σ.Ε.Υ. , ΛΟΓΙΣΜΟΣ-Συναρτήσεις σελ. 22 κεφ. 4.4)

1) $f:R\to R:x\mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$

2) $g:R\to R:x\mapsto \sqrt[3]{x-1}$

3) $h:R-\{2\}\to R:x\mapsto \dfrac{x-1}{x-2}$

(γ) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $g(x)=x^3-1$. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού τους. Να υπολογισθούν οι συνθέσεις $(f\circ g)(x)$ και $(g\circ f)(x)$.

(Βλέπε Σ.Ε.Υ. , ΛΟΓΙΣΜΟΣ-Συναρτήσεις σελ. 20 κεφ. 4.3)

ΛΥΣΗ

(α1) Για να έχει έννοια ο τύπος θα πρέπει να ισχύουν οι συνθήκες:
$1-x\ge 0$, $1+x\ge 0$, $1-\sqrt{1+x}\ne 0$. Οι δύο πρώτες συνθήκες είναι ισοδύναμες με $1\ge x\ge -1$. Για να βρούμε τα x για τα οποία ικανοποιείται η Τρίτη συνθήκη λύνουμε την εξίσωση $1-\sqrt{1+x}=0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x}=1 \Leftrightarrow 1+x=1^2$ αφού πάντοτε $1\ge 0$. Η τελευταία ισοδυναμεί με $x=0$. Την τιμή $x=0$ πρέπει να την εξαιρέσουμε από το πεδίο ορισμού. Η συνάρτηση ορίζεται για όλα τα $x:-1\le x<0$ ή $0<x\le 1$ και συνεπώς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο $[-1,0)\cup(0,1]$.

(α2) Πρέπει $\dfrac{\frac{x-1}{x-2}}{\frac{x-3}{x-4}}\ge 0$, $\dfrac{x-3}{x-4}\ne 0$, $x-2\ne 0$, $x-4\ne 0$. Αυτό ισοδυναμεί με

$(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)\ge 0$ και $x\notin\{2,3,4\}$. Άρα θα έχουμε ή $4<x$ ή $2<x<3$ ή $x\le 1$ και συνεπώς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο $(-\infty,1]\cup(2,3)\cup(4,+\infty)$.

(β1) Έχουμε $f(1)=\dfrac{1}{1+1^2}=\dfrac{1}{1+(-1)^2}=f(-1)$, άρα η f δεν είναι 1-1. Επίσης $x^2+1>0$ για όλα τα $x\in\mathbb{R}$, άρα δεν είναι επί. Προφανώς δεν αντιστρέφεται.

(β2) Έστω $g(x_1)=g(x_2)$. Τότε $\sqrt[3]{x_1-1}=\sqrt[3]{x_2-1}\Rightarrow(\sqrt[3]{x_1-1})^3=(\sqrt[3]{x_2-1})^3\Rightarrow x_1=x_2$. Άρα είναι 1-1. Επίσης για $c\in \boldsymbol{R}$ η εξίσωση $g(x)=c$ έχει πάντα λύση $g(x)=c\Leftrightarrow\sqrt[3]{x-1}=c\Leftrightarrow x=c^3+1$. Η συνάρτηση είναι αντιστρεπτή, η αντίστροφή της είναι $x=f^{-1}(y)=y^3+1$.

(β3) Για $x\ne 2$ έχουμε $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{x-2+1}{x-2}=1+\dfrac{1}{x-2}$.

Άρα $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 1+\frac{1}{x_1-2}=1+\frac{1}{x_2-2}\Rightarrow \frac{1}{x_1-2}=\frac{1}{x_2-2}\Rightarrow x_1=x_2$. Άρα είναι 1-1.

Εξετάζουμε για το αν είναι επί. Η εξίσωση $f(x)=c$ γίνεται $1+\frac{1}{x-2}=c$, δηλαδή $\frac{1}{x-2}=c-1$. Για $c\neq 1$ έχουμε $x-2=\frac{1}{c-1}\Leftrightarrow x=2+\frac{1}{c-1}=\frac{2\cdot c-1}{c-1}$. Για $c=1$ η εξίσωση δεν έχει λύση αφού παίρνει την μορφή $\frac{1}{x-2}=0$. Άρα η συνάρτηση δεν είναι επί. Αντιστροφή μπορούμε να έχουμε μόνο αν περιορίσουμε το $\boldsymbol{y}$ στο $R-\{1\}$. Τότε $f^{-1}(y)=\frac{2\cdot y-1}{y-1}$.

(γ) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $R-\{-1\}$. Το πεδίο ορισμού της g είναι όλο το $\boldsymbol{R}$.

Η σύνθεση $(f\circ g)$ ορίζεται για όλους τους πραγματικούς x ετσι ώστε $x^3-1\neq -1$ δηλαδή $x^3\neq 0$ δηλαδή $x\neq 0$, οπότε έχουμε: $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^3-1)=\frac{1}{(x^3-1)+1}=\frac{1}{x^3}$.

Η σύνθεση $(g\circ f)$ ορίζεται για όλα τα χ και έχουμε:

$$(g\circ f)(x)=(g(f(x))=g\left(\frac{1}{x+1}\right)=\left(\frac{1}{x+1}\right)^3-1=\frac{1-(x+1)^3}{(x+1)^3}=-\frac{x^3+3\cdot x^2+3\cdot x}{(x+1)^3}.$$

Άσκηση 5. (16 μονάδες)

(α) Θεωρούμε την ακολουθία $x_0, x_1, \ldots,$ πραγματικών αριθμών που ορίζεται από

$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_n = 4x_{n-1} - 3x_{n-2}$ για $n \ge 2$. Να υπολογιστεί το όριο της ακολουθίας $\dfrac{x_n}{x_{n+1}}$.

(Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι η σχέση $x_n = 4x_{n-1} - 3x_{n-2}$ είναι ισοδύναμη με τη $\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix}$, οπότε έχουμε $\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = AA\begin{pmatrix} x_{n-2} \\ x_{n-3} \end{pmatrix} = \ldots = A^{n-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$. Αφού διαγωνοποιήσετε τον Α υπολογίστε τον A^{n-1} και στην συνέχεια τον γενικό όρο x_n).

(β) Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία με γενικό τύπο $a_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ είναι φραγμένη. Είναι η ακολουθία αυτή μονότονη; Υπάρχει το όριό της και αν ναι να βρεθεί.

(γ) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία α_ν με $\alpha_\nu = \sqrt{\nu+3} - \sqrt[4]{\nu^2+1}$ φράσσεται από μηδενική ακολουθία. Τί συμπεραίνετε για το όριό της

Λύση

(α) Η σχέση $x_n = 4x_{n-1} - 3x_{n-2}$ και η προφανής $x_{n-1} = 1\,x_{n-1} + 0\,x_{n-2}$ γράφονται σε μορφή πινάκων ως εξής: $\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix}$. Δηλαδή $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-\lambda) + 3 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3).$$

Οι ιδιοτιμές του Α είναι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$.

Για $\lambda=\lambda_1$, λύνουμε το αντίστοιχο ομογενές σύστημα:

$$(A - \lambda_1 I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4-1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y,$$

επομένως ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην λ_1 είναι $\{\, x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ x \in R \,\}$ και παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ομοίως, όταν $\lambda=\lambda_2$, έχουμε

$$(A - \lambda_2 I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4-3 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 3y,$$

επομένως ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην λ_2 είναι $\{\, y\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ y \in R \,\}$ και παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Με τους πίνακες $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ έχουμε την διαγωνιοποίηση του Α ως εξής: $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}$, οπότε

$$A^{n-1}=P\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}^{n-1}P^{-1}=P\begin{pmatrix}1^{n-1}&0\\0&3^{n-1}\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&3\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^{n-1}&0\\0&3^{n-1}\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&3\\1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1+3^n&3-3^n\\-1+3^{n-1}&3-3^{n-1}\end{pmatrix}$$

άρα $\begin{pmatrix}x_n\\x_{n-1}\end{pmatrix}=A^{n-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1+3^n&3-3^n\\-1+3^{n-1}&3-3^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1+3^n\\-1+3^{n-1}\end{pmatrix}$ και τελικά $x_n=\frac{3^n-1}{2}$.

Για το όριο $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}}$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{3^{n+1}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^{n+1}}\frac{1-3^{-n}}{1-3^{-n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\frac{1-3^{-n}}{1-3^{-n-1}}=3\lim_{n\to\infty}\frac{1-3^{-n}}{1-3^{-n+1}}=$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1-\lim\limits_{n\to\infty}3^{-n}}{1-\lim\limits_{n\to\infty}3^{-n-1}}\right)=\frac{1}{3}\frac{1-0}{1-0}=\frac{1}{3}$$

(β) Παρατηρούμε ότι ο a_n είναι το άθροισμα των n πρώτων όρων γεωμετρικής προοόδου με πρώτο όρο 1 και λόγο $\lambda=-\frac{1}{2}$. Άρα:

$$a_n=1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+....+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

Επομένως $|a_n|=\frac{2}{3}\left|1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right|\le\frac{2}{3}\left[1+\left|-\frac{1}{2}\right|^n\right]=\frac{2}{3}\left[1+\frac{1}{2^n}\right]<\frac{2}{3}(1+1)=\frac{4}{3}$ δηλαδή η ακολουθία είναι φραγμένη. Η ακολουθία δεν είναι μονότονη καθώς $a_{n+1}-a_n=(-1/2)^n$ δεν διατηρεί πρόσημο. Για το όριο έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]=\frac{2}{3}\left[1-\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]=\frac{2}{3}[1-0]=\frac{2}{3}$$

(γ) Θα φράξουμε την ακολουθία a_ν από μια μηδενική ακολουθία, οπότε σύμφωνα με γνωστή ιδιότητα η αρχική μας ακολουθία θα είναι μηδενική.

Επειδή ν είναι φυσικός αριθμός έχουμε την παρακάτω ισοδυναμία ανισοτήτων καθώς η ύψωση στο τετράγωνο είναι γνησίως αύξουσα συνάρτησηση

$$\sqrt{\nu+3}>\sqrt[4]{\nu^2+1}\Leftrightarrow\left(\sqrt{\nu+3}\right)^2>\left(\sqrt[4]{\nu^2+1}\right)^2\Leftrightarrow\nu+3>\sqrt[2]{\nu^2+1}\Leftrightarrow(\nu+3)^2>\left(\sqrt{\nu^2+1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow(\nu+3)^2>\left(\sqrt{\nu^2+1}\right)^2\Leftrightarrow(\nu+3)^2>\nu^2+1\Leftrightarrow\nu^2+6\nu+9>\nu^2+1\Leftrightarrow6\nu+8>0\Leftrightarrow\nu>-\frac{4}{3}$$

Καθώς η τελευταία ανισότητα ισχύει έχουμε ότι και $\sqrt{\nu+3}>\sqrt[4]{\nu^2+1}$ οπότε

$\left|\sqrt{\nu+3}-\sqrt[4]{\nu^2+1}\right|=\sqrt{\nu+3}-\sqrt[4]{\nu^2+1}$.

άρα $|a_\nu| = \sqrt{\nu+3} - \sqrt[4]{\nu^2+1} = \dfrac{\left(\sqrt{\nu+3} - \sqrt[4]{\nu^2+1}\right)\left(\sqrt{\nu+3} + \sqrt[4]{\nu^2+1}\right)}{\sqrt{\nu+3} + \sqrt[4]{\nu^2+1}} = \dfrac{\nu+3-\sqrt{\nu^2+1}}{\sqrt{\nu+3} + \sqrt[4]{\nu^2+1}}$

$$< \frac{\nu+3-\sqrt{\nu^2}}{\sqrt{\nu+3} + \sqrt[4]{\nu^2+1}} = \frac{\nu+3-\nu}{\sqrt{\nu+3} + \sqrt[4]{\nu^2+1}} = \frac{3}{\sqrt{\nu+3} + \sqrt[4]{\nu^2+1}} < \frac{3}{\sqrt{\nu} + \sqrt[4]{\nu^2}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{\nu}+\sqrt{\nu}} = \frac{3}{2\sqrt{\nu}} = |\beta_\nu|.$$

.

Επειδή $\lim \beta_\nu = \lim \dfrac{3}{2\sqrt{\nu}} = \lim\left(\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{\sqrt{\nu}}\right) = \lim \dfrac{3}{2} \lim \dfrac{1}{\sqrt{\nu}} = \dfrac{3}{2}\cdot 0 = 0$ έπεται ότι και η ακολουθία a_ν είναι μηδενική.

Άσκηση 6. (16 μονάδες) Να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια

i) $\lim[\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})]$, ii) $\alpha_\nu = \left(\frac{\nu+2}{\nu}\right)^\nu$, iii) $\alpha_\nu = \frac{\nu^\nu}{\nu! 5^\nu}$

iv) $\alpha_\nu = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+ \dots + \frac{1}{\nu\cdot(\nu+1)}$

(<u>Υπόδειξη</u>: Χρησιμοποιείστε την ταυτότητα $\frac{1}{x\cdot(x+1)} = \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$)

Λύση

i) $\lim[\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})] = \lim(\sqrt{n^2+n}-n) = \lim\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}-n} =$

$$= \lim\frac{\left(\sqrt{n^2+n}\right)^2-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim\frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} =$$

$$= \lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\lim\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$$

ii) Έχουμε

$$\alpha_\nu = \left(\frac{\nu+2}{\nu}\right)^\nu = \left(\frac{\nu+2}{\nu+1}\frac{\nu+1}{\nu}\right)^\nu = \left(\frac{\nu+2}{\nu+1}\right)^\nu\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^\nu = \left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^\nu\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu =$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1}}{1+\frac{1}{\nu+1}}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu \to \frac{e}{1+0}e = e^2$$

iii) Εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου έχουμε:

$$\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| = \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{\frac{(\nu+1)^{(\nu+1)}}{(\nu+1)!\,5^{\nu+1}}}{\frac{\nu^\nu}{\nu!\,5^\nu}} = \frac{(\nu+1)^{(\nu+1)}\nu!\,5^\nu}{(\nu+1)!\,5^{\nu+1}\nu^\nu} = \frac{(\nu+1)^{(\nu+1)}\nu!\,5^\nu}{\nu!(\nu+1)\,5^\nu 5\,\nu^\nu} =$$

$$= \frac{(\nu+1)^\nu}{5\nu^\nu} = \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^\nu\frac{1}{5} = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu\frac{1}{5} \to e\,\frac{1}{5} = \frac{e}{5}$$

με $0 < \frac{e}{5} < 1$. Συνεπώς $\lim\alpha_\nu = 0$.

iv) Σύμφωνα με την ταυτότητα που μας δίνεται οι όροι της ακολουθίας a_κ α_ν για κ=1,2,3,…,ν γράφονται ως εξής:

$$\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

……

$$\frac{1}{\nu\cdot(\nu+1)} = \frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ ...+\ \frac{1}{\nu\cdot(\nu+1)}\ =1-\frac{1}{\nu+1}=\frac{\nu+1-1}{\nu+1}=\frac{\nu}{\nu+1}$$

Συνεπώς $\alpha_\nu=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ ...+\ \frac{1}{\nu\cdot(\nu+1)}=\frac{\nu}{\nu+1}$

$$lim\alpha_\nu=lim\frac{\nu}{\nu+1}=\lim\frac{1}{1+\frac{1}{\nu}}=\frac{lim1}{lim1+\lim\frac{1}{\nu}}=\frac{1}{1+0}=1$$

Άσκηση 7. (16 μονάδες)

Να εξετάσετε ως προς την σύγκλιση τις σειρές:

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$, **ii)** $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, **iii)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\cdot n)!}{(n!)^2}$, **iv)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$.

(Βλ. 1°) βιβλίο Γ.Δάσιου, Λογισμός μιας Μεταβλητής, σελ. 24, 28, 37, 38, 39, 40
2°) Σ.Ε.Υ. – ΛΟΓΙΣΜΟΣ – Ακολουθίες – παραγρ. 2.5.4 (ii)-σελ 27 και παραγρ. 2.9 –σελ 42, και Σ.Ε.Υ. – ΛΟΓΙΣΜΟΣ – Σειρές – παραγρ. 3.3, 3.4)

Λύση :

i) Ολοι οι όροι, εκτός από τον πρώτο είναι θετικοί.Εφαρμόζουμε το κριτήριο της ρίζας.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)=1-1=0<1$$

Άρα η σειρά συγκλίνει.

ii) Όλοι οι όροι είναι θετικοί. Εφαρμόζουμε το κριτήριο της ρίζας.

$$.\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}3\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}3\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{e}>1$$

Άρα η σειρά δεν συγκλίνει.

iii)Όλοι οι όροι είναι θετικοί. Εφαρμόζουμε το κριτήριο του λόγου.

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\frac{\dfrac{(2\cdot(n+1))!}{((n+1)!)^2}}{\dfrac{(2\cdot n)!}{(n!)^2}}=\frac{(2\cdot n+2)!\cdot(n!)^2}{((n+1)!)^2\cdot(2\cdot n)!}=\frac{(2\cdot n+2)!\cdot n!\cdot n!}{(n+1)!\cdot(n+1)!\cdot(2\cdot n)!}=\frac{(2\cdot n+2)!}{(2\cdot n)!}\cdot\frac{n!\cdot n!}{(n+1)!\cdot(n+1)!}$$

$$=\frac{(2\cdot n+1)\cdot(2\cdot n+2)}{(n+1)\cdot(n+1)}=\frac{4\cdot n^2+6\cdot n+2}{n^2+2\cdot n+1}$$. Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\cdot\left(4\cdot n^2+6\cdot n+2\right)}{\frac{1}{n^2}\cdot\left(n^2+2\cdot n+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)=\frac{4+0+0}{1+0+0}=4>1.$$

Άρα η σειρά αποκλίνει.

iv) Ολοι οι όροι είναι θετικοί. Εφαρμόζουμε το κριτήριο του λόγου.

(Βλέπε βιβλίο Γ.Δάσιου, Λογισμός μιας Μεταβλητής, σελ. 37, βλέπε παράδειγμα σελ. 38)
(Βλέπε επίσης Σ.Ε.Υ. – ΛΟΓΙΣΜΟΣ – Σειρές – παραγρ. 3.4-σελ 22)

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\frac{\dfrac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{5^n}{n!}}=\frac{5^{n+1}}{5^n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{5}{n+1}$$. Υπολογίζουμε το όριο: $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1}=0<1$.

Άρα η σειρά συγκλίνει.