ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 5η

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: 17 Μαρτίου 2008

Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 2 Μαΐου 2008

Πριν από την λύση κάθε άσκησης καλό είναι να μελετώνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις των υποδείξεων και παραπομπών στα συγγράμματα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της πέμπτης εργασίας αναφέρονται στα:

Ενότητα 8 (Το ανάπτυγμα Taylor)
Ενότητα 9 (Το ολοκλήρωμα)
Ενότητα 10 (Γενικευμένη ολοκλήρωση)
Ενότητα 11 (Εφαρμογές ολοκληρωμάτων)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «**Λογισμός Μιας Μεταβλητής**» του Γ. Δάσιου.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα συμβουλευθείτε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στη http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm ως εξής:

Συνοδευτικό **Ε**κπαιδευτικό **Υ**λικό :

Λογισμός :

Σειρές Taylor, Ολοκληρώματα 1, Ολοκληρώματα 2.

Πιθανότητες :

Πιθανότητες 2

1. (20 μονάδες)

i) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\ln(x+a), -a \le x \le a$$

(α) Αποδείξτε ότι η f αναπτύσσεται σε σειρά Taylor κέντρου 0 (βλ. και Ενότητα 8.2, Τόμου «Λογισμός Μιας Μεταβλητής») ως εξής:

$$\ln(x+a)=\ln(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{na^n}x^n$$

(β) Προσδιορίστε το διάστημα σύγκλισης της προηγούμενης σειράς χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η ακτίνα σύγκλισης R μιας δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ δίνεται από τον τύπο $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}$, όταν τα προηγούμενα όρια υπάρχουν.

ii) Χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο τύπο καθώς και το γεγονός ότι το σφάλμα προσέγγισης που προκύπτει όταν από μία συγκλίνουσα εναλλάσσουσα σειρά $S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ χρησιμοποιηθούν οι n πρώτοι όροι $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k x^k$ δεν ξεπερνάει, κατά απόλυτη τιμή, τον αμέσως επόμενο n+1 όρο δηλ. $|S-S_n|<a_{n+1}$, προσδιορίστε με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων το **ln(1.03)**.

iii) Χρησιμοποιήστε το ανάπτυγμα Taylor του υποερωτήματος (i) καθώς και αυτό του $\sin x$ με κέντρο 0 για να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^3+1)-\ln(x^2+1)}{x\sin(x)}$$

<u>**Λύση**</u>

(i)

(α)

Υπολογίζουμε τις παραγώγους της συνάρτησης $f(x)=\ln(x+a)$ (όπως στην εργασία 4)

Για n=1 έχουμε

$$f^{(1)}(x)=\frac{1}{x+a}(x+a)'=\frac{1}{x+a}=(x+a)^{-1}$$

Παρόμοια για n=2,3 έχουμε

$$f''(x)=\left[(x+a)^{-1}\right]'=-(x+a)^{-1-1}(x+a)'=-(x+a)^{-2}$$

$$f'''(x)=\left[-(x+a)^{-2}\right]'=-(-2)(x+a)^{-2-1}(x+a)'=2(x+a)^{-3}$$

Έστω ότι η σχέση που ζητάμε ισχύει για $n=\kappa$

$$f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(x+a)^{k}}$$

Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για n=k+1. Πράγματι,

$$f^{(k+1)}(x)=\left(f^{(k)}(x)\right)'=\left(\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(x+a)^{k}}\right)'=(-1)^{k-1}(k-1)!\left((x+a)^{-k}\right)'=$$

$$=(-1)^{k-1}(k-1)!\times(-k)(x+a)^{-k-1}(x+a)'=\frac{(-1)^{k}k!}{(x+a)^{k+1}}$$

Έτσι η επαγωγική απόδειξη έχει ολοκληρωθεί και η παράγωγος οποιασδήποτε τάξης της f δίνεται από τη σχέση: $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^{n}}, n\geq 1$. Ιδιαίτερα για x=0 έχουμε:

$$f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{a^{n}}, n\geq 1$$

Χρησιμοποιώντας επομένως το Θεώρημα Taylor, μπορούμε να αναπτύξουμε την $f(x)$ σε σειρά κέντρου 0 ως εξής:

$$f(x)=f(0)+\frac{f^{(1)}(0)}{1!}x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^{2}+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^{3}+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}+\cdots=$$

$$=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}=\ln(0+a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{a^{n}}}{n!}x^{n}=$$

$$=\ln(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{na^{n}}x^{n}$$

(γ)

Για την ακτίνα σύγκλισης της προηγούμενης σειράς έχουμε :

$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, όπου a_n οι συντελεστές της σειράς $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{na^n}$. Επομένως,

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n-1}}{na^n}}{\frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a}{n}=\lim_{n\to\infty}a\left(1+\frac{1}{n}\right)=a\ .$$

Άρα ο τύπος $f(x)=\ln(x+a)=\ln(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{na^n}x^n$, που αποδείξαμε, ισχύει όταν η απόσταση της μεταβλητής *x* από το κέντρο της σειράς (μηδέν) είναι μικρότερη από την ακτίνα σύγκλισης: $|x-0|<a$, ή, ισοδύναμα, όταν $-a<x<a$.

Για τα άκρα αυτού του διαστήματος έχουμε:

Για *x*=-*α* η σειρά γίνεται:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{na^n}(-a)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{na^n}(-1)^n a^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}(-1)^{-1}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

Η τελευταία είναι η αρμονική σειρά η οποία δεν συγκλίνει.

Για *x*=*α* η σειρά γίνεται:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{na^n}a^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

η οποία συγκλίνει ως εναλλάσσουσα σειρά με ακολουθία 1/*n* θετική και φθίνουσα.

Συνοψίζοντας,

$$f(x)=\ln(x+a)=\ln(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{na^n}x^n, -a<x\le a$$

(ii)

Χρησιμοποιούμε τον τύπο που αποδείξαμε στο υποερώτημα (i) για α=1, x= 0.03, το οποίο βέβαια ανήκει στο διάστημα σύγκλισης (-1,1] :

$$\ln(1.03) = \ln(1+0.03) = \ln(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(0.03)^n =$$
$$= 0 + 0.03 - \frac{1}{2}(0.03)^2 + \frac{1}{3}(0.03)^3 - \cdots$$

Η προηγούμενη σειρά είναι εναλλάσσουσα. Για τις σειρές αυτού του τύπου, το προσεγγιστικό σφάλμα που προκύπτει αν κρατήσουμε n όρους από το ανάπτυγμα τους δεν ξεπερνάει κατά απόλυτη τιμή τον επόμενο όρο της σειράς. Στην προκειμένη περίπτωση για να έχουμε ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων (δηλαδή σφάλμα μικρότερο του 10^{-5}) αρκεί να κρατήσουμε n όρους όπου

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n}(0.03)^n \right| < 10^{-5} \Leftrightarrow \frac{0.03^n}{n} < 10^{-5}$$

Αυτό επιτυγχάνεται για n=3 , αφού:

n	$\frac{0.03^n}{n}$
1	0,03
2	0,00045
3	**0,000009 < 10^{-5}**
4	2,03E-07
5	4,86E-09

Έτσι,

$$\ln(1.03) \approx 0.03 - \frac{1}{2}(0.03)^2 + \frac{1}{3}(0.03)^3 = 0.029559$$

(iii)

Από τον τύπο που αποδείξαμε στο (i) έχουμε:

$$\ln(x^3+1) = \ln(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n1^n}(x^3)^n = x^3 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{3}x^9 - \cdots$$
$$\ln(x^2+1) = \ln(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n1^n}(x^2)^n = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 - \cdots$$

Επίσης είναι γνωστό το ανάπτυγμα του $\sin x$ σε σειρά κέντρου μηδέν:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots$$

Αντικαθιστώντας τις σειρές αυτές στο ζητούμενο όριο έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(x^3+1\right)-\ln\left(x^2+1\right)}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x^3 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{3}x^9 - \cdots\right) - \left(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 - \cdots\right)}{x\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots\right)} =$$

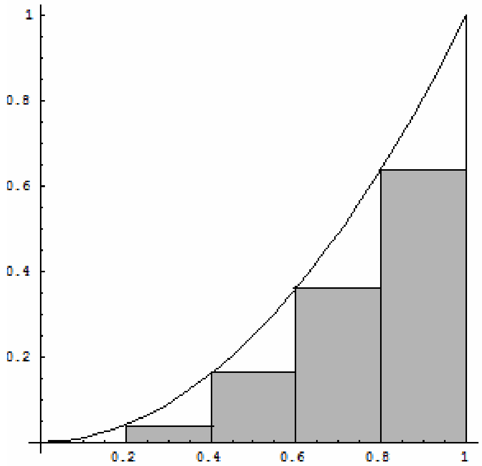
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^6 + \cdots}{x^2 - \frac{1}{3!}x^4 + \frac{1}{5!}x^6 - \cdots} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(-1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \cdots\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \cdots\right)} =$$

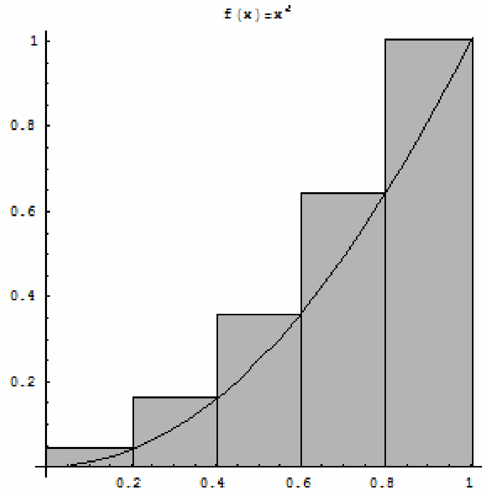
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \cdots}{1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \cdots} = \frac{-1 + 0 + \frac{1}{2}0 - \frac{1}{2}0 + \cdots}{1 - \frac{1}{3!}0 + \frac{1}{5!}0 - \cdots} = -1$$

2. (15 μονάδες)

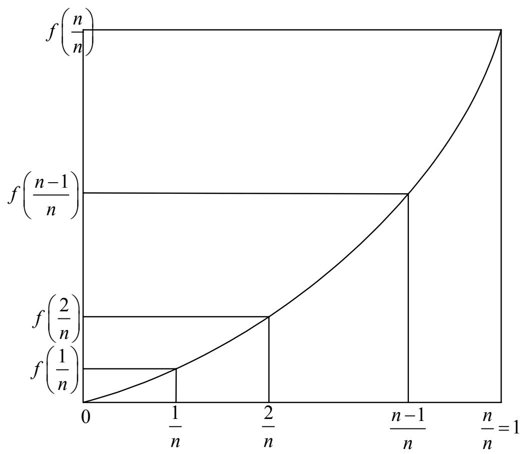
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2, 0 \le x \le 1$.

(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν των 4 ορθογωνίων που βρίσκονται κάτω και πάνω από την γραφική παράσταση της $f(x)=x^2$ στα δύο παρακάτω σχήματα.





(β) Να χωρίσετε το διάστημα [0,1] σε n ίσα υποδιαστήματα και να ξαναυπολογίσετε το εμβαδόν των ορθογωνίων που σχηματίζονται κάτω και πάνω από την γραφική παράσταση της $f(x)=x^2$ στα δύο αντίστοιχα σχήματα.



(γ) Να υπολογίσετε το όριο των δύο αθροισμάτων που υπολογίσατε στο ερώτημα (β) όταν το *n* τείνει στο άπειρο.

(δ) Να συγκρίνετε το αποτέλεσμα που υπολογίσατε στο ερώτημα (γ) με το ορισμένο ολοκλήρωμα $E=\int_0^1 x^2 dx$.

Υπόδειξη. $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Λύση

(α) Στο πρώτο σχήμα θα έχουμε

$$E_1 = 0.2 \times f(0.2) + 0.2 \times f(0.4) + 0.2 \times f(0.6) + 0.2 \times f(0.8) =$$
$$= 0.2 \times \left(0.2^2 + 0.4^2 + 0.6^2 + 0.8^2\right) = 0.24$$

ενώ στο δεύτερο σχήμα, θα έχουμε

$$E_2 = 0.2 \times f(0.2) + 0.2 \times f(0.4) + 0.2 \times f(0.6) + 0.2 \times f(0.8) + 0.2 \times f(1) =$$
$$= 0.2 \times \left(0.2^2 + 0.4^2 + 0.6^2 + 0.8^2 + 1^2\right) = 0.44$$

(β) Το άθροισμα από τα εμβαδά των ορθογωνίων που σχηματίζονται κάτω από την γραφική παράσταση θα είναι όμοια με το ερώτημα (α) τα εξής

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{1}{n} \times f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \times f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n} \times f\left(\frac{n-1}{n}\right) = \\
&= \frac{1}{n} \times \left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right) = \\
&= \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\right) = \\
&= \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 - n^2\right) = \\
&= \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2\right) - \frac{1}{n} = \\
&= \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\right) - 1 = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}
\end{aligned}$$

ενώ το αντίστοιχο για τα εμβαδά που σχηματίζονται πάνω από την γραφική παράσταση θα είναι ίσο με

$$\begin{aligned}
E_2 &= \frac{1}{n} \times f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \times f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n} \times f\left(\frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{n} \times f\left(\frac{n}{n}\right) = \\
&= \frac{1}{n} \times \left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right) = \\
&= \frac{1}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2\right) = \\
&= \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}
\end{aligned}$$

(γ) Παρατηρούμε ότι :

$$\lim_{n\to\infty} E_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} E_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(δ) Έχουμε $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$ και συνεπώς παρατηρούμε ότι τα εμβαδά των ορθογωνίων που περικλείουν την γραφική παράσταση της $f\left(x\right) = x^2$ καθώς και αυτά που βρίσκονται κάτω από την γραφική παράσταση συγκλίνουν στην τιμή $\frac{1}{3}$ που ταυτίζεται με την τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_0^1 x^2 dx$.

n	E1	E2
1	0,0000	1,0000
2	0,1250	0,6250
3	0,1852	0,5185
4	0,2188	0,4688
5	0,2400	0,4400
6	0,2546	0,4213
7	0,2653	0,4082
8	0,2734	0,3984
9	0,2798	0,3909
10	0,2850	0,3850
11	0,2893	0,3802
12	0,2928	0,3762
13	0,2959	0,3728
14	0,2985	0,3699
15	0,3007	0,3674
16	0,3027	0,3652
17	0,3045	0,3633
18	0,3061	0,3616
19	0,3075	0,3601

3. (15 μονάδες)

(Βλέπε Σ.Ε.Υ. , Ολοκληρώματα 1- Λυμένες ασκήσεις)

Δίνεται το ολοκλήρωμα:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx\ ,\ n \in \mathbb{N}$$

1) Αφού υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x dx$ να βρείτε, συναρτήσει του n, την διαφορά $I_{n+2} - I_n$.
2) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα I_1, I_3, I_5
3) Έστω $f(x) = \ln\left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$, να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι μια παράγουσα της $g(x) = \frac{1}{\cos x}$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.
4) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα I_0, I_2 και I_4

Λύση

1) $$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d}{dx}\left[\frac{(\sin x)^{n+1}}{n+1}\right] dx = \left[\frac{(\sin x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$$

$$I_{n+2} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^{n+2} - (\sin x)^n}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n(\sin^2 x - 1)}{\cos x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x dx = -\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$$

2) $$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$$

Από την προηγούμενη αναδρομική σχέση προκύπτει

$I_3 - I_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{3}{8} \Rightarrow I_3 = \ln 2 - \frac{3}{8}$, ομοίως

$$I_5 - I_3 = -\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 \Rightarrow I_5 = \ln 2 - \frac{3}{8} - \frac{9}{64} = \ln 2 - \frac{33}{64}$$

3) Για $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ έχουμε

$$f'(x) = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x}$$

Άρα η f είναι μια παράγουσα της $g(x) = \frac{1}{\cos x}$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

4) $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx = \left[\ln\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln(\tan\frac{5\pi}{12})$

και από την αναδρομική σχέση της 1ης ερώτησης προκύπτει

$I_2 = I_0 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \ln(\tan\frac{5\pi}{12}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$ **και**

$I_4 = I_2 - \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \ln(\tan\frac{5\pi}{12}) - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \ln(\tan\frac{5\pi}{12}) - \frac{5\sqrt{3}}{8}$

4. (15 μονάδες)

(Γεν. Μαθημ. Ι παρ. 9.3, Παραδείγματα σελ. 150 και Σ.Ε.Υ. Ολοκληρώματα 2-Λυμένες ασκήσεις).

(α) Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο **R** και αν $\alpha<\beta$ είναι τέτοια ώστε $f(\alpha)=f'(\alpha)=f(\beta)=f'(\beta)=0$ τότε

$$\int_\alpha^\beta e^x f''(x)dx = \int_\alpha^\beta e^x f(x)dx.$$

(Υπόδειξη: Ολοκλήρωση κατά παράγοντες δύο φορές)

(β) Θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$I_n = \int_0^\pi e^x \sin^n x dx.$$

όπου το n είναι φυσικός αριθμός. Χρησιμοποιώντας το (α) (ή αλλιώς) να δείξετε ότι $I_n = \dfrac{n(n-1)}{n^2+1} I_{n-2}$ για κάθε $n \geq 2$.

(γ) Να υπολογίσετε το I_8.

Λύση

(α) Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες δύο φορές και χρησιμοποιώντας το μηδενισμό των f,f' στα α,β παίρνουμε

$$\int_\alpha^\beta e^x f''(x)dx = \int_\alpha^\beta e^x (f')'(x)dx = e^\beta f'(\beta) - e^\alpha f'(\alpha) - \int_\alpha^\beta e^x f'(x)dx =$$
$$-\int_\alpha^\beta e^x f'(x)dx = -(e^\beta f(\beta) - e^\alpha f(\alpha) - \int_\alpha^\beta e^x f(x)dx) = \int_\alpha^\beta e^x f(x)dx$$

δηλαδή το ζητούμενο.

(β) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\sin^n x$. Έχουμε

$$f'(x) = n\sin^{n-1} x\cos x, f''(x) = n(n-1)\sin^{n-2} x\cos^2 x - n\sin^{n-1} x\sin x =$$
$$= n(n-1)\sin^{n-2} x(1-\sin^2 x) - n\sin^n x = n(n-1)\sin^{n-2} x - n^2 \sin^n x.$$

Αφού το $n \geq 2$ έπεται ότι $f(0)=f'(0)=f(\pi)=f'(\pi)=0$ άρα χρησιμοποιώντας το (α) παίρνουμε

$$I_n = \int_0^\pi e^x \sin^n x dx = \int_0^\pi e^x (n(n-1)\sin^{n-2} x - n^2 \sin^n x)dx = n(n-1)I_{n-2} - n^2 I_n.$$

Από αυτό έπεται άμεσα η ζητούμενη σχέση.

(γ) Προφανώς $I_0 = \int_0^\pi e^x dx = e^\pi - 1$. Άρα χρησιμοποιώντας το (β) παίρνουμε:

$$I_8 = \frac{8(8-1)}{8^2+1} I_6 = \frac{8.7}{65}.\frac{6(6-1)}{6^2+1} I_4 = \frac{8.7.6.5}{65.37}.\frac{4.(4-1)}{4^2+1} I_2 = \frac{8.7.6.5.4.3}{65.37.17}.\frac{2(2-1)}{2^2+1} I_0 = \frac{8!}{5.17.37.65}(e^\pi - 1).$$

5. (20 μονάδες)

(α) Η τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x)=\begin{cases} 1-a|x|, & \alpha\nu \quad |x|\le 1 \\ 0, & \alpha\nu \quad |x|>1 \end{cases}$$

1) Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού α.
2) Να βρεθούν οι πιθανότητες $P\left(|x|>\frac{1}{2}\right)$ και $P\left(x<\frac{3}{2}\middle||x|>\frac{1}{2}\right)$
3) Να βρεθεί η μέση τιμή EX και η διασπορά $VarX$

(β) Η ποσότητα πορτοκαλάδας που περιέχει κάθε μπουκάλι είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 250 gr και τυπική απόκλιση 8gr.

1) Ποια η πιθανότητα ένα μπουκάλι να περιέχει τουλάχιστον 260gr πορτοκαλάδας;
2) Ποια η πιθανότητα τα δύο από τα τρία μπουκάλια να περιέχουν τουλάχιστον 260gr και το άλλο να περιέχει το πολύ 260 gr πορτοκαλάδας;
3) Χρησιμοποιώντας την αναπαραγωγική ιδιότητα (βλ. ΣΕΥ Πιθανότητες 2, σελ. 41-42) να υπολογίσετε την πιθανότητα και τρία μπουκάλια μαζί να περιέχουν ποσότητα πορτοκαλάδας Y έτσι ώστε $730gr \le Y \le 760gr$

(Δίνεται: Φ(1,25) = 0,8944, Φ(0,72168) = 0,7642, Φ(1,4433) = 0,9251)

Λύση

(α)

1) Πρέπει $f(x)\ge 0 \Rightarrow a\le 1$ και

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1}\left(1-a|x|\right)dx=1 \Leftrightarrow \int_{-1}^{0}\left(1+ax\right)dx+\int_{0}^{1}\left(1-ax\right)dx=1$$

$$\Leftrightarrow \left[x+a\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[x-a\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}=1 \Leftrightarrow 1-\frac{a}{2}+1-\frac{a}{2}=1 \Leftrightarrow a=1$$

2) $P\left(|x|>\frac{1}{2}\right)=1-P\left(|x|\le\frac{1}{2}\right)=1-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(1-|x|\right)dx=1-\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(1+x\right)dx-\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(1-x\right)dx=\frac{1}{4}$

$$P\left(x<\frac{3}{2}\middle||x|>\frac{1}{2}\right)=\frac{P\left(\left\{x<\frac{3}{2}\right\}\cap\left\{|x|>\frac{1}{2}\right\}\right)}{P\left(|x|>\frac{1}{2}\right)}=\frac{P\left(\left\{x<-\frac{1}{2}\right\}\cup\left\{\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\right\}\right)}{\frac{1}{4}}$$

όμως

$$P\left(\left\{x<-\frac{1}{2}\right\}\cup\left\{\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\right\}\right)=P\left(x<-\frac{1}{2}\right)+P\left(\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\right)=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}(1+x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x)dx+\int_{1}^{\frac{3}{2}}0dx=\frac{1}{4}$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P\left(x<\frac{3}{2}\middle||x|>\frac{1}{2}\right)=1$

3)

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}x(1-|x|)dx=\int_{-1}^{0}x(1+x)dx+\int_{0}^{1}x(1-x)dx=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}=0$$

Γνωρίζουμε ότι: $VarX=EX^2-\left(EX\right)^2$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)dx+\int_{0}^{1}x^2(1-x)dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}=\frac{1}{6}$$

Άρα $VarX=\frac{1}{6}$

(β)

1) Γνωρίζουμε ότι: $X\sim N(250,8^2)\Rightarrow Z=\frac{X-250}{8}\sim N(0,1)$. Επομένως

$$P\left(X\geq 260\right)=P\left(\frac{X-250}{8}\geq\frac{260-250}{8}\right)=P\left(Z\geq 1,25\right)=1-\Phi(1,25)=0,1056$$

2) Αν θεωρήσουμε σαν «επιτυχία» το να περιέχει ένα μπουκάλι τουλάχιστον 260 gr πορτοκαλάδα και W είναι ο αριθμός των επιτυχιών στις ν επαναλήψεις του πειράματος « μέτρηση περιεχομένου» τότε το W είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους ν=3 και p = 0,1056.

Άρα $P(W=2)=\binom{3}{2}(0,1056)^2(0,8944)=0,029921$

3) Θέτουμε $Y=X_1+X_2+X_3$ όπου $X_i\sim N(250,8^2)$, οπότε, λόγω της αναπαραγωγικής ιδιότητας , $Y\sim N(750,(8\sqrt{3})^2)$.

Επομένως

$$P\left(730\leq Y\leq 760\right)=P\left(\frac{730-750}{8\sqrt{3}}\leq\frac{Y-750}{8\sqrt{3}}\leq\frac{760-750}{8\sqrt{3}}\right)=P\left(-1,4433\leq Z\leq 0,72168\right)$$

$$=\Phi(0,72168)-\Phi(-1,4433)$$

Αλλά $\Phi(-1,4433)=1-\Phi(1,4433)$ άρα

$$P\left(730\leq Y\leq 760\right)=\Phi(0,72168)+\Phi(1,4433)-1=0,7642-0,0749=0,6893$$

6. (15 μονάδες)

(Βλέπε Σ.Ε.Υ. , Πιθανότητες 2- Λυμένες ασκήσεις)

Έστω X ο χρόνος εκπομπής του πρώτου ηλεκτρονίου από την κάθοδο ενός αερόκενου σωλήνα. Με χρήση φυσικών μεθόδων βρίσκεται ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει την ακόλουθη συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x)=\begin{cases} ae^{-ax}, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

όπου $a\geq 0$

1) Να επαληθεύσετε την ισότητα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$
2) Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής
3) Να βρεθεί η πιθανότητα $P\left(1\leq X\leq 2\right)$
4) Να βρεθεί η πιθανότητα $P\{(X-1)(X-2)\geq 0\}$

Λύση

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{0}^{+\infty} f(x)dx=\int_{0}^{+\infty} ae^{-ax}dx=\lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t} ae^{-ax}dx=\lim_{t\to+\infty}(\left[-e^{-ax}\right]_0^t)=1$

2) Η συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F_X(x)=P(X\leq x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \int_0^x ae^{-at}dt, & x\geq 0 \end{cases},$$

όμως $\int_0^x ae^{-at}dt=\left[-e^{-at}\right]_0^x=1-e^{-ax}$ άρα $F_X(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-e^{-ax}, & x\geq 0 \end{cases}$.

3) $P(1\leq X\leq 2)=F_X(2)-F_X(1)=\int_1^2 ae^{-ax}dx=e^{-a}-e^{-2a}$

4) $EX=\int_0^{+\infty} xf(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b axe^{-ax}dx$.

$$\int axe^{-ax}dx=-\int x\left(e^{-ax}\right)'dx=-xe^{-ax}+\int x'e^{-ax}dx=-xe^{-ax}+\int e^{-ax}dx=-xe^{-ax}-\frac{e^{-ax}}{a}$$

$$\int_0^b axe^{-ax}dx=\left(-xe^{-ax}-\frac{e^{-ax}}{a}\right)\Bigg|_0^b=-be^{-ab}-\frac{e^{-ab}}{a}+\frac{1}{a}$$

$$EX=\lim_{b\to\infty}\int_0^b axe^{-ax}dx=\lim_{b\to\infty}(-be^{-ab}-\frac{e^{-ab}}{a}+\frac{1}{a})=\frac{1}{a}$$