ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 4η

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: 5 Φεβρουαρίου 2008

Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 14 Μαρτίου 2008.

Πριν από την λύση κάθε άσκησης καλό είναι να μελετώνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις των υποδείξεων και παραπομπών στα συγγράμματα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της τέταρτης εργασίας αναφέρονται στα:

Ενότητα 4 (Όριο και Συνέχεια Συνάρτησης),
Ενότητα 5 (Παράγωγος)
Ενότητα 6 (Βασικά Θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού)
Ενότητα 7 (Ακρότατα)
του συγγράμματος του ΕΑΠ «**Λογισμός Μιας Μεταβλητής**» του Γ. Δάσιου
και Πιθανότητες.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα συμβουλευθείτε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στη http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm ως εξής:

Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό :

Λογισμός : Όρια και Συνέχεια, Παράγωγοι, Θεωρήματα Διαφορικού Λογισμού,

Πιθανότητες : Πιθανότητες1

1. (**20 μονάδες**)

i) Για κάθε ένα από τους παρακάτω τύπους, προσδιορίστε για ποιες τιμές της μεταβλητής x η αντίστοιχη συνάρτηση παραγωγίζεται και υπολογίστε την παράγωγο:

α) $f(x)=x^a\ln(\ln x)$, $a>0$.

β) $f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x-1}\right)^2$

γ) $f(x)=4x\sqrt{x-\sqrt{x}}$

ii) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+a)$, $x>a$. Υπολογίστε την παράγωγο τάξης n για κάθε φυσικό n .

iii) Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί a, b ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} ax\,, & x<2 \\ ax^2-bx+3\,, & x\geq 2\end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Λύση

i)

α) Η συνάρτηση ορίζεται αν και μόνο αν $x>0$ και $\ln x>0$. Η δεύτερη σχέση ισοδυναμεί με $x>1$ και συνεπάγεται την πρώτη, άρα το πεδίο ορισμού $D_f=(1,+\infty)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο D_f ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων (x^a και $\ln(\ln x)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων).

Εχουμε $(x^a\ln(\ln x))'=(x^a)'\ln(\ln x)+x^a(\ln(\ln x))'$ (κανόνας γινομένου).

$$(x^a)'=ax^{a-1} \text{ και } (\ln(\ln x))'=\frac{1}{\ln x}(\ln x)'=\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x} \text{(κανόνας αλυσίδας).}$$

Οπότε $(x^a\ln(\ln x))'=ax^{a-1}\ln(\ln x)+x^a\dfrac{1}{\ln x}\dfrac{1}{x}=ax^{a-1}\ln(\ln x)+x^{a-1}\dfrac{1}{\ln x}=x^{a-1}(a\ln(\ln x)+\dfrac{1}{\ln x})$

β) Η συνάρτηση ορίζεται αν και μόνο αν $\cos x-1\neq 0$, δηλαδή $x\neq 2\kappa\pi$, κ ακέραιος και παραγωγίζεται στο πεδίο ορισμού της. Με διαδοχική εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας και κανόνα πηλίκου έχουμε

$$f'(x)=2\frac{\sin x}{\cos x-1}\left(\frac{\sin x}{\cos x-1}\right)'=2\frac{\sin x}{\cos x-1}\frac{\cos x(\cos x-1)-\sin x(-\sin x)}{(\cos x-1)^2}=$$

$$=2\sin x\frac{(\cos x)^2-\cos x+(\sin x)^2}{(\cos x-1)^3}=2\sin x\frac{1-\cos x}{(\cos x-1)^3}=\frac{-2\sin x}{(\cos x-1)^2}$$

γ)

$f(x)=4x(x-x^{1/2})^{1/2}$. Για να ορίζεται η συνάρτηση πρέπει και αρκεί $\left.\begin{matrix} x\geq 0 \\ x-\sqrt{x}\geq 0\end{matrix}\right\}$ που

ισοδυναμεί με $\left.\begin{matrix} x\geq 0 \\ x\geq\sqrt{x}\end{matrix}\right\}$ δηλαδή $\left.\begin{matrix} x\geq 0 \\ x^2\geq x\end{matrix}\right\}$ και τελικά $x\geq 1$.

$f(x)=4x(x-x^{1/2})^{1/2}=4x\sqrt{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$. Για $x>1$, με εφαρμογή κανόνα γινομένου και αλυσίδας έχουμε:

$$f'(x) = 4(x - x^{1/2})^{1/2} + 4x\frac{1}{2}(x - x^{1/2})^{-1/2}(x - x^{1/2})'$$

$$= 4(x - x^{1/2})^{1/2} + 4\frac{x}{2}(x - x^{1/2})^{-1/2}(1 - \frac{1}{2}x^{-1/2}) = = (x - x^{1/2})^{-1/2}\left(4(x - x^{1/2}) + 2x(1 - \frac{1}{2}x^{-1/2})\right)$$

$$= \frac{6x - 5\sqrt{x}}{\sqrt{x - \sqrt{x}}}.$$

(ii)Υπολογίζουμε τις παραγώγους της συνάρτησης $f(x) = \ln(x + a)$:

$$f'(x) = \frac{1}{x+a},\ f''(x) = \frac{-1}{(x+a)^2},\ f^{(3)}(x) = \frac{2}{(x+a)^3},\ f^{(4)}(x) = \frac{-2\cdot 3}{(x+a)^4},\ f^{(5)}(x) = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(x+a)^5}, \dots$$

Όλες οι προηγούμενες καλύπτονται από τον γενικό τύπο: $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(x+a)^n}$, n=1,2,3,… .

Αποδεικνύουμε ότι αυτός ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό n, χρησιμοποιώντας την μέθοδο της επαγωγής:

Για n=1 ισχύει, αφού ήδη ελέγξαμε ότι $f'(x) = \frac{1}{x+a} = \frac{(-1)^0\cdot 0!}{(x+a)^1}$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για n=κ: $f^{(\kappa)}(x) = \frac{(-1)^{\kappa-1}\cdot(\kappa-1)!}{(x+a)^\kappa}$ και ελέγχουμε ότι ισχύει για n=κ+1, δηλ. θα

αποδείξουμε ότι $f^{(\kappa+1)}(x) = \frac{(-1)^{\kappa}\cdot\kappa!}{(x+a)^{\kappa+1}}$. Πράγματι,

$$f^{(\kappa+1)}(x) = \left(f^{(\kappa)}(x)\right)' = \left(\frac{(-1)^{\kappa-1}\cdot(\kappa-1)!}{(x+a)^\kappa}\right)' = (-1)^{\kappa-1}\cdot(\kappa-1)!\cdot((x+a)^{-\kappa})'$$

$$= (-1)^{\kappa-1}\cdot(\kappa-1)!\cdot(-\kappa)\cdot(x+a)^{-\kappa-1} = \frac{(-1)^{\kappa}\cdot\kappa!}{(x+a)^{\kappa+1}}$$

Έτσι η επαγωγική απόδειξη έχει ολοκληρωθεί και η παράγωγος οποιασδήποτε τάξης της f δίνεται από τη σχέση: $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(x+a)^n},\ n \geq 1.$

iii) Φανερά παντού εκτός από το 2 η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική συνάρτηση σε καθένα από τους δύο κλάδους της. Για να είναι παραγωγίσιμη στο 2 θα πρέπει να είναι και συνεχής οπότε θα πρέπει να ισχύει ότι:

$\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = f(2) = \lim\limits_{x\to 2+} f(x)$, δηλαδή $2a = 4a - 2b + 3$ που γράφεται $2a - 2b + 3 = 0$ (1)

Επίσης ισχύει

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{\alpha x - (4\alpha - 2b + 3)}{x-2} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 2^-}\frac{\alpha x - 2\alpha}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{\alpha(x-2)}{x-2} = \alpha$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2+}\frac{\alpha x^2 - bx + 3 - (4\alpha - 2b + 3)}{x-2} = \lim_{x\to 2+}\frac{\alpha(x^2-4) - b(x-2)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2+}\frac{\alpha(x-2)(x+2) - b(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2+}\left(\alpha(x+2) - b\right) = 4\alpha - b$$

Άρα πρέπει $\lim\limits_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ δηλαδή $\alpha = 4\alpha - b \Leftrightarrow 3\alpha = b$ (2).

Από (1), (2) συμπεραίνουμε ότι $a = \frac{3}{4}, b = \frac{9}{4}$. Οι συνθήκες αυτές είναι και ικανές για την παραγωγισιμότητα της f στο 2.

2. (**20 μονάδες**)

i) Να υπολογιστούν τα όρια (b >0)(υπόδειξη: χρησιμοποιείστε κανόνα L'Hopital):

α) $\lim_{x\to 2}\frac{x-3\sqrt{x+2}+4}{x-\sqrt{x-1}-1}$, **β)** $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{3x-4}}$, **γ)** $\lim_{x\to 0+}(\frac{x}{1-\sigma\upsilon\nu x}-\frac{1}{x})$

δ) $\lim\limits_{x\to e^+}\ln(x-e)\cdot(\ln x-1)$, **ε)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^a}{\ln(\ln x)}$

ii) Να βρεθεί η παράμετρος α έτσι ώστε το όριο $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+2\alpha}-\sqrt{2x+\alpha}}{x^2-5x+6}$ να υπάρχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Στη συνέχεια να το υπολογίσετε.

Λύση

ια)

Παρατηρούμε ότι για $x\to 2$ μηδενίζονται συγχρόνως ο αριθμητής και ο παρονομαστής του κλάσματος άρα η εφαρμογή του κανόνα του πηλίκου για τον υπολογισμό του ορίου οδηγεί σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Α' τρόπος (L'Hopital) **)**

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-3\sqrt{x+2}+4}{x-\sqrt{x-1}-1}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3\sqrt{x+2}+4)'}{(x-\sqrt{x-1}-1)'}=\lim_{x\to 2}\frac{1-\frac{3}{2\sqrt{x+2}}}{1-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}=\frac{1-\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

Β' τρόπος πολλαπλασιάζουμε με τις αντίστοιχες συζυγείς παραστάσεις αριθμητή και παρονομαστή χρησιμοποιώντας στη συνέχεια την ταυτότητα $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x-3\sqrt{x+2}+4}{x-\sqrt{x-1}-1}&=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x+4-3\sqrt{x+2}\right)\left(x+4+3\sqrt{x+2}\right)\left(x-1+\sqrt{x-1}\right)}{\left(x-1-\sqrt{x-1}\right)\left(x-1+\sqrt{x-1}\right)\left(x+4+3\sqrt{x+2}\right)}\\
&=\lim_{x\to 2}\frac{\left((x+4)^2-9(x+2)\right)\left(x-1+\sqrt{x-1}\right)}{\left((x-1)^2-(x-1)\right)\left(x+4+3\sqrt{x+2}\right)}\\
&=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2+8x+16-9x-18\right)\left(x-1+\sqrt{x-1}\right)}{\left(x^2-2x+1-x+1\right)\left(x+4+3\sqrt{x+2}\right)}\\
&=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-x-2\right)\left(x-1+\sqrt{x-1}\right)}{\left(x^2-3x+2\right)\left(x+4+3\sqrt{x+2}\right)}\\
&=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)\left(x-1+\sqrt{x-1}\right)}{(x-2)(x-1)\left(x+4+3\sqrt{x+2}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)\left(x-1+\sqrt{x-1}\right)}{(x-1)\left(x+4+3\sqrt{x+2}\right)}\\
&=\frac{3\left(1+\sqrt{1}\right)}{6+3\sqrt{4}}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

ιβ) Α' τρόπος (L'Hopital) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{3x-4}}=$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x^2-6x+8)'}{\left((2x)^{1/3}-(3x-4)^{1/3}\right)'}=\lim_{x\to 4}\frac{2x-6}{\frac{2}{3}(2x)^{-2/3}-\frac{3}{3}(3x-4)^{-2/3}}=$$

$$=\frac{8-6}{\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{8}^2}-\frac{1}{\sqrt[3]{8}^2}}=\frac{2}{\frac{2}{12}-\frac{1}{4}}=\frac{2}{-\frac{1}{12}}=-24$$

Β’ τρόπος με χρηση της ταυτότητας $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\beta^3$:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{3x-4}}=\lim_{x\to 4}\frac{(x^2-6x+8)\left(\left(\sqrt[3]{2x}\right)^2+\sqrt[3]{2x}\sqrt[3]{3x-4}+\left(\sqrt[3]{3x-4}\right)^2\right)}{\left(\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{3x-4}\right)\left(\left(\sqrt[3]{2x}\right)^2+\sqrt[3]{2x}\sqrt[3]{3x-4}+\left(\sqrt[3]{3x-4}\right)^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x^2-6x+8)\left(\left(\sqrt[3]{2x}\right)^2+\sqrt[3]{2x}\sqrt[3]{3x-4}+\left(\sqrt[3]{3x-4}\right)^2\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{2x}\right)^3-\left(\sqrt[3]{3x-4}\right)^3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x^2-6x+8)\left(\left(\sqrt[3]{2x}\right)^2+\sqrt[3]{2x}\sqrt[3]{3x-4}+\left(\sqrt[3]{3x-4}\right)^2\right)}{(2x-(3x-4))}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x-2)\left(\left(\sqrt[3]{2x}\right)^2+\sqrt[3]{2x}\sqrt[3]{3x-4}+\left(\sqrt[3]{3x-4}\right)^2\right)}{-(x-4)}$$

$$=-\lim_{x\to 4}(x-2)\left(\left(\sqrt[3]{2x}\right)^2+\sqrt[3]{2x}\sqrt[3]{3x-4}+\left(\sqrt[3]{3x-4}\right)^2\right)$$

$$=-2\left(\left(\sqrt[3]{8}\right)^2+\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{8}+\left(\sqrt[3]{8}\right)^2\right)=-2(2^2+2\cdot 2+2^2)=-24$$

iγ)

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{x}{1-\sigma\upsilon\nu x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{x^2-1+\sigma\upsilon\nu x}{x(1-\sigma\upsilon\nu x)}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{\left(x^2-1+\sigma\upsilon\nu x\right)'}{\left(x(1-\sigma\upsilon\nu x)\right)'}=$$

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{2x-\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{(2x-\eta\mu x)'}{(1-\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x)'}=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{2-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}\right)=\frac{1}{0+}=+\infty$$

iδ)

$$\lim_{x\to e^+}\ln(x-e)\cdot(\ln x-1)=\lim_{x\to e^+}\ln(x-e)\cdot(\ln x-\ln e)\overset{-\infty\cdot 0}{=}\lim_{x\to e^+}\ln(x-e)\cdot\left(\ln\frac{x}{e}\right)\overset{-\infty\cdot 0}{=}$$

$$\lim_{x\to e^+}\frac{\ln(x-e)}{\frac{1}{\ln\frac{x}{e}}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to e^+}\frac{(\ln(x-e))'}{\left(\frac{1}{\ln\frac{x}{e}}\right)'}=\lim_{x\to e^+}\frac{\frac{1}{x-e}\cdot(x-e)'}{-\frac{\left(\ln\frac{x}{e}\right)'}{\left(\ln\frac{x}{e}\right)^2}}=\lim_{x\to e^+}\frac{\frac{1}{x-e}}{-\frac{\frac{1}{x}}{\left(\ln\frac{x}{e}\right)^2}}=$$

$$-\lim_{x\to e^+}\frac{x\left(\ln\frac{x}{e}\right)^2}{(x-e)}\overset{\frac{0}{0}}{=}-\lim_{x\to e^+}\frac{\left(x\left(\ln\frac{x}{e}\right)^2\right)'}{(x-e)'}=-\lim_{x\to e^+}\frac{1\cdot\left(\ln\frac{x}{e}\right)^2+x\cdot 2\ln\frac{x}{e}\cdot\frac{1}{\frac{x}{e}}\cdot\left(\frac{x}{e}\right)'}{1}=$$

$$-\lim_{x\to e^+}\left(\left(\ln\frac{x}{e}\right)^2+x\cdot 2\ln\left(\frac{x}{e}\right)\cdot\frac{1}{\frac{x}{e}}\cdot\frac{1}{e}\right)=-\lim_{x\to e^+}\left(\left(\ln\frac{x}{e}\right)^2+2\ln\frac{x}{e}\right)=(\ln 1)^2+2\ln 1=0$$

ε) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^a}{\ln(\ln x)}\overset{\infty/\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{a(\ln x)^{a-1}\frac{1}{x}}{\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a(\ln x)^{a-1}}{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}a(\ln x)^a=+\infty$$

ii) Παρατηρούμε ότι:

$\lim_{x\to 3}\left(\sqrt{x+2\alpha}-\sqrt{2x+\alpha}\right)=\sqrt{3+2\alpha}-\sqrt{6+\alpha}$,

$\lim_{x\to 3}(x^2-5x+6)=0$

Έτσι, αν ο αριθμητής $\sqrt{3+2\alpha}-\sqrt{6+\alpha}$ ήταν διάφορος του μηδενός το τελικό αποτέλεσμα θα ήταν + ή – άπειρο.

Πρέπει, συνεπώς,

$\sqrt{3+2\alpha}-\sqrt{6+\alpha}=0 \Leftrightarrow \sqrt{3+2\alpha}=\sqrt{6+\alpha} \Leftrightarrow 3+2\alpha=6+\alpha \Leftrightarrow \alpha=3$.

Για αυτήν την τιμή του α έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+2\alpha}-\sqrt{2x+\alpha}}{x^2-5x+6} &= \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{2x+3}}{x^2-5x+6}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+6}-\sqrt{2x+3}\right)\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{2x+3}\right)}{(x^2-5x+6)\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{2x+3}\right)}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{(x+6)-(2x+3)}{(x^2-5x+6)\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{2x+3}\right)}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{-(x-3)}{(x-3)(x-2)\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{2x+3}\right)}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{-1}{(x-2)\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{2x+3}\right)}=\frac{-1}{\left(\sqrt{9}+\sqrt{9}\right)}=\frac{-1}{6}\end{aligned}$$

3. (14 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3}{2}x^4 - 2x^3 - 6x^2$, με $x \in (-\infty, \infty)$. Να προσδιορίσετε:

(i) Τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της στα οποία είναι α) αύξουσα, β) φθίνουσα

(ii) Τα ακρότατά της (μέγιστα και ελάχιστα).

(iii) Τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της στα οποία α) στρέφει τα κοίλα άνω, β) στρέφει τα κοίλα κάτω.

(iv) Τα σημεία καμπής.

(v) Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy.

(vi) Συνοψίστε σε ένα πίνακα τα παραπάνω στοιχεία και δώστε μία γραφική παράσταση της συνάρτησης.

<u>Λύση</u>

Παρατηρούμε ότι : $f'(x) = 6x^3 - 6x^2 - 12x = 6x\left(x^2 - x - 2\right) = 6x\left(x+1\right)\left(x-2\right)$ και

$$f''(x) = 18x^2 - 12x - 12 = 6\left(x - \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right).$$

$$f^{(3)}(x) = 36x - 12$$

Με βάση τα παραπάνω έχουμε:

i)

	-1	0	2	
x	-	-	+	+
x+1	-	+	+	+
x-2	-	-	-	+
f΄	-	+	-	+
Μονοτονία	□	□	□	□

Οπότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-1,0\right)$ και $\left(2,+\infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,-1\right)$ και $\left(0,2\right)$.

(ii) Για τα ακρότατα :

Από τον προηγούμενο πίνακα προκύπτει ότι για x = -1, x = 2, έχουμε τοπικά ελάχιστα αφού η συνάρτηση από φθίνουσα γίνεται αύξουσα. Εναλλακτικά μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι τα σημεία αυτά μηδενίζουν την πρώτη παράγωγο της f ενώ η δεύτερη παράγωγος είναι θετική: $f''(-1) = 18 > 0$, $f''(2) = 36 > 0$.

Έτσι τα σημεία (-1,-5/2), $\left(2,-16\right)$ είναι τοπικά ελάχιστα.

Αντίστοιχα στο x=0 η f από αύξουσα γίνεται φθίνουσα ενώ και $f'(0) = 0,\ f''(0) = -12 < 0$. Άρα το σημείο $\left(0,0\right)$ είναι τοπικό μέγιστο.

Η συνάρτηση δεν έχει ολικό μέγιστο αφού μετά το 2 είναι αύξουσα με

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{2}x^4 - 2x^3 - 6x^2\right) = +\infty$$

Έχει όμως ολικό ελάχιστο το σημείο (2,-16), το μικρότερο δηλαδή από τα δύο ελάχιστα, αφού και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}x^4 - 2x^3 - 6x^2\right) = +\infty$. Έτσι η συνάρτηση δεν παίρνει σε κανένα διάστημα μικρότερη τιμή από αυτήν που έχει για x=2.

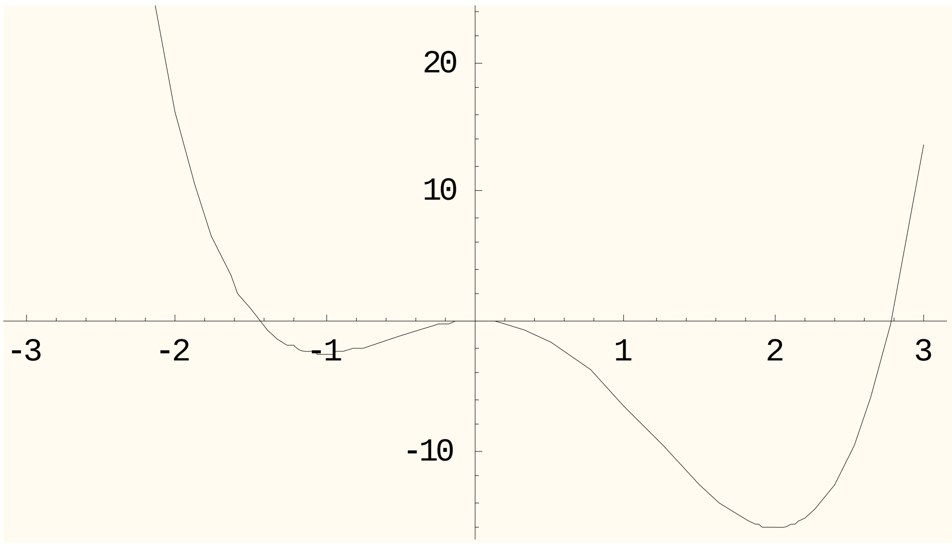
(iii)-(iv)

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f(x) είναι 3 φορές παραγωγίσιμη σε όλο το σύνολο των πραγματικών και $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$. Επιπλέον, στα σημεία αυτά ισχύει ότι $f^{(3)}(x) \neq 0$. Άρα για $x = \frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$ έχουμε σημεία καμπής.

Η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα $\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}, \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)$, όπου

$f'' < 0$, και τα κοίλα προς τα πάνω στα διαστήματα $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right)$ και $\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}, +\infty\right)$, όπου $f'' > 0$.

(v - vi) Η συνάρτηση τέμνει τον άξονα των *x* στα σημεία όπου $f(x) = 0$. Αυτό συμβαίνει στα σημεία $x = 0, \frac{2\pm2\sqrt{10}}{3}$. Από την παραπάνω μελέτη προκύπτει η ακόλουθη μορφή της γραφικής παράστασής της:



4. (**16 μονάδες**)

i) Ένα εργοστάσιο μπορεί να κατασκευάσει *x* εκατοντάδες λάστιχα τύπου Α και *y* εκατοντάδες λάστιχα τύπου Β την ημέρα όπου $0 \le x \le 4$ και $y = \dfrac{40-10x}{5-x}$. Το κέρδος ανά λάστιχο τύπου Α είναι διπλάσιο από το κέρδος ανά λάστιχο τύπου Β. Ποιος είναι ο ιδανικός αριθμός παραγωγής (*x*,*y*) ώστε να μεγιστοποιείται το συνολικό κέρδος;

ii) Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f(x) = 3x - x^3}$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Bolzano, (σελ. 58 του βιβλίου), αποδείξτε ότι η εξίσωση f(x)= - 4 έχει λύση στο διάστημα (2,3). Είναι η λύση αυτή μοναδική; (δικαιολογείστε την απάντησή σας)

Λύση

i)

Εάν το κέρδος ανά λάστιχο τύπου Β είναι p, τότε το κέρδος ανά λάστιχο τύπου Α είναι 2p και η συνάρτηση κέρδους γίνεται:

$$P(x) = 2px + py = 2px + p\frac{40-10x}{5-x} = p\frac{10x - 2x^2 + 40 - 10x}{5-x} = 2p\frac{20-x^2}{5-x}$$

για $0 \le x \le 4$.

Εξετάζουμε την μονοτονία της συνάρτησης κέρδους στο διάστημα [0,4]:

$$\mathrm{P}'(\mathrm{x}) = 2p\frac{-2x(5-x)+(20-x^2)}{(5-x)^2} = 2p\frac{x^2-10x+20}{(5-x)^2} = 2p\frac{\left(x-5+\sqrt{5}\right)\left(x-5-\sqrt{5}\right)}{(5-x)^2}$$

	0		$5-\sqrt{5}$	4
f'		+		$-$
f		□		□

Παρατηρούμε ότι η παράγωγος είναι θετική για $0 < x < 5-\sqrt{5}$, οπότε και η συνάρτηση κόστους είναι γνησίως αύξουσα και αρνητική (οπότε και η συνάρτηση κόστους είναι φθίνουσα) για $5-\sqrt{5} < x < 4$.

Άρα, στο σημείο $x = 5-\sqrt{5}$ έχουμε ολικό μέγιστο με $P(5-\sqrt{5}) = 4p\ (5-\sqrt{5})\ \approx 11.0557p$ και η ζητούμενη λύση είναι x=2,76 και y=5,53 εκατοντάδες λάστιχα.

ii) Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $f(x) = -4$ ισοδυναμεί με την $x^3 - 3x - 4 = 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = x^3 - 3x - 4$ για την οποία ισχύουν: $g(2) = 2^3 - 3(2) - 4 = -2$, $g(3) = 3^3 - 3(3) - 4 = 14$ και συνεπώς $g(2)g(3) < 0$.Από το Θεώρημα Bolzano συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ (ισοδύναμα $f(x) = -4$) έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα (2,3). Επειδή επιπλέον στο διάστημα (2,3) η παράγωγος $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1)$ είναι θετική η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Άρα η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (2,3).

5. (10 μονάδες)

Δείξτε τις ανισότητες (υπόδειξη: χρησιμοποιείστε Θ. Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, άσκηση 1β σελ 103 βιβλίου):

α) για κάθε a,b πραγματικούς αριθμούς,

$$\left|\sin(a)-\sin(b)\right| \le \left|a-b\right|.$$

β) για κάθε h>0, $\sqrt{1+h} < 1+h/2$.

Λύση

5α) Θεωρούμε a,b πραγματικούς αριθμούς **.** Αν a=b τότε η αποδεικτέα σχέση ισχύει ως ισότητα. Υποθέτουμε λοιπόν ότι το a είναι διάφορο του b και μάλιστα (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι a<b. Η συνάρτηση ημίτονο $x \mapsto \sin(x)$ είναι συνεχής σε όλη την πραγματική ευθεία όπως και παραγωγίσιμη. Αρα είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) με παράγωγο $\frac{d}{dx}\sin(x)=\cos(x)$ **.** Ετσι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής και συνεπώς υπάρχει ξ στο ανοικτό διάστημα (α,β) έτσι ώστε $\frac{\left|\sin(a)-\sin(b)\right|}{\left|a-b\right|}=\cos(\xi)$. Όμως $\left|\cos(\xi)\right|\le 1$, συνεπώς $\frac{\left|\sin(a)-\sin(b)\right|}{\left|a-b\right|}\le 1$ και τελικά πολλαπλασιάζοντας τα δυο μέλη της τελευταίας ανισότητας με την θετική ποσότητα $\left|a-b\right|$ έχουμε ότι $\left|\sin(a)-\sin(b)\right| \le \left|a-b\right|$.

5β) Θεωρούμε την πραγματική συνάρτηση $x \mapsto \sqrt{1+x}$ για $x \ge -1$ η οποία είναι συνεχής για $x \ge -1$ και παραγωγίσιμη για x>1 με $\frac{d}{dx}\sqrt{1+x}=\frac{d}{dx}(1+x)^{1/2}=\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$.

Για την συνάρτηση αυτή ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα [0,h] οπότε υπάρχει ξ μεταξύ 0 και h ετσι ώστε $\frac{\sqrt{1+h}-\sqrt{1+0}}{h-0}=\frac{1}{2\sqrt{1+\xi}}$ δηλαδή

$$\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}=\frac{1}{2\sqrt{1+\xi}} \qquad (*).$$

Επειδή 0<ξ< h, έχουμε ότι 1<1+ξ<1+ h και επειδή η συνάρτηση τετραγωνική ρίζα είναι γνησίως αύξουσα $1<\sqrt{1+\xi}<\sqrt{1+h}$ οπότε $\frac{1}{\sqrt{1+\xi}}<1$ (αφού και η συνάρτηση $x \mapsto \frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στην θετική ημιευθεία των πραγματικών αριθμών).

Οπότε από την (*) έχουμε $\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}<\frac{1}{2}$ δηλαδή $\sqrt{1+h}-1<\frac{h}{2}$ ή ισοδύναμα $\sqrt{1+h}<1+\frac{h}{2}$, που είχαμε να αποδείξουμε.

6. (**20 μονάδες**)

(i) Σε μία εταιρεία κατασκευής υπολογιστών έχει διαπιστωθεί ότι ένα προϊόν είναι ελαττωματικό είτε λόγω κατασκευαστικού λάθους με πιθανότητα 5 % (Ενδεχόμενο A) είτε λόγω αστοχίας υλικού με πιθανότητα 3% (Ενδεχόμενο B). Τα δύο ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Υπολογίστε την πιθανότητα ένας υπολογιστής που επιλέγεται τυχαία από την παραγωγή της συγκεκριμένης εταιρείας:

(α) Να είναι ελαττωματικός λόγω κατασκευαστικού λάθους ενώ δεν υπήρξε αστοχία υλικού.

(β) Να είναι ελαττωματικός λόγω της πραγματοποίησης ενός μόνο από τα ενδεχόμενα A, B.

(γ) Να μην είναι ελαττωματικός.

(ii) Από ένα δοχείο που περιέχει 5 μαύρα και 15 λευκά σφαιρίδια επιλέγουμε διαδοχικά 3 χωρίς να τα επανατοποθετούμε στο δείγμα. Βρείτε την πιθανότητα στα 3 αυτά σφαιρίδια να υπάρχει τουλάχιστον ένα μαύρο.

(iii) Σε 100 άτομα ενός χωριού τα 40 έχουν γρίπη. Ο γιατρός κάνει σωστή διάγνωση στο 92% των ατόμων που είναι άρρωστα (δηλαδή διαπιστώνει ότι είναι άρρωστα) και στο 98% αυτών που είναι υγιή (τα βρίσκει υγιή). Ποια είναι η πιθανότητα αν επιλέξουμε τυχαία ένα άτομο ο γιατρός να διαγνώσει γρίπη ;

Λύση

(i) Από την υπόθεση έχουμε: P(A) = 0.05, P(B) = 0.03

Οι ζητούμενες πιθανότητες είναι:

(α) $P(A\cap B^c)=P(A)\cdot P(B^c)=P(A)(1-P(B))=0.05\cdot(1-0.03)=0{,}0485$

(β) $P\big((A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)\big)=P(A\cap B^c)+P(A^c\cap B)=$

$P(A)\cdot P(B^c)+P(A^c)\cdot P(B)=0.05\cdot(1-0.03)+(1-0{,}05)\cdot 0{,}03=0{,}077$

(γ) $P(A^c\cap B^c)=P((A\cup B)^c)=1-P(A\cup B)=1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$

$=1-(P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B))=1-(0.05+0.03-0.05\cdot 0.03)=0.9215$

(ii) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A_1 = Το σφαιρίδιο που επιλέγεται πρώτο είναι λευκό,

A_2 = Το σφαιρίδιο που επιλέγεται δεύτερο είναι λευκό,

A_3 = Το σφαιρίδιο που επιλέγεται τρίτο είναι λευκό,

A = Στα τρία σφαιρίδια που επιλέχθηκαν τουλάχιστον ένα είναι μαύρο (ζητούμενο).

Για το συμπληρωματικό του ενδεχομένου που ζητάμε ισχύει ότι $A^c=A_1\cap A_2\cap A_3$. Έτσι,

$P(A)=1-P(A^c)$ = 1-P($A_1\cap A_2\cap A_3)=1-P(A_1)\cdot P(A_2\mid A_1)\cdot P(A_3\mid A_1\cap A_2)$

Όμως,

η πιθανότητα το πρώτο σφαιρίδιο που επιλέγεται να είναι λευκό είναι $P(A_1)=\frac{15}{20}$, αφού υπάρχουν 15 λευκά σφαιρίδια σε σύνολο 20,

η πιθανότητα το δεύτερο σφαιρίδιο να είναι λευκό, δεδομένου ότι το πρώτο ήταν, είναι $P(A_2\mid A_1)=\frac{14}{19}$, αφού το αρχικό σφαιρίδιο δεν επανατοποθετείται και στο νέο δείγμα υπάρχουν 14 λευκά σφαιρίδια σε σύνολο 19, η πιθανότητα το τρίτο σφαιρίδιο να είναι λευκό, δεδομένου ότι τα δύο πρώτα ήταν, είναι $P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) = \frac{13}{18}$, αφού στο δείγμα, μετά την επιλογή των δύο πρώτων λευκών, υπάρχουν 13 λευκά σφαιρίδια σε σύνολο 18.

Άρα για τη ζητούμενη πιθανότητα έχουμε:

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) = 1 - \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} \cdot \frac{13}{18} = \frac{411}{684} \simeq 0.6$$

(iii)

Αν A = {Ένα άτομο που επιλέγεται τυχαία έχει γρίπη}, B = {ο γιατρός διαπιστώνει γρίπη}, τότε ισχύει ότι :

$P(A) = 0.40$, $P(B|A) = 0.92$ (πιθανότητα σωστής διάγνωσης σε άρρωστο),

$P(B|A^c) = 0.02$ (πιθανότητα λάθος διάγνωσης σε υγιή).

Ζητάμε την $P(B)$, όπου το ενδεχόμενο B – ο γιατρός διαπιστώνει γρίπη – μπορεί να πραγματοποιηθεί σε συνδυασμό με το A - ο γιατρός διαπιστώνει γρίπη σε άτομο που πράγματι νοσεί – ή με το A^c - ο γιατρός διαπιστώνει γρίπη σε υγιές άτομο. Ισχύει δηλαδή ότι $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$ και

$$P(B) = P\big((B \cap A) \cup (B \cap A^c)\big) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c).$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο δεσμευμένων πιθανοτήτων :

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B|A),$$

και τον τύπο ολικής πιθανοτήτος έχουμε :

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(A^c) \cdot P(B|A^c)$$
$$= 0.40 \cdot 0.92 + 0.60 \cdot 0.02 = 0.38$$