ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ «ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ»

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΕΛΙΚΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 7 Ιουνίου 2008

Θέμα 1ο (20 μονάδες)

α) (**6** μονάδες)
Δείξτε ότι το υποσύνολο $\mathrm{P}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,(x,y,z)\cdot(1,-1,2)=0\right\}$ του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$ είναι διανυσματικός υπόχωρος και βρείτε μία βάση και τη διάσταση αυτού.

β) Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, f(x,y,z)=(2x+y-z,\ x+2y+z,\ x-z)$$

β1) (**6** μονάδες) Να δοθεί ο πίνακας αναπαράστασης της f ως προς την συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$ και η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή αυτού.
β2) (**6** μονάδες) Να βρεθούν βάσεις για τον πυρήνα και την εικόνα της f.
β3) (**2** μονάδες) Είναι η f επί; Είναι η f ένα προς ένα;

Λυση:
α) $(x,y,z)\cdot(1,-1,2)=0 \Leftrightarrow x-y+2z=0$, δηλ $x=y-2z$ και συνεπώς κάθε στοιχείο του Π είναι της μορφής $(y-2z,y,z)=y(1,1,0)+z(-2,0,1)$ όπου y, z αυθαίρετοι πραγματικοί. Αρα ο P είναι υπόχωρος ως το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των (1,1,0) , (-2, 0,1). Επιπλέον τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα οπότε μία βάση του P είναι {(1,1,0), (-2, 0,1)}και dim P=2.
β1) f(1,0,0)=(2,1,1), f(0,1,0)=(1,2,0), f(0,0,1)=(-1,1,-1) άρα ο πίνακας της f ως προς την συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι ο $\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$ και η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του βρίσκεται ως εξής:

$$\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\2&1&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&2\\0&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\boxed{1}&0&-1\\0&\boxed{1}&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

β2) 1ο) Από την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα της f έχουμε ότι $(x,y,z)\in Kerf$ αν και μόνο αν $x=z$ και $y=-z$ δηλαδή $Kerf=\{z(1,-1,1),z\in\mathbb{R}\}=span\{(1,-1,1)\}$ με βάση το μονοσύνολο $\{(1,-1,1)\}$.
2ο Η εικόνα της f παράγεται από τα διανύσματα που αντιστοιχούν στις δύο πρώτες στήλες του πίνακα της f τα οποία είναι και γραμμικά ανεξάρτητα οπότε αποτελούν και βάση της. Δηλαδή $\operatorname{Im} f=span\{(2,1,1),(1,2,0)\}$.

β3) Η f δεν είναι επί καθώς $\operatorname{Im} f$ είναι γνήσιος υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.
Η f δεν είναι 1-1 καθώς $Kerf\neq\left\{0\right\}$.

Θέμα 2ο **(20 μονάδες)** Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

α1) (**1** μονάδες) Δικαιολογείστε άμεσα (χωρίς υπολογισμούς) γιατί ο A έχει αναγκαστικά πραγματικές ιδιοτιμές και διαγωνοποιείται.
α2) (**4** μονάδες) Υπολογίστε την ορίζουσα του *A*. Τί συμπεραίνετε για μία από τις ιδιοτιμές του;
α3) (**15** μονάδες) Βρείτε τις ιδιοτιμές και ένα αντιστρέψιμο πίνακα P έτσι ώστε $A=PDP^{-1}$, όπου *D* διαγώνιος πίνακας.

Λυση

α1) Ο A είναι συμμετρικός ($A=A^T$) πραγματικός πίνακας άρα έχει πραγματικές ιδιοτιμές και διαγωνοποιείται.

α2) Η ορίζουσα του A είναι μηδέν καθώς η δεύτερη γραμμή είναι διπλάσια της πρώτης, άρα μία ιδιοτιμή είναι μηδέν.

α3) $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 4-\lambda \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$

$(1-\lambda)[(4-\lambda)(1-\lambda)-4)] - 2[2(1-\lambda)-2)] + (-1)[-4+4-\lambda] =$

$(1-\lambda)[\lambda^2 - 5\lambda] + 4\lambda + \lambda = \lambda^2 - 5\lambda - \lambda^3 + 5\lambda^2 + 5\lambda = -\lambda^3 + 6\lambda^2 = \lambda^2(6-\lambda)$

Οι ιδιοτιμές είναι η μηδενική (διπλή) και 6.

Βάσεις των ιδιοχώρων:

Για λ=0, βρίσκουμε την γενική λύση του ομογενούς συστήματος

AX=0: Από την κλιμακωτή μορφή $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, έχουμε
X = (-2 *y*+*z*, *y*,*z*) = *y* (-2, 1,0)+ *z* (1,0,1), με βάση του ιδιοχώρου {(1,0,1), (-2, 1,0)}.

Για λ=6, λύνουμε το ομογενές σύστημα (A-6I)X=0:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και βρίσκουμε βάση του ιδιοχώρου της ιδιοτιμής λ=6, το μονοσύνολο {(-1,-2,1)}.

Αρα $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ και ένας αντιστρέψιμος *P* ώστε $A=PDP^{-1}$ είναι ο $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>Θέμα 3^{o}</u> **(20 μονάδες)**

α) (8 μονάδες) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4}{x^2}$, x >0. Στο O*xy* επίπεδο θεωρούμε σημείο Μ της γραφικής παράστασης της f με συντεταγμένες $(x, f(x))$ και τις προβολές του Κ, Λ στους άξονες O*x*, O*y* αντίστοιχα. Εστω Π(*x*) η περίμετρος του ορθογωνίου ΟΚΜΛ (δηλαδή το άθροισμα των μηκών των πλευρών του) ως συνάρτηση του *x*. Σε ποια υποδιαστήματα του θετικού ημιάξονα O*x* είναι η Π(*x*) αύξουσα και σε ποιό φθίνουσα; Να βρεθεί η τιμή του *x* για την οποία η περίμετρος του ορθογωνίου ΟΚΜΛ είναι ελάχιστη και η τιμή της ελάχιστης περιμέτρου.

β) (12 μονάδες) Να υπολογίσετε τα όρια (<u>τα β2) , β3) με χρήση σειρών Taylor</u>)

β1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln(x))^2}{x^{1/2}}$, β2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$, β3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x^2}}{x^2}$

Λυση

3α) Το ορθογώνιο ΟΚΜΛ έχει διαστάσεις *x*, και f (*x*) άρα Π(*x*)=2(*x*+ $\dfrac{4}{x^2}$). Υπολογίζουμε την παράγωγο Π΄(*x*)= 2 (1 - $\dfrac{8}{x^3}$). Εχουμε ότι Π΄(*x*)>0 $\Leftrightarrow$ 1 - $\dfrac{8}{x^3}$>0 $\Leftrightarrow$ *x*>2, αφού *x* είναι θετικό. Παρόμοια για *x* θετικό, Π΄(*x*)<0 $\Leftrightarrow$ 1 - $\dfrac{8}{x^3}$<0 $\Leftrightarrow$ *x*<2. Αρα η συνάρτηση Π(*x*) είναι φθίνουσα μεταξύ 0 και 2 και αύξουσα από το 2 μέχρι το συν άπειρο και συνεπώς η ελάχιστη τιμή της είναι η Π(2)=6.

β1) Για το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln(x))^2}{x^{1/2}}$ μπορούμε να εφαρμόσουμε κατ'ευθείαν τον κανόνα L'Hopital

ή μπορούμε να θεωρήσουμε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^{1/4}}$ το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή επίσης.

Για το αντίστοιχο όριο του λόγου των παραγώγων έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x))'}{\left(x^{1/4}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{x^{-3/4}/4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x^{1/4}}=0$$, άρα και $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x))^2}{x^{1/2}}=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^{1/4}}\right)^2=0$$

β2) Για το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$, θεωρούμε τα αναπτύγματα Taylor του cos *x* και sin *x* γύρω από το 0:

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{1-\left(1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+O(x^6)\cdots\right)}{x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+O(x^7)}=\frac{x^2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{x^2}{4!}+O(x^4)\right)}{x\left(1-\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{5!}+O(x^6)\right)}=x\frac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{x^2}{4!}+O(x^4)}{1-\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{5!}O(x^6)}$$

$$\xrightarrow[x\to 0]{}0\frac{1/2}{1}=0.$$

β3) Για το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x^2}}{x^2}$, παρόμοια

$$\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}=\frac{1-(1-\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{x^4}{2!}-\cdots)}{x^2}=\frac{\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{x^4}{2!}+\cdots}{x^2}=\frac{x^2(1-\dfrac{x^2}{2!}+\cdots)}{x^2}=(1-\frac{x^2}{2!}-\cdots)\xrightarrow[x\to 0]{}1$$

<u>Θέμα 4^{o}</u> **(20 μονάδες)**

α) (10 μονάδες) Να εξεταστεί η σύγκλιση των σειρών:

α1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{n!}$ (για ποιά $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει;),

α2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + (-3)^n}{6^n}$ (να υπολογιστεί το άθροισμα)

α3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^3+4}}$

β) (10 μονάδες) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

β1) $\int \frac{1}{9-x^2} dx$, **β2)** $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$, **β3)** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(nx)\, dx$, n =1,2,3,…

Λυση

α1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{n!}$, με κριτήριο λόγου, $\left| \frac{\frac{(n+1)^2 x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^2 x^n}{n!}} \right| = \frac{(n+1)^2 \, |x|}{(n+1)n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1$, άρα συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + (-3)^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{2^n}{6^n} + \frac{(-3)^n}{6^n}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{1}{1-1/3} + \frac{1}{1+1/2} = 3/2 + 2/3$

α3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^3+4}}$, ο γενικός όρος $\frac{n+2}{\sqrt{n^3+4}} \sim \frac{n}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{1/2}}$ (γενικός όρος p-σειράς με p =1/2<1 που αποκλίνει). Αρα η σειρά αποκλίνει.

β1) $\int \frac{1}{9-x^2} dx = \frac{1}{6} \int \left(\frac{1}{3-x} + \frac{1}{3+x} \right) dx = (-\ln|3-x| + \ln|3+x|)/6 + C$ (έγινε χρήση της διάσπασης σε απλά κλάσματα $\frac{1}{9-x^2} = \frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{A}{3-x} + \frac{B}{3+x}$, από όπου προκύπτει A=B=1/6).

β2) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right)' dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$

β3) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(nx)\, dx = \left. \frac{\sin(nx)}{n} \right|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\sin(n\pi/2)}{n} - \frac{\sin(-n\pi/2)}{n} = 2\frac{\sin(n\pi/2)}{n}$, n =1,2,3,…

Για n=2k , το ολοκλήρωμα είναι 0. Για n=4k +1 έχει την τιμή 2/(4k +1) και για n=4k +3 έχει την τιμή -2/(4k +3) (k ακέραιος)

<u>Θέμα 5ο</u> **(20 μονάδες)**

α) Μία τυχαία μεταβλητή έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x)=\begin{cases}\theta e^{-\theta x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}.$$

η οποία έχει την ιδιότητα $P(X\le 1)=P(X>1)$.

α1) (2 μονάδες) Με την βοήθεια αυτής της ιδιότητας υπολογίστε την πιθανότητα $P(X\le 1)$.

α2) (4 μονάδες) Στη συνέχεια βρείτε την παράμετρο θ.

α3) (4 μονάδες) Τέλος, υπολογίστε την πιθανότητα $P\big((|X|>2)\mid X>1\big)$.

β) Υπολογίσθηκε ότι το βάρος των φρούτων κάποιου είδους σε γραμμάρια που περνάει από ένα συσκευαστήριο Α είναι μια τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(50,10^2)$, ενώ σε ένα συσκευαστήριο Β η αντίστοιχη τυχαία μεταβλητή Y που εκφράζει το βάρος φρούτων του ίδιου είδους ακολουθεί την κανονική κατανομή $N\left(60,\left(\sqrt{44}\right)^2\right)$.

β1) (5 μονάδες) Επιλέγουμε τρία φρούτα από το συσκευαστήριο Α. Ποιά είναι η πιθανότητα ένα από τα φρούτα αυτά να έχει βάρος μεγαλύτερο από 60 γραμμάρια και δύο να έχουν βάρος μικρότερο ή ίσο από 60 γραμμάρια;

β2) (5 μονάδες) Επιλέγουμε ένα φρούτο από το συσκευαστήριο Α και ένα φρούτο από το συσκευαστήριο Β. Ποια είναι η πιθανότητα αυτά να έχουν συνολικό βάρος που ξεπερνάει τα 122 γραμμάρια;
Δίνεται ότι Φ(1)=0.8413.

Λύση :

α1) Από την δεδομένη σχέση έχουμε :

$$P(X\le 1)=P(X>1)\Leftrightarrow P(X\le 1)=1-P(X\le 1)\Leftrightarrow P(X\le 1)=\frac{1}{2}.$$

Συνεπώς :

α2) $P(X\le 1)=\int_{-\infty}^{1}\theta e^{-\theta x}dx=\int_{0}^{1}\theta e^{-\theta x}dx=-e^{-\theta x}\Big|_0^1=1-e^{-\theta}.$

Άρα $1-e^{-\theta}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^{-\theta}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \theta=\ln 2.$

α3) Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε

$$P\big((|X|>2)\mid X>1\big)=\frac{P([(X<-2)\cup(X>2)]\cap(X>1))}{P(X>1)}=\frac{P(X>2)}{P(X>1)}=\frac{1-P(X\le 2)}{1-P(X\le 1)}.$$

Αλλά

$$P(X\le 2)=\int_{-\infty}^{2}\theta e^{-\theta x}dx=\int_{0}^{2}\theta e^{-\theta x}dx=-e^{-\theta x}\Big|_0^2=1-e^{-2\theta}.$$

Οπότε

$$P\big((|X|>2)\mid X>1\big)=\frac{1-(1-e^{-2\theta})}{1-(1-e^{-\theta})}=\frac{e^{-2\theta}}{e^{-\theta}}=e^{-\theta}$$

και για την τιμή $\theta=\ln 2$ που βρήκαμε από το προηγούμενο ερώτημα

$$P\big((|X>2|)\mid X>1\big)=e^{-\ln 2}=\frac{1}{2}.$$

β1) $P(X \le 60) = P\left(\frac{X-50}{10} \le \frac{60-50}{10}\right) = P(Z \le 1) = \Phi(1) = 0.8413,$ αφού προφανώς

$Z = \frac{X-50}{10} \sim N(0,1^2).$

Αν θεωρήσουμε σαν «επιτυχία» την περίπτωση που ένα φρούτο που επιλέγεται έχει βάρος μικρότερο ή ίσο από 60 γραμμάρια και W είναι ο αριθμός των επιτυχιών στις 3 επαναλήψεις του πειράματος «μέτρηση βάρους φρούτου», τότε το W είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την διωνυμική κατανομή $B(3, 0.8413)$. Η πιθανότητα που ζητείται θα υπολογισθεί ως εξής :

$$P(W=2) = \binom{3}{2}(0.8413)^2(0.1587)^{3-2} = 0.336977.$$

β2) Η τυχαία μεταβλητή $V = X + Y$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N\left(50+60, 10^2 + \left(\sqrt{44}\right)^2\right)$ δηλαδή την $N\left(110, 12^2\right)$. Συνεπώς

$$P(V > 122) = 1 - P(V \le 122) = 1 - P\left(\frac{V-110}{12} \le \frac{122-110}{12}\right) = 1 - P(U \le 1) =$$

$$= 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587.$$

όπου προφανώς $U = \frac{V-110}{12} \sim N(0,1^2).$

ΤΕΛΟΣ