ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ «ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ»

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 14 Ιουνίου 2009

Θέμα 1. (20 μονάδες)

α) (7 μον) Για τις διάφορες τιμές του $k \in \mathbb{R}$, να λυθεί το σύστημα.

$$x - 2y + kz = 1$$
$$2x - y + 2z = 2$$
$$3x - y + 3kz = 3.$$

β) (6 μον) Έστω $a \in \mathbb{R}$ και V ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα στοιχεία $(1,2,a), (0,1,1), (0,1,a-1)$. Για ποιες τιμές του a ισχύει $V = \mathbb{R}^3$;

γ) (7 μον) Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του διανυσματικού υπόχωρου του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα στοιχεία $(1,0,1),(0,2,2)$.

Θέμα 2. (20 μονάδες)

Έστω $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

α) (5 μον) Υπολογίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ιδιοτιμές του A.

β) (8 μον) Εξετάστε αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος. Στην περίπτωση που ο A είναι διαγωνοποιήσιμος, βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακα P τέτοιον ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

γ) (7 μον) Υπολογίστε τον πίνακα $A^{2009} - A^{2007}$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το θεώρημα Cayley-Hamilton.)

Θέμα 3. (20 μονάδες)

α) (7 μον) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{e}x - \ln x$ με πεδίο ορισμού $D = (0,+\infty)$. Εξετάστε τη μονοτονία της f, βρείτε τα ακρότατά της και δείξτε ότι $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in D$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln x$ με πεδίο ορισμού $D = (0,+\infty)$.

β1) (3 μον) Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $(e,1)$ είναι $y = \frac{1}{e}x$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου και το ότι η εξίσωση μίας ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0) και έχει κλίση a δίνεται από τον τύπο: $\frac{y - y_0}{x - x_0} = a$)

β2) (10 μον) Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g, την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $(e,1)$ και τον άξονα των x. (Υπόδειξη: Κάντε ένα σχετικό σχήμα και θεωρήστε τον κατάλληλο διαχωρισμό του χωρίου.).

<u>Θέμα 4.</u> (20 μονάδες)

α) (6 μον) Υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+3n^2}-n^2\right),$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{\pi}{x}.$$

β) (6 μον) Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες σειρές συγκλίνουν

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^4+1}{n^5+1}$$ (Υπόδειξη: Συγκρίνετέ την με γνωστή σειρά.)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{c^n} \quad (c>0).$$

γ) (8 μον) Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα

$$\int \sin^3 x\cos^2 x dx$$

$$\int \frac{2}{x^2-4}dx$$

$$\int x(\ln x)^2 dx \quad (x>0).$$

<u>Θέμα 5.</u> (20 μονάδες)

a) Κατά τη διαδικασία επιλογής νέων φοιτητών μιας Σχολής οι υποψήφιοι κρίνονται ως «επιτυχόντες» ή «αποτυχόντες» για την εισαγωγή τους βάσει μιας εξέτασης. Έχει μετρηθεί στατιστικά ότι αν ένας υποψήφιος είναι επαρκώς προετοιμασμένος, τότε έχει πιθανότητα 80% να περάσει επιτυχώς την εξέταση ενώ αν δεν είναι επαρκώς προετοιμασμένος, η πιθανότητα επιτυχίας του είναι 25%. Αν γνωρίζουμε ότι σε μια συγκεκριμένη χρονιά το 40% των υποψηφίων είναι επαρκώς προετοιμασμένοι, να υπολογίσετε τις πιθανότητες :

a1) (5 μον) Ένας υποψήφιος που επιλέγουμε τυχαία να πετύχει στις εξετάσεις

a2) (5 μον) Ένας υποψήφιος που πέτυχε στις εξετάσεις να ήταν επαρκώς προετοιμασμένος.

β) Σε ένα τηλεφωνικό κέντρο εκτιμήθηκε ότι ο χρόνος t της διάρκειας των τηλεφωνικών συνδιαλέξεων είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί μια κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μορφής

$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-kt}, & t>0\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}.$$

β1) (5 μον) Δείξτε ότι για να είναι η $f(t)$ πράγματι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας πρέπει $k=\frac{1}{5}$.

β2) (5 μον) Βρείτε ποια είναι η πιθανότητα μια συνδιάλεξη να διαρκέσει από 1 έως 2 λεπτά.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Ενδεικτικές λύσεις

Θέμα 1

α) Ο επαυξημένος πίνακας

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3k & 0 \end{array}\right]$$

του συστήματος μετά στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών παίρνει τη μορφή

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3k & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 1 \\ 0 & 3 & 2-2k & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 / 5]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 / 3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2-2k}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2-2k}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2k-2}{3} & 0 \end{array}\right]$$

Οπότε φθάνουμε στο τριγωνικό σύστημα

$$\begin{aligned} x \quad -2y \quad +kz \quad &= 1 \\ y + \frac{2-2k}{5} z &= 0 \\ \frac{2(k-1)}{3} z &= 0. \end{aligned}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις βασιζόμενοι στο $k-1$ της τελευταίας εξίσωσης.

1. Έστω $k \neq 1$. Τότε από την τελευταία εξίσωση έχουμε *z* = 0, από τη δεύτερη *y* = 0 και από την πρώτη *x* = 1. Άρα έχουμε μοναδική λύση, την (1,0,0).
2. Έστω $k = 1$. Τότε το τριγωνικό σύστημα είναι το

   $$\begin{aligned} x - 2y + z &= 1 \\ y \quad &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

   Άρα *y* = 0 και $x = 1 + 2y - z = 1 - z,$ ενώ το *z* παίρνει αυθαίρετες τιμές. Δηλαδή έχουμε άπειρες λύσεις, τις $(1-z, 0, z),\ z \in \mathbb{R}.$

β) Έχουμε $\dim V = 3 \Leftrightarrow$ τα δοσμένα στοιχεία είναι γραμμικά ανεξάρτητα $\Leftrightarrow$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2.$$

γ) Τα διανύσματα $v_1=(1,0,1), v_2=(0,2,2)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Σύμφωνα με τη μέθοδο των Gramm-Schmidt, θέτουμε $u_1=v_1$ και $u_2=v_2-\frac{\langle v_2,v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1=(0,2,2)-\frac{2}{2}(1,0,1)=\left(-1,2,1\right)$. Έχουμε $\frac{u_1}{\|u_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{u_2}{\|u_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)$. Μια ορθοκανονική βάση του χώρου που παράγουν τα v_1,v_2 είναι $\left\{\frac{u_1}{\|u_1\|},\frac{u_2}{\|u_2\|}\right\}$.

Θέμα 2

α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$\chi_A(x)=\det\left(A-xI\right)=\det\begin{pmatrix}-2-x & -1\\ 3 & 2-x\end{pmatrix}=x^2-1=(x-1)(x+1)$ και οι ιδιοτιμές είναι $1,-1$.

β) Επειδή ο A είναι 2×2 πίνακας και έχει δυο διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι διαγωνοποιήσιμος. Τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 1 είναι οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος $(A-I)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-3 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$, δηλαδή είναι $\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}x, x\in\mathbb{R}-\{0\}$. Όμοια, τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή -1 είναι $\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}x, x\in\mathbb{R}-\{0\}$. Θέτοντας $P=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$, έχουμε ότι ο P είναι αντιστρέψιμος και ξέρουμε ότι $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

γ) Από το Θεώρημα Cayley-Hamilton (ή με άμεσο υπολογισμό) έχουμε $A^2=I$. Με μια άμεση επαγωγή στο n, βλέπουμε ότι για κάθε μη αρνητικό ακέραιο n έχουμε $A^{2n+1}=A.$ Άρα
$A^{2009}-A^{2007}=A-A=0.$

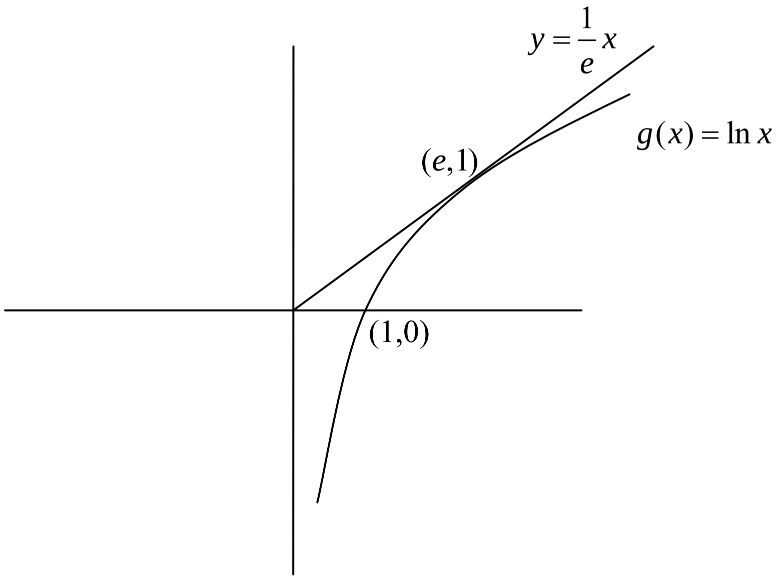
Θέμα 3

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο D και $f^{/}(x)=\frac{1}{e}-\frac{1}{x}$ για κάθε $x\in D$. Άρα $f^{/}(x)=0\Leftrightarrow x=e.$

Αν $x\in(0,e)$, τότε $f^{/}(x)<0$ και άρα η f είναι φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Αν $x\in(e,\infty)$, τότε $f^{/}(x)>0$ και άρα η f είναι αύξουσα στο διάστημα αυτό. Συνεπώς στο $x=e$ έχουμε τοπικό ελάχιστο με αντίστοιχη τιμή $f(e)=0.$ Άρα στο $x=e$ έχουμε ολικό ελάχιστο, δηλαδή $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in D$.

β1) Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $(e,1)$ είναι $y-1=g^{/}(e)(x-e)=\frac{1}{e}(x-e),$ δηλαδή $y=\frac{1}{e}x$.

β2)



Χρησιμοποιώντας το β1), το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_0^1 \frac{1}{e}xdx+\int_1^e \left|\frac{1}{e}x-\ln x\right|dx.$ Λόγω του α),

έχουμε

$$E=\int_0^1 \frac{1}{e}xdx+\int_1^e \left(\frac{1}{e}x-\ln x\right)dx=\frac{1}{e}\int_0^e xdx-\int_1^e \ln xdx=\frac{1}{e}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^e-\left[x\ln x-x\right]_1^e=$$
$$\frac{1}{e}\left(\frac{1}{2}e^2\right)-\left(e\ln e-e-\left(0-1\right)\right)=\frac{e}{2}-1.$$

Θέμα 4

α)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+3n^2}-n^2\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^4+3n^2}-n^2\right)\left(\sqrt{n^4+3n^2}+n^2\right)}{\sqrt{n^4+3n^2}+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{\sqrt{n^4+3n^2}+n^2}=$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+1}=\frac{3}{2}.$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του L' Hospital έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\pi\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\pi\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)=\pi\,.$$

β) Ισχύει $n^5+1 \le n^5+n = n(n^4+1)$, δηλαδή $0 < \frac{1}{n} \le \frac{n^4+1}{n^5+1}$. Ξέρουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει και άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+1}{n^5+1}$ δεν συγκλίνει.

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου για τη σειρά $\sum_{\mathrm{n}=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{n}^2}{\mathrm{c}^{\mathrm{n}}}$ έχουμε:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{(n+1)^2}{c^{n+1}}}{\frac{n^2}{c^n}} = \frac{(n+1)^2 \cdot c^n}{n^2 \cdot c^{n+1}} = (\frac{n+1}{n})^2 \cdot \frac{1}{c} \to 1 \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{c}.$$

Επομένως η σειρά συγκλίνει όταν c>1 και δεν συγκλίνει όταν $c<1$. Δεν συγκλίνει επίσης και για c=1, αφού τότε η σειρά γίνεται $\sum_{\mathrm{n}=1}^{+\infty} \mathrm{n}^2$.

γ) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της αντικατάστασης έχουμε

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = -\int \sin^2 x \cos^2 x d(\cos x) = -\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x d(\cos x) =$$

$$-\int \cos^2 x d(\cos x) + \int \cos^4 x d(\cos x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + c.$$

Χρησιμοποιώντας ανάλυση σε απλά κλάσματα έχουμε

$$\frac{2}{x^2-4} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+2} \Rightarrow \int \frac{2}{x^2-4} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+2} dx = \frac{1}{2}\ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln|x+2| + c.$$

Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση δυο φορές έχουμε

$$\int x(\ln x)^2 dx = \frac{1}{2}\int (\ln x)^2 d(x^2) = \frac{1}{2}\left(x^2(\ln x)^2 - \int x^2 d((\ln x)^2)\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(x^2(\ln x)^2 - 2\int x \ln x dx\right) = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \int x \ln x dx$$

και

$$\int x \ln x dx = \frac{1}{2}\int \ln x d(x^2) = \frac{1}{2}\left(x^2 \ln x - \int x^2 d(\ln x)\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 \ln x - \int x dx\right) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c.$$

Άρα $\int x(\ln x)^2 dx = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}x^2 + c$.

Θέμα 5

α) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
A = ο υποψήφιος είναι επαρκώς προετοιμασμένος,
B = ο υποψήφιος δεν είναι επαρκώς προετοιμασμένος,
E = ο υποψήφιος πετυχαίνει στις εξετάσεις.

Από την εκφώνηση έχουμε ότι $P(A) = \frac{40}{100}$ και $P(B) = 1 - P(A) = \frac{60}{100}$.

Το ενδεχόμενο E πραγματοποιείται σε συνδυασμό με ένα από τα A, B τα οποία είναι ξένα μεταξύ τους και καλύπτουν όλες τις δυνατές περιπτώσεις. Μπορεί επομένως να εφαρμοστεί το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας για την απάντηση του πρώτου ερωτήματος:

$$P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) = \frac{80}{100}\frac{40}{100} + \frac{25}{100}\frac{60}{100} = \frac{47}{100}.$$

Για το δεύτερο ερώτημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο τύπος Bayes. Ζητάμε την

$$P(A|E) = \frac{P(E|A)P(A)}{P(E)} = \frac{\frac{80}{100}\frac{40}{100}}{\frac{47}{100}} = \frac{32}{47}.$$

β1) Για να είναι η $f(t)$ συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα πρέπει $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$. Έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{5} e^{-kt} dt = -\frac{1}{5}\frac{1}{k}\int_{0}^{+\infty} e^{-kt} d\left(-kt\right) = -\frac{1}{5k}\int_{0}^{+\infty} d\left(e^{-kt}\right) = -\frac{1}{5k}\lim_{a\to+\infty} e^{-kt}\Big|_{0}^{a} = .$$

$$= -\frac{1}{5k}\left(\lim_{a\to+\infty} e^{-ka} - e^{-k0}\right) = -\frac{1}{5k}(0-1) = \frac{1}{5k}.$$

Συνεπώς έχουμε $\frac{1}{5k} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{5}$.

β2) Υπολογίζουμε $P(1 \le t \le 2) = \int_{1}^{2} \frac{1}{5} e^{-\frac{t}{5}} dt = -e^{-\frac{t}{5}}\Big|_{1}^{2} = -e^{-\frac{2}{5}} + e^{-\frac{1}{5}} \approx 0.1484.$