ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 6η

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: 5 Μαΐου 2008
Ημερομηνία **Παράδοσης** της Εργασίας από τον Φοιτητή: **23 Μαΐου 2008 χωρίς παράταση!**

Η πρώτη άσκηση της 6ης Εργασίας αναφέρεται στις σειρές Fourier. Με το κεφάλαιο αυτό έχει καλυφθεί η ύλη της ΠΛΗ12. Οι υπόλοιπες ασκήσεις είναι επαναληπτικές στην ύλη της Γραμμικής Αλγεβρας και του Λογισμού μιάς μεταβλητής. Στην εργασία αυτή δεν έχουν περιληφθεί επαναληπτικές ασκήσεις στην ύλη των Πιθανοτήτων (επαναλάβετε τις αντίστοιχες ασκήσεις της 4ης και 5ης εργασίας) καθώς η ημερομηνία παράδοσης της 6ης εργασίας έχει μετατεθεί πιο νωρίς λόγω της ημερομηνίας της τελικής εξέτασης που είναι η **7η Ιουνίου**.

Ασκηση 1 (10 μονάδες) (Ενότητα 12 και ΣΕΥ, **σειρές Fourier**)

(α) (8 μον.) Να βρεθεί η σειρά Fourier της 2π-περιοδικής συνάρτησης f η οποία στο διάστημα $[-\pi,\pi)$ ορίζεται ως εξής : $f(x)=\begin{cases}0 & \text{για } -\pi \le x < 0\\ \pi - x & \text{για } 0 \le x < \pi\end{cases}$.

(β) (2 μον.) να εξεταστεί πού συγκλίνει η σειρά Fourier της f για τις τιμές του x στο διάστημα $[-\pi,\pi]$.

Λύση:

(α) Σύμφωνα με τη θεωρία (ΣΕΥ, σειρές Fourier, σελ. 2) το ανάπτυγμα Fourier της f δίδεται από την τριγωνομετρική σειρά:

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$ όπου:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad \mathrm{n} \in \mathbb{N}.$$

Υπολογίζουμε τους συντελεσυστές:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}(\int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx) = \frac{1}{2\pi}(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)dx) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi - x)dx = \frac{1}{2\pi}\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Για
n=1,2,…

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx=\frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(nx)dx+\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi-x)\cos(nx)dx$$

Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int(\pi-x)\cos(nx)dx=\int(\pi-x)\left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)'dx=(\pi-x)\left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)-\int(\pi-x)'\left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)dx=$$

$$(\pi-x)\left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)+\int\frac{\sin(nx)}{n}dx=(\pi-x)\left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)-\frac{\cos(nx)}{n^2}$$

Οπότε $a_n=\frac{1}{\pi}\left((\pi-x)\left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)-\frac{\cos(nx)}{n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos(n\pi)}{n^2}-(-\frac{1}{n^2})\right)=\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx=\frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(nx)dx+\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi-x)\sin(nx)dx=\frac{1}{n}$$

Η σειρά Fourier της f είναι: $\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos(nx)+\frac{\sin(nx)}{n}\right).$

(β) (2 μον.) Η σειρά Fourier της f συγκλίνει στην τιμή $f(x)$ για τις τιμές του x στο διάστημα $[-\pi,\pi]$ εκτός από την περίπτωση $x=0$ όπου η σειρά συγκλίνει στην τιμή π/2(=ημιάθροισμα πλευρικών ορίων της f.

Ασκηση 2 (15 μονάδες) - (Γραμμικοί χώροι-υπόχωροι, Γραμμικές Απεικονίσεις)

α) (5 μονάδες)

Δείξτε ότι το υποσύνολο $M_2=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix},\quad b=a+d,\ a,b,d\in\mathbb{R}\right\}$ του διανυσματικού χώρου των 2×2 πινάκων με πραγματικούς συντελεστές είναι διανυσματικός υπόχωρος και βρείτε μία βάση και τη διάσταση αυτού.

β) (10 μονάδες) Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, g(x,y,z)=(2x+2z,x+y,x+z)$$

Να δοθεί ο πίνακας αναπαράστασης της g ως προς την συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$.
Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα και την εικόνα της g.
Είναι η g επί; Είναι η g ένα προς ένα;

Λυση:

α) Ενα τυχόν στοιχείο του M_2 γράφεται ως $\begin{pmatrix} a & a+d\\ 0 & d\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, άρα

M_2 = span $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ και συνεπώς υπόχωρος του διανυσματικού χώρου των 2×2 πινάκων με πραγματικούς συντελεστές. Επιπλέον μία βαση του είναι το συνολο $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ καθώς είναι γραμμικά ανεξάρτητο. dim M_2=2.

β) Ο πίνακας της g ως προς την συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι ο $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Βρισκουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ από την οποία έχουμε ότι

1^o Από την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα της g έχουμε ότι $(x, y, z) \in Kerg$ αν και μόνο αν $x = -z$ και $y = z$ δηλαδή $Kerg = \{z(-1,1,1), z \in \mathbb{R}\} = span\{(-1,1,1)\}$ με βάση το μονοσύνολο $\{(-1,1,1)\}$.

2^o Η εικόνα της g παράγεται από τα διανύσματα που αντιστοιχούν στις δύο πρώτες στήλες του πίνακα της g τα οποία είναι και γραμμικά ανεξάρτητα οπότε αποτελούν και βάση της. Δηλαδή $\operatorname{Im} g = span\{(2,1,1), (0,1,0)\}$.

Η g δεν είναι επί καθώς $\operatorname{Im} g$ είναι γνήσιος υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Η g δεν είναι 1-1 καθώς $Kerg \neq \{0\}$.

Ασκηση 3. (17 μον.) (Γραμμικά Συστήματα, Διαγωνοποίηση)

Δίνεται το σύστημα γραμμικών εξισώσεων :

$$\begin{aligned} x + y + z &= -1 \\ x - \alpha y + z &= \alpha \\ x + y + \alpha z &= 1 \end{aligned}$$

(α) (5 μον.) Λύστε το σύστημα για όλες τις τιμές της πραγματικής παραμέτρου α.

(β) (12 μον.) Για την τιμή α = 0 :

(i) Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα συντελεστών Α του συστήματος και διαγωνοποιήστε τον.

(ii) Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη διαγωνοποίηση υπολογίστε τη n-οστή δύναμη Α για κάθε φυσικό αριθμό n.

Λύση:

(α) Ο ευκολότερος τρόπος είναι να κάνουμε γραμμοπράξεις στο σύστημά μας, οπότε αφαιρώντας την πρώτη εξίσωση από την τρίτη βρίσκουμε: $z = \dfrac{2}{\alpha - 1}$, επομένως, για να υπάρχει λύση αποκλείουμε την τιμή α = 1. Δηλαδή για α = 1 το συστημα είναι αδύνατο. Ακολούθως αφαιρούμε την πρώτη εξίσωση του συστήματος από την δεύτερη και παίρνουμε $y = -\dfrac{\alpha + 1}{\alpha + 1}$.

Έτσι, διαχωρίζουμε 2 περιπτώσεις:

(1) $\alpha \neq -1$: $y = -1$

Θεωρώντας και α ≠ 1, αντικαθιστούμε τις ως άνω τιμές των z και y στην πρώτη εξίσωση και βρίσκουμε την μοναδική λύση με $x = -\dfrac{2}{\alpha - 1}$.

(2) α = -1:
το y είναι αυθαίρετο, το z = -1 και x = - y, δηλαδή η γενική λύση γράφεται y(-1,1,0)+(0,0,-1).

(β)

(i) Για α = 0 ο πίνακας του συστήματος γίνεται $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ και οι ιδιοτιμές του βρίσκονται λύνοντας την χαρακτηριστική εξίσωση: $(1-\lambda)(\lambda^2 - 1) + 2(\lambda + 1) = 0$. Μία ιδιοτιμή επομένως είναι η λ_1=-1, οι δε άλλες είναι λύσεις της $(\lambda - 1)^2 = 2$, δηλ. $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$, $\lambda_3 = 1 - \sqrt{2}$. Λύνοντας τώρα το σύστημα:

$$(A - \lambda I)u = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

για $\lambda=\lambda_1$, λ_2 , λ_3 , εύκολα βρίσκουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

$$u^{(1)} = (0,1,-1),\ u^{(2)} = (\sqrt{2},1,1),\ u^{(3)} = (-\sqrt{2},1,1)$$

(ii) Άρα ο πίνακας P που διαγωνιοποιεί τον A μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ ο δε αντίστροφός του είναι: } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2\sqrt{2} & 1/4 & 1/4 \\ -1/2\sqrt{2} & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Επομένως, η n - οστή δύναμη του A μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$A^n = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (1+\sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (1-\sqrt{2})^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

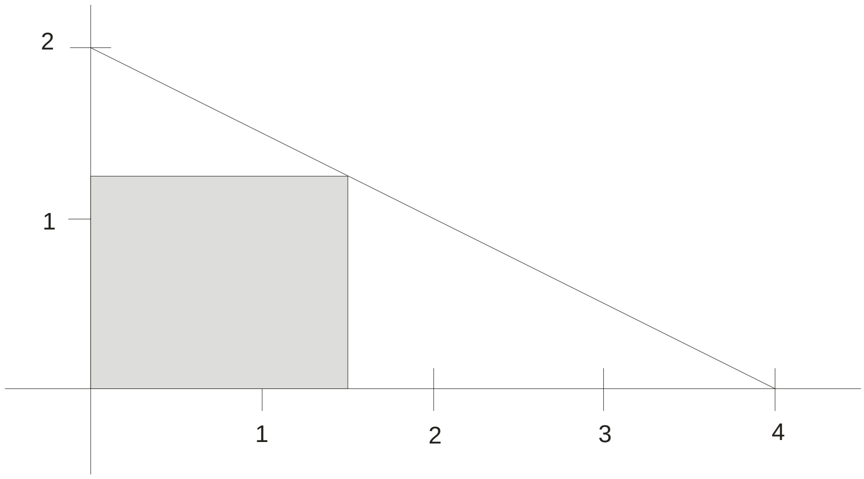
Άσκηση 4 (13 μον.)

(α) (8 μον.) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{3}{10}x^2 - \sqrt{x^2 + 1}$, x $\in \mathbb{R}$. Προσδιορίστε :

(i) Τα τοπικά ακρότατά της και τα διαστήματα στα οποία είναι αύξουσα ή φθίνουσα.
(ii) Τα σημεία καμπής και τα διαστήματα στα οποία στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω ή προς τα κάτω.
(iii) Τα σημεία τομής με τους άξονες.

(β) (5 μον.)

Δίδεται το τρίγωνο το οποίο σχηματίζεται από την τομή της ευθείας γραμμής *y* = - *x*/2 + 2, του άξονα των *x* και του άξονα των *y*, μαζί με ένα εγγεγραμμένο ορθογώνιο.



Βρείτε το εμβαδόν του μεγαλύτερου ορθογωνίου το οποίο δύναται να εγγραφεί εντός του δοθέντος τριγώνου.

Λύση:
(α) (i) Υπολογίζουμε καταρχάς την παράγωγο της συνάρτησης βρίσκοντας: $f'(x) = \frac{3}{5}x - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, οπότε τα τοπικά ακρότατα δίνονται από τον μηδενισμό της και είναι: $x_1 = 0$ ή $3\sqrt{x^2+1} = 5 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 4/3, \quad x_3 = -4/3$. Παίρνοντας και την δεύτερη παράγωγο βρίσκουμε
$f''(x) = \frac{3}{5} - \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$ και συμπεραίνουμε ότι το x = 0 είναι τοπικό μέγιστο αφού $f''(0) < 0$ ενώ από το ότι $f''(\pm 4/3) = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3}{5}\left(1 - \frac{9}{25}\right) > 0$, προκύπτει ότι τα άλλα δύο ακρότατα είναι τοπικά ελάχιστα. Από τα αποτελέσματα αυτά προκύπτει ότι η συνάρτηση είναι αύξουσα στα διαστήματα $x > x_2$, $x_3 < x < x_1$ και φθίνουσα στα διαστήματα $x < x_3$, $x_1 < x < x_2$.

(ii) Τα σημεία καμπής προκύπτουν από τον μηδενισμό της δεύτερης παραγώγου

$$f''(x) = \frac{3}{5} - \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} = 0 \;\Rightarrow x_+ = \sqrt{\left(\frac{25}{9}\right)^{1/3} - 1} \quad , \quad x_- = -x_+$$

αφού εύκολα αποδεικνύεται ότι στα σημεία αυτά δεν μηδενίζεται η τρίτη παράγωγος της f(x).
Η f(x) στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω για $x < x_-$, $x_+ < x$, ενώ τα στρέφει προς τα κάτω για $x_- < x < x_+$

(iii) Τέλος τα σημεία τομής της συνάρτησης με τους άξονες είναι: Για μεν τον άξονα των y το f(0) = -1, για δε τον άξονα των x οι πραγματικές ρίζες της f(x) = 0, δηλ.
$\frac{3}{10}x^2 - \sqrt{x^2+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{100}x^4 = x^2 + 1$, οπότε βρίσκουμε x=$\pm\left(50 + 10\sqrt{34}\right)^{1/2}/3$.

(β)
Αν ονομάσουμε (x,y) τις συντεταγμένες της κορυφής του σκιασμένου παραλληλόγραμμου που βρίσκεται πάνω στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου τότε 0≤x≤4 και είναι φανερό ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου μπορεί να γραφεί Ε = xy. Χρησιμοποιώντας κατόπιν την σχέση y = -x/2+2 γράφουμε το εμβαδόν αυτό ως μια συνάρτηση μόνο του x ως εξής:

$$E(x) = x\left(-\frac{x}{2} + 2\right) \;, \; 0 \le x \le 4.$$

Ακολούθως υπολογίζουμε την παράγωγο της συνάρτησης αυτής και αναζητούμε τα ακρότατά της:

$$E'(x) = -x + 2 = 0 \qquad \Rightarrow x = 2$$

το οποίο είναι μέγιστο αφού $E''(1) = -1 < 0$. Άρα το παραλληλόγραμμο με το μέγιστο εμβαδόν είναι αυτό που έχει πλευρές μήκους x = 2 και y = 1, δηλ. E = 2.

Άσκηση 5 (15 μον.) Oρια ακολουθιών - όρια συναρτήσεων

(α) (10μον.) Να υπολογίσετε τα όρια

(i) $\lim_{n\to\infty}\left(n^2 - n^3\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

(υπόδειξη: με κατάλληλο μετασχηματισμό μπορεί να αναχθεί στο $\lim_{u\to 0}\frac{u-\tan(u)}{u^3}$ για το οποίο μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αναπτύγματα Taylor).

(ii) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\ln(\ln(n))\right)^2}{\ln n}$

(iii) $\lim_{n\to+\infty}\left((n^2+1)^{3/2} - n^3\right)$

(β) (5 μον.) Για την συνάρτηση $f(x) = (\ln(1+x))^{\sin x}$ να βρείτε το πεδίο ορισμού και κατόπιν το όριο $\lim_{x\to 0^+}(\ln(1+x))^{\sin x}$.

Λύση:

(α) (i)

Έστω $a_n = n^2 - n^3\tan\left(\frac{1}{n}\right)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - x^3\tan(\frac{1}{x}) \qquad , x > 0.$

η οποία αποτελεί επέκταση της ακολουθίας $\{a_n\}$ στο πεδίο των θετικών πραγματικών αριθμών. Άρα $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} a_n$. Θέτοντας τώρα u=1/$x$, στην έκφραση αυτή, οπότε το όριο $x \to \infty$ ανάγεται σε $u \to 0$, παίρνουμε για το ζητούμενο όριο

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{u\to 0} f(1/u) = \lim_{u\to 0}\left(\frac{u-\tan(u)}{u^3}\right) = \lim_{u\to 0}\left(\frac{u-(u+\frac{u^3}{3}+2\frac{u^5}{15}+...)}{u^3}\right) = -\frac{1}{3}$$

Αρα επειδή η ακολουθία a_n αποτελεί περιορισμό της $f(1/u)$ στο ℕ έχουμε τελικά

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2 - n^3\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{1}{3}.$$

(α) ii)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln(\ln(x))\right)^2}{\ln x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(\ln(\ln(x))\right)\left(\ln(\ln(x))\right)'}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(\ln(\ln(x))\right)\frac{1}{\ln(x)}\left(\ln(x)\right)'}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(\ln(\ln(x))\right)\frac{1}{\ln(x)}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(\ln(\ln(x))\right)}{\ln(x)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2\frac{1}{\ln(x)}\left(\ln(x)\right)'}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\frac{1}{\ln(x)}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\frac{1}{\ln(x)} = 0$$

(α) (iii) Παρατηρούμε καταρχάς ότι θέτοντας n = ∞ στον γενικό όρο της ακολουθιας $\beta_n = (n^2+1)^{3/2} - n^3$, παίρνουμε ∞ - ∞ που είναι απροσδιόριστο. Για τον λόγο αυτό, γράφουμε τον γενικό όρο ως ακολούθως, πολλαπλασιάζοντάς τον επί την συζυγή του παράσταση:

$$\beta_n = \frac{\left[(n^2+1)^{3/2} - n^3\right]\left[(n^2+1)^{3/2} + n^3\right]}{\left[(n^2+1)^{3/2} + n^3\right]} =$$

$$= \frac{(n^2+1)^3 - n^6}{\left[(n^2+1)^{3/2} + n^3\right]} = \frac{3n^4+3n^2+1}{\left[(n^2+1)^{3/2} + n^3\right]} = \frac{n^4}{n^3}\frac{3+3n^{-2}+n^{-4}}{\left[(1+n^{-2})^{3/2}+1\right]} \to +\infty$$

καθώς $n \to \infty$.

(β) Πρέπει ln (1+x) > 0 δηλαδή x >0. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το [0, +∞).

$\lim_{x\to0+} \ln\left(1+x\right)^{\sin x} \overset{0^0}{=} \lim_{x\to0+} e^{\sin x\ln\left(\ln(1+x)\right)}$. Οπότε υπολογίζουμε πρώτα το

$$\lim_{x\to0+} \sin x \ln\left(\ln\left(1+x\right)\right) = \lim_{x\to0+} \frac{\ln\left(\ln\left(1+x\right)\right)}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to0+} \frac{\frac{1}{\ln\left(1+x\right)}\left(\ln\left(1+x\right)\right)'}{-\frac{\left(\sin x\right)'}{\left(\sin x\right)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to0+} \frac{\frac{1}{\ln\left(1+x\right)}\frac{1}{1+x}}{-\frac{\cos x}{\left(\sin x\right)^2}} = \lim_{x\to0+} \frac{-\left(\sin x\right)^2}{\left(1+x\right)\ln\left(1+x\right)\cos x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\lim_{x\to0+} \frac{-2\sin x\cos x}{\left(1+\ln\left(1+x\right)\right)\cos x - \left(1+x\right)\ln\left(1+x\right)\sin x} = -\frac{0}{1-0} = 0.$$

Αρα $\lim_{x\to0+} \ln\left(1+x\right)^{\sin x} \overset{0^0}{=} \lim_{x\to0+} e^{\sin x\ln\left(\ln(1+x)\right)} = e^0 = 1$ $\lim_{x\to0^+}$ (ln (1+x))$^{\sin x}$=1.

Ασκηση 6 (15 μον.)

Να μελετήσετε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n x^n}{n!}$ (για ποιά $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει;)

(ii) $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+3^n}$, Μπορείτε να δείξετε ότι $\frac{3}{2} < S < 3$;

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3+1}}$

Λύση:

(i) Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου έχουμε την ακόλουθη συνθήκη για τον γενικό όρο της σειράς:

$$a_n = \frac{n^n x^n}{n!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)^{n+1}\,|x|}{n^n(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n\,|x|}{n^n} < 1$$

ώστε η σειρά να συγκλίνει απολύτως. Από την σχέση αυτή, επομένως παίρνουμε τις αντίστοιχες τιμές του x που εξασφαλίζουν την εν λόγω σύγκλιση:

$$|x| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty}(n+\frac{1}{n})^n} \Rightarrow |x| < \frac{1}{e}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γνωστό αποτέλεσμα $\lim_{n\to\infty}(n+1/n)^n = e$.

(ii) Παρατηρούμε ότι $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+3^n} < \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{2^n+3^n} < \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}$. Οπότε χρησιμοποιώντας το γνωστό άθροισμα γεωμετρικής σειράς $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{1-2/3} = 3$, το ζητούμενο αποτέλεσμα $\frac{3}{2} < S < 3$ αποδεικνύεται άμεσα, επιβεβαιώνοντας ότι η σειρά συγκλίνει.

(iii) Για να απαντήσουμε χρησιμοποιούμε την μέθοδο της σύγκρισης

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^3+1}} > \frac{n}{\sqrt{n^3+1}} > \frac{n}{\sqrt{n^3+n^3}} = \frac{n}{\sqrt{2n^3}} = \frac{1}{\sqrt{2}n^{1/2}}.$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}n^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$ αποκλίνει (p-σειρά με p <1) συμπεραίνουμε ότι και η δοσμένη σειρά αποκλίνει.

Ασκηση 7 (15 μον.)

Υπολογίστε τα ολοκληρώματα :

(α) $\int \frac{1}{x^2-4}dx$ (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε ανάλυση σε απλά κλάσματα).

(β) $\int e^x \sin 2x dx$ (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε ολοκλήρωση κατά παράγοντες)

(γ) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2}\,dx$ (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε ολοκλήρωση με αντικατάσταση)

Λύση:

α) Η ολοκληρωτέα διασπάται σε απλά κλάσματα ως εξής

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x + (2A-2B)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\begin{Bmatrix} A+B=0 \\ 2A-2B=1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} A=-B \\ 2(-B)-2B=1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} A=1/4 \\ B=-1/4 \end{Bmatrix}$$

Αρα $\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+2}$. Οπότε

$$\int \frac{1}{x^2-4}dx = \int \frac{1}{4}\frac{1}{x-2}dx - \int \frac{1}{4}\frac{1}{x+2}dx = \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + C$$

β) $\int e^x \sin 2xdx = e^x \sin 2x - 2\int e^x \cos 2xdx = e^x \sin 2x - 2(e^x \cos 2x + 2\int e^x \sin 2xdx)$

αρα $5\int e^x \sin 2xdx = e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x$ συνεπώς $\int e^x \sin 2xdx = \frac{e^x}{5}(\sin 2x - 2\cos 2x) + C$

(γ) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)' dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$