ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ «ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ»

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 5 Ιουλίου 2009

Θέμα 1. (20 μονάδες)
Έστω $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = z, y = w\}$ υποσύνολο του $\mathbb{R}^4$ και V ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα $v_1 = (2,1,2,1), v_2 = (1,-2,1,-2)$.

α) (7 μον) Δείξτε ότι το U αποτελεί υπόχωρο του $\mathbb{R}^4$ και βρείτε μία βάση του και τη διάστασή του. Βρείτε επίσης τη διάσταση του διανυσματικού χώρου V.

β) (10 μον) Υπολογίστε τις διαστάσεις των διανυσματικών χώρων $U+V, U \cap V$.

γ) (3 μον) Εξετάστε αν ισχύει $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

Θέμα 2. (20 μονάδες)

α) Έστω $a,b,\theta \in \mathbb{R}$ και $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

α1) (5 μον) Να βρεθούν όλες οι τιμές των $a,b,\theta \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε ο πίνακας A να είναι ορθογώνιος.

α2) (5 μον) Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ μια γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε ο πίνακας της f ως προς κάποια βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι ο A. Να βρεθούν όλες οι τιμές των $a,b,\theta \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε η f να είναι 1-1.

β) Έστω $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$.

β1) (5 μον) Υπολογίστε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A.

β2) (5 μον) Υπολογίστε τον πίνακα A^{2010}. (Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήστε το θεώρημα Cayley-Hamilton.)

Θέμα 3. (20 μονάδες)
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 e^{-x}$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) (5 μον) Προσδιορίστε τα διαστήματα όπου η f είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

β) (5 μον) Βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f που είναι τοπικά η ολικά ακρότατα σημεία και δείξτε ότι $x^2 e^{-x} \le 4e^{-2}$ για κάθε $x \ge 0$.

γ) (5 μον) Βρείτε τα x τέτοια ώστε τα σημεία $(x, f(x))$ να είναι τα σημεία καμπής της f.

δ) (5 μον) Έστω $a \ge 0$. Υπολογίστε το εμβαδόν E_a του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και την ευθεία $x = a$.

Θέμα 4. (20 μονάδες)

α) (8 μον) Έστω $a,b \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-a}{x}, & x<0 \\ x+b, & x \ge 0 \end{cases}$

Να βρεθούν όλες οι τιμές των $a,b \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) (6 μον) Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες σειρές συγκλίνουν

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 5^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2}{5^n + 2}$$ (Υπόδειξη: Συγκρίνετέ την με γνωστή σειρά.).

γ) (6 μον) Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα

$$\int_0^1 \frac{x-2}{x^2 + x - 12} dx$$

$$\int x^2 (x+2)^{\frac{1}{3}} dx$$

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση $u = x + 2$ για το δεύτερο ολοκλήρωμα.)

<u>Θέμα 5.</u> (20 μονάδες)

α) Από το σύνολο των αριθμών {1,2,3,4,5} επιλέγουμε τυχαία δύο, δεχόμενοι ότι ο αριθμός που επιλέχθηκε πρώτος μπορεί να επιλεγεί και δεύτερη φορά.

α1) (3 μον) Προσδιορίστε τον δειγματικό χώρο του πειράματος.

α2) (4 μον) Βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων

Α = «Οι αριθμοί που επιλέχθηκαν είναι ίσοι»

Β = «Οι αριθμοί που επιλέχθηκαν διαφέρουν το πολύ κατά 1»

α3) (3 μον) Εξετάστε αν τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ανεξάρτητα.

β) Μια μηχανή κατασκευάζει βίδες των οποίων το μήκος σε cm ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 5 και τυπική απόκλιση 0.2. Αν το μήκος μιας βίδας είναι εκτός του κλειστού διαστήματος [4.8 5.2] τότε αυτή θεωρείται ελαττωματική.

β1) (5 μον) Ποια η πιθανότητα μια τυχαία επιλεγμένη βίδα να είναι ελαττωματική;

β2) (5 μον) Αν ξέρουμε ότι μια βίδα είναι ελαττωματική, ποια είναι η πιθανότητα να έχει μήκος μεγαλύτερο των 5.5 cm;

Δίνεται ότι για την τυποποιημένη κανονική κατανομή $\Phi(1) = P(Z \le 1) = 0.841$ και $\Phi(2.5) = P(Z \le 2.5) = 0.9938$.

----------------------------- ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !--------------------------------

Σύντομες Ενδεικτικές Λύσεις

Θέμα 1

α) Ο U είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ διότι είναι φανερό ισχύει η κλειστότητα ως προς την πρόσθεση $(x_1,y_1,z_1,w_1)+(x_2,y_2,z_2,w_2)=(x_1,y_1,x_1,y_1)+(x_2,y_2,x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2,x_1+x_2,y_1+y_2)\in U$ και ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό.
$\lambda(x_1,y_1,z_1,w_1)=\lambda(x_1,y_1,x_1,y_1)=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda x_1,\lambda y_1)\in U$.

Το τυχαίο στοιχείο (x,y,z,w) του U γράφεται ως $(x,y,z,w)=(x,y,x,y)=x(1,0,1,0)+y(0,1,0,1)$ όποτε βλέπουμε ότι παράγεται από τα διανύσματα $u_1=(1,0,1,0), u_2=(0,1,0,1)$ τα οποία τα οποία εύκολα βλέπουμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα οπότε αυτά αποτελούν βάση του χώρου και $\dim U=2$. Επίσης αφού τα $v_1=(2,1,2,1), v_2=(1,-2,1,-2)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα έχουμε ότι $\dim V=2$.

β) Θεωρούμε τον πίνακα $A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\2&1&2&1\\1&-2&1&-2\end{pmatrix}$ με γραμμές τις συντεταγμένες των u_1,u_2,v_1,v_2. Με τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών $r_3-2r_1, r_3-r_2, r_4-r_1, r_4+2r_2$ βρίσκουμε την (ανηγμένη) κλιμακωτή μορφή $\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ του A. Σε αυτή υπάρχουν δύο μη μηδενικές γραμμές και άρα $\dim(U+V)=2$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.5.1 του βιβλίου της Γραμμικής Άλγεβρας και το α), έχουμε $\dim U\cap V=\dim U+\dim V-\dim(U+V)=2+2-2=2.$

γ) Από το β) έχουμε $U\cap V\neq\{0\}$ και άρα (Θεώρημα 2.5.2) δεν αληθεύει ότι $\mathbb{R}^4=U\oplus V$.

Θέμα 2

α1) Έστω ότι ο A είναι ορθογώνιος. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.8.1 του βιβλίου της Γραμμικής Άλγεβρας, βλέπουμε ότι το μέτρο της πρώτης γραμμής πρέπει να είναι 1, οπότε $\sqrt{a^2+0+0}=1$, δηλαδή $a=\pm1$. Επίσης, η πρώτη γραμμή πρέπει να είναι κάθετη με τη δεύτερη, οπότε $ab=0$, δηλαδή $b=0$. Αντίστροφα, αν $a=\pm1$, $b=0$ (και θ αυθαίρετο), τότε από το ίδιο Θεώρημα ο A είναι ορθογώνιος.

α2) Επειδή η $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ είναι γραμμική απεικόνιση, η f είναι 1-1 αν και μόνο αν ο πυρήνας της απεικόνισης είναι ο τετριμμένος χώρος $\det A\neq 0$. Έχουμε $\det A=a(-\cos^2\theta-\sin^2\theta)=-a$ και άρα η απάντηση είναι $a\neq0$ (και b,θ αυθαίρετα).

β1) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$\chi_A(x)=\det\left(A-xI\right)=\det\begin{pmatrix}6-x&4\\-8&-6-x\end{pmatrix}=x^2-4=(x-2)(x+2)$ Οπότε οι ιδιοτιμές είναι οι $2,-2$ για τις οποίες βρίσκουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $x\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}-\{0\}$ και $x\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β2) Από το Θεώρημα Cayley-Hamilton (ή με άμεσο υπολογισμό) έχουμε $A^2=4I=2^2I$. Οπότε $A^{2010}=\left(A^2\right)^{1005}=\left(2^2I\right)^{1005}=2^{2010}I$

Θέμα 3

α) Έχουμε $f^{/}(x)=x(2-x)e^{-x}$ και επομένως η f είναι φθίνουσα στο $(-\infty,0]$, αύξουσα στο $[0,2]$ και φθίνουσα στο $[2,+\infty)$.

β) Από το α) έπεται το $(0, f(0)) = (0,0)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f και το $(2, f(2)) = (2, 4e^{-2})$ σημείο τοπικού μεγίστου της f. Επειδή $f(x) = x^2e^{-x} \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το σημείο $(0,0)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου. Είδαμε ότι η f είναι αύξουσα στο $[0,2]$ και φθίνουσα στο $[2,+\infty)$. Άρα για κάθε $x \in [0,+\infty)$, $f(x) \leq f(2)$, δηλαδή $x^2e^{-x} \leq 4e^{-2}$.

γ) Υπολογίζοντας βρίσκουμε $f^{//}(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x} = (x - (2+\sqrt{2}))(x - (2-\sqrt{2}))e^{-x}$ και άρα $f^{//}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}$. Παρατηρούμε ότι αν $x \in (-\infty, 2-\sqrt{2})$ τότε $f(x) > 0$, αν $x \in (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ τότε $f(x) < 0$ και αν $x \in (2+\sqrt{2}, +\infty)$ τότε $f(x) > 0$. Άρα η f έχει δυο σημεία καμπής στα $x = 2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}$.

δ) Έχουμε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $E_a = \int_0^a f(x)dx$. Χρησιμοποιώντας δυο φορές ολοκλήρωση κατά παράγοντες (όπως στην Άσκηση Αυτοαξιολόγησης 2β) σελίδα 157 του βιβλίου του Λογισμού Μιας Μεταβλητής) βρίσκουμε $\int f(x)dx = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + c$ και άρα $E_a = -(a^2 + 2a + 2)e^{-a} + 2$.

Θέμα 4

α) Είναι σαφές ότι η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,0),(0,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και ως πολυώνυμο αντίστοιχα. Άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν είναι συνεχής στο 0, δηλαδή υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$ και $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, ή ισοδύναμα

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0).$$

Έχουμε $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = b.$ Για το άλλο πλευρικό όριο παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2+1} - a}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(\sqrt{x^2+1} - a)(\sqrt{x^2+1} + a)}{x(\sqrt{x^2+1} + a)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 + 1 - a^2}{x(\sqrt{x^2+1} + a)}.$$ Άρα αν $1 - a^2 \neq 0,$ τότε το $\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 + 1 - a^2}{x(\sqrt{x^2+1} + a)}$ δεν υπάρχει. Για $a = 1$, βρίσκουμε

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 + 1 - a^2}{x(\sqrt{x^2+1} + a)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + 1} = 0$$

και για $a = -1$ βρίσκουμε με τον κανόνα L'Hospital

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sqrt{x^2+1} - 1} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}} = -\infty.$$

Συνεπώς αν η f είναι συνεχής στο 0, τότε $a = 1.$ Στην περίπτωση αυτή έχουμε $b = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ όπως είδαμε πριν. Άρα $b = 0.$ Αντίστροφα, αν $a = 1$ και $b = 0$, τότε $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0).$

Μία εναλλακτική λύση είναι η ακόλουθη:

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και ως πολυώνυμο, αντιστοίχως. Άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε και μόνο, εάν είναι συνεχής στο 0, δηλαδή υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$ και $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ ή ισοδυνάμως

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0).$$

Έχουμε $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = b.$ Για το άλλο πλευρικό όριο παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to 0^-}\sqrt{x^2+1}-a=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2+1}-a}{x}\lim_{x\to 0^-}x=b\cdot 0=0\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}\sqrt{x^2+1}=a\Leftrightarrow 1=a.$$ Επομένως,

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+1-1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}=0=b.$$

β) Με το κριτήριο του λόγου στην πρώτη σειρά έχουμε $\dfrac{\dfrac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2 5^{n+1}}}{\dfrac{(2n)!}{(n!)^2 5^n}}=\dfrac{(2n+2)(2n+1)}{5(n+1)^2}\to\dfrac{4}{5}<1$.

Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2 5^n}$ συγκλίνει.

Για τη δεύτερη σειρά παρατηρούμε ότι για κάθε $n\geq 1$, $0<\dfrac{3^n-2}{5^n+2}<\dfrac{3^n}{5^n}$ και η $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{5^n}$ συγκλίνει ως γεωμετρική σειρά με λόγο $\dfrac{3}{5}$ και $-1<\dfrac{3}{5}<1$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n-2}{5^n+2}$ συγκλίνει.

γ) Χρησιμοποιώντας μερικά κλάσματα βρίσκουμε $\dfrac{x-2}{x^2+x-12}=\dfrac{1/7}{x-3}+\dfrac{6/7}{x+4}$ και άρα

$\int\dfrac{x-2}{x^2+x-12}dx=\int\dfrac{1/7}{x-3}dx+\int\dfrac{6/7}{x+4}dx=\dfrac{1}{7}\ln|x-3|+\dfrac{6}{7}\ln|x+4|+c$ και

$\int_0^1\dfrac{x-2}{x^2+x-12}dx=\dfrac{1}{7}\ln 2-\dfrac{1}{7}\ln 3+\dfrac{6}{7}\ln 5-\dfrac{6}{7}\ln 4.$

Θέτοντας $u=x+2$ παίρνουμε

$$\int x^2(x+2)^{\frac{1}{3}}dx=\int(u-2)^2u^{\frac{1}{3}}dx=\int(u^2-4u+4)u^{\frac{1}{3}}dx=\int u^{\frac{7}{3}}du-4\int u^{\frac{4}{3}}du+4\int u^{\frac{1}{3}}du=$$
$$\frac{3}{10}u^{\frac{10}{3}}-4\frac{3}{7}u^{\frac{7}{3}}+3u^{\frac{4}{3}}+c=\frac{3}{10}(x+2)^{\frac{10}{3}}-4\frac{3}{7}(x+2)^{\frac{7}{3}}+3(x+2)^{\frac{4}{3}}+c.$$

Θέμα 5

α1) Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι

Ω = { (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5),
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5),
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5),
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5),
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5) }

α2) Οι ευνοϊκές περιπτώσεις για το ενδεχόμενο Α είναι 5 (με κίτρινο στον Ω) επομένως

P(A) = 5/25 = 1/5,

ενώ αντίστοιχα για το Β έχουμε συνολικά 13 ευνοϊκές περιπτώσεις (κίτρινες και πράσινες στον Ω) και

P(B) = 13/25.

α3) Είναι σαφές από τα προηγούμενα ότι $A\cap B=A$, οπότε

$$P(A\cap B)=\frac{1}{5}$$

ενώ

$$P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{5}\cdot\frac{13}{25}=\frac{13}{125}.$$

Συνεπώς

$$P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$$

και τα ενδεχόμενα Α, Β είναι εξαρτημένα.

β) Έστω X η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το μήκος μιας βίδας. Τότε $X\sim N(5,0.2^2)$.
Αν E είναι το ενδεχόμενο η βίδα να είναι ελαττωματική,

$$P(E)=1-P(E')=1-P(5-0.2\leq X\leq 5+0.2)=1-P(4.8\leq X\leq 5.2)=$$
$$=1-\left[P(X\leq 5.2)-P(X<4.8)\right]=1-\left[P\left(\frac{X-5}{0.2}\leq\frac{5.2-5}{0.2}\right)-P\left(\frac{X-5}{0.2}<\frac{4.8-5}{0.2}\right)\right]$$
$$=1-[\Phi(1)-\Phi(-1)]=1-[\Phi(1)-(1-\Phi(1))]=2-2\bullet\Phi(1)=2-2\bullet 0.8413=0.3174$$

β) Αν A είναι το ενδεχόμενο η βίδα να έχει μήκος μεγαλύτερο των 5.5 cm, ζητάμε την πιθανότητα

$$P(A\,|\,E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{P\left(\{x:x>5.5\}\cap\left[\{x:x<4.8\}\cup\{x:x>5.2\}\right]\right)}{P(E)}=$$
$$=\frac{P\left(\{x:x>5.5\}\right)}{P(E)}=\frac{1-P\left(X\leq 5.5\right)}{P(E)}=\frac{1-P\left(\frac{X-5}{0.2}\leq\frac{5.5-5}{0.2}\right)}{P(E)}=$$
$$=\frac{1-\Phi(2.5)}{P(E)}\simeq\frac{1-0.9938}{P(E)}=\frac{0.0062}{0.3174}=0.0195.$$