ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)**

# ΕΡΓΑΣΙΑ 1η

**Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: 20 Οκτωβρίου 2008**

**Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 21 Νοεμβρίου 2008.**

Πριν από την λύση κάθε άσκησης καλό είναι να μελετούνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις των υποδείξεων και παραπομπών στα συγγράμματα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι Ασκήσεις της πρώτης εργασίας αναφέρονται στα:

**Κεφάλαια 1**, (Πίνακες, Ορίζουσες, Γραμμικά Συστήματα) και
**Κεφάλαιο 2**, (Διανυσματικοί Χώροι)
του συγγράμματος του ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα» των Μ. Χατζηνικολάου και Γρ. Καμβύσα.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα συμβουλευθείτε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στη http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm ως εξής:

**Ε**ναλλακτικό **Δ**ιδακτικό **Υ**λικό:
Κεφ2 Γραμμικά Συστήματα, Κεφ3 Πίνακες και Γραμμικά Συστήματα, Κεφ4Ορίζουσες, Κεφ5 Οι χώροιR^n , Κεφ6 Διανυσματικοί χώροι και Κεφ7 Βάση και Διάσταση.

**Σ**υνοδευτικό **Ε**κπαιδευτικό **Υ**λικό:
Πίνακες, Οι Χώροι R^n, Διανυσματικοί Χώροι.

Στόχοι:

Εμπέδωση της μεθόδου απαλοιφής Gauss για την λύση (και διερεύνηση) γραμμικών συστημάτων (έμφαση στους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών πινάκων και την αντίστοιχη **αλγοριθμική** μέθοδο απαλοιφής Gauss με την οποία επιλύονται γραμμικά συστήματα και προβλήματα της Γραμμικής Άλγεβρας που ανάγονται σε αυτά). Υπολογισμός ορίζουσας. Κριτήριο αντιστρεψιμότητας πίνακα και εύρεση αντιστρόφου με δύο μεθόδους. Διανυσματικοί χώροι-υπόχωροι, γραμμική θήκη, βάσεις.

**1.** (**Μονάδες 10**)

**i) (5 μονάδες)** Έστω $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της επαγωγής, να αποδείξετε ότι,

$$A^n = \frac{3^n - 1}{2}A + \frac{3 - 3^n}{2}I$$

για κάθε φυσικό αριθμό *n*.

**ii) (5 μονάδες)** Με τις ιδιότητες των οριζουσών, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό $k$, έτσι ώστε

$$\det\begin{bmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ 3b_1 + 5c_1 & 3b_2 + 5c_2 & 3b_3 + 5c_3 \\ 7c_1 & 7c_2 & 7c_3 \end{bmatrix} = k\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

<u>Υπόδειξη:</u> Για την μέθοδο απόδειξης με επαγωγή μπορείτε να συμβουλευτείτε στο ΕΔΥ_Κεφ 1, σελ. 10 και στο ΣΕΥ_Κεφ Πίνακες, σελ. 18.

**<u>ΛΥΣΗ:</u> i)** Για $n = 1$, η δοθείσα ισχύει, καθώς έχουμε $\frac{3^1 - 1}{2}A + \frac{3 - 3^1}{2}I = A$.

Δεχόμαστε ότι ισχύει για το φυσικό αριθμό $k$, δηλαδή,

$$A^k = \frac{3^k - 1}{2}A + \frac{3 - 3^k}{2}I. \qquad (1)$$

Τότε

$$A^{k+1} = A^k A = \left(\frac{3^k - 1}{2}A + \frac{3 - 3^k}{2}I\right)A = \frac{3^k - 1}{2}A^2 + \frac{3 - 3^k}{2}A. \qquad (2)$$

Επειδή στην παραπάνω σχέση εμφανίζεται ο $A^2$ αποδεικνύουμε ότι η σχέση (1) ισχύει για k=2.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 16 \\ -8 & -7 \end{bmatrix} = 4A - 3I,$$

Έτσι, μετά από αντικατάσταση στην (2) έχουμε

$$A^{k+1} = \frac{3^k - 1}{2}(4A - 3I) + \frac{3 - 3^k}{2}A = \frac{4 \cdot 3^k - 4 + 3 - 3^k}{2}A + \frac{3 - 3^{k+1}}{2}I$$
$$= \frac{3^{k+1} - 1}{2}A + \frac{3 - 3^{k+1}}{2}I,$$

δηλαδή, η σχέση ισχύει και για $k + 1$. Άρα ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό *n*.

**ii)**

Χρησιμοποιούμε τις επόμενες ιδιότητες οριζουσών:

Αν πολλαπλασιάσουμε μία γραμμή του πίνακα Α με έναν αριθμό λ τότε ο πίνακας που προκύπτει έχει ορίζουσα λdet(A):

$$\det\begin{bmatrix}\lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix} = \lambda\det\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix},$$

$$\det\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ \lambda b_1 & \lambda b_2 & \lambda b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix} = \lambda\det\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix},$$

$$\det\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ \lambda c_1 & \lambda c_2 & \lambda c_3\end{bmatrix} = \lambda\det\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}$$

Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί μεταξύ των γραμμών ενός πίνακα δεν μεταβάλλουν την τιμή της ορίζουσα.

Έτσι, αν πολλαπλασιάσουμε μία γραμμή ενός πίνακα με έναν αριθμό και την προσθέσουμε σε μία άλλη, η ορίζουσα του πίνακα παραμένει αμετάβλητη.

(Βλ. Βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, Παράγραφος 1.3, σελ. 29)

Έτσι έχουμε:

$$\det\begin{bmatrix}2a_1 & 2a_2 & 2a_3\\ 3b_1+5c_1 & 3b_2+5c_2 & 3b_3+5c_3\\ 7c_1 & 7c_2 & 7c_3\end{bmatrix} = 2\cdot\det\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ 3b_1+5c_1 & 3b_2+5c_2 & 3b_3+5c_3\\ 7c_1 & 7c_2 & 7c_3\end{bmatrix}$$

$$= 2\cdot 7\cdot\det\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ 3b_1+5c_1 & 3b_2+5c_2 & 3b_3+5c_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας, τώρα, την τελευταία γραμμή της ορίζουσας επί -5 και προσθέτοντάς στην 2η έχουμε ότι η αρχική ορίζουσα είναι ίση με:

$$2\cdot 7\cdot\det\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ 3b_1+5c_1-5c_1 & 3b_2+5c_2-5c_2 & 3b_3+5c_3-5c_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix} = 2\cdot 7\cdot\det\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}$$

$$= 2\cdot 7\cdot 3\cdot\det\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix} = 42\cdot\det\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}$$

Δεδομένου ότι το αποτέλεσμα πρέπει από την υπόθεση να είναι ίσο με

$$k\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$, συμπεραίνουμε ότι k=42, υπό την προϋπόθεση ότι η ορίζουσα $$\det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$ είναι μη μηδενική.

**2.** (**Μονάδες 15**)

Αν $A, B$ είναι $2\times 2$ πίνακες με πραγματικά στοιχεία για τους οποίους ισχύουν

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad BA = \begin{bmatrix} a & 14 \\ 14 & b \end{bmatrix}$$

να βρείτε:

**i)** (**5 μονάδες**) τους αγνώστους $a,b$ $(a,b\in\mathbb{R})$.

**ii)** (**10 μονάδες**) τον πίνακα $A$.

<u>Υπόδειξη:</u> Για το πρώτο ερώτημα, να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες των οριζουσών (σελ. 29 του βιβλίου) καθώς και του ίχνους πίνακα (σελ. 19 του βιβλίου). Για το δεύτερο ερώτημα βρείτε τη μορφή που έχει το γινόμενο $ABA$ και αντικαταστήστε καθεμία από τις σχέσεις που ισχύουν για τους δύο πίνακες. Λύστε ως προς τα στοιχεία του πίνακα $A$ για τις τιμές που βρήκατε στο πρώτο ερώτημα.

<u>**ΛΥΣΗ :**</u> **i)** Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \det(AB)=4 \\ \det(BA)=ab-196 \end{array}\right\} \Rightarrow ab=200 \qquad \text{και} \qquad \left.\begin{array}{l} tr(AB)=30 \\ tr(BA)=a+b \end{array}\right\} \Rightarrow a+b=30.$$

Λύνοντας το σύστημα

$$\begin{array}{l} a+b=30 \\ ab=200 \end{array}$$

βρίσκουμε

$$a=10,\ b=20 \quad \text{ή} \quad a=20,\ b=10.$$

**ii)** Έστω $A=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$.

Επειδή

$$ABA = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix} A = A \begin{bmatrix} a & 14 \\ 14 & b \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

- αν θέσουμε στην (1) $a=10,\ b=20$, έχουμε το ομογενές σύστημα :

$$\left.\begin{array}{l} 5c_1+14c_2-11c_3 \qquad\quad =0 \\ 14c_1+15c_2 \qquad -11c_4=0 \\ 11c_1 \qquad +15c_3-14c_4=0 \\ \qquad 11c_2-14c_3 \quad +5c_4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_3=\dfrac{1}{11}(5c_1+14c_2) \\ c_4=\dfrac{1}{11}(14c_1+15c_2) \end{array} \tag{2}$$

από όπου

$$A=c_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5/11 & 14/11 \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 14/11 & 15/11 \end{bmatrix}=\tilde{c}_1\begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 5 & 14 \end{bmatrix}+\tilde{c}_2\begin{bmatrix} 0 & 11 \\ 14 & 15 \end{bmatrix},\ \tilde{c}_1,\tilde{c}_2\in\mathbb{R}.$$

Επιπλέον στο (i) ερώτημα υπολογίστηκε $\det(AB)=4\Rightarrow \det A\neq 0$ και $\det B\neq 0$. Επομένως για τον

$$A=\begin{bmatrix} 11\tilde{c}_1 & 11\tilde{c}_2 \\ 5\tilde{c}_1+14\tilde{c}_2 & 14\tilde{c}_1+15\tilde{c}_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

πρέπει να επαληθεύεται και η συνθήκη

$$\det A=11\tilde{c}_1(14\tilde{c}_1+15\tilde{c}_2)-11\tilde{c}_2(5\tilde{c}_1+14\tilde{c}_2)\neq 0\Rightarrow 7\tilde{c}_1^2+5\tilde{c}_1\tilde{c}_2-7\tilde{c}_2^2\neq 0.$$

Λύνοντας το παραπάνω τριώνυμο βρίσκουμε $\Delta=221\tilde{c}_2^2>0$ και

$$\tilde{c}_1\neq\frac{-5\tilde{c}_2\pm\sqrt{221}\,|\tilde{c}_2|}{14}=\frac{-5\tilde{c}_2\pm\sqrt{221}\ \tilde{c}_2}{14}.$$

Άρα, από την (3) οι ζητούμενοι πίνακες είναι

$$A=\begin{bmatrix} 11\tilde{c}_1 & 11\tilde{c}_2 \\ 5\tilde{c}_1+14\tilde{c}_2 & 14\tilde{c}_1+15\tilde{c}_2 \end{bmatrix},\ \text{όταν } \tilde{c}_1\neq\frac{-5\pm\sqrt{221}}{14}\tilde{c}_2,\ \tilde{c}_2\in\mathbb{R}.$$

- Για $a=20,\ b=10$ με αντικατάσταση στην (1) έχουμε το ομογενές σύστημα :

$$\left.\begin{array}{l} 15c_1+14c_2-11c_3 \qquad\quad =0 \\ 14c_1+5c_2 \qquad -11c_4=0 \\ 11c_1 \qquad +5c_3-14c_4=0 \\ \qquad 11c_2-14c_3+15c_4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_3=\dfrac{1}{11}(15c_1+14c_2) \\ c_4=\dfrac{1}{11}(14c_1+5c_2) \end{array} \tag{4}$$

από όπου

$$A=\tilde{c}_1\begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}+\tilde{c}_2\begin{bmatrix} 0 & 11 \\ 14 & 5 \end{bmatrix},\quad \tilde{c}_1,\tilde{c}_2\in\mathbb{R}. \tag{5}$$

Επειδή πρέπει ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} 11\tilde{c}_1 & 11\tilde{c}_2 \\ 15\tilde{c}_1+14\tilde{c}_2 & 14\tilde{c}_1+5\tilde{c}_2 \end{bmatrix}$ να είναι αντιστρέψιμος, πρέπει να ισχύει

$$\det A=11\tilde{c}_1(14\tilde{c}_1+5\tilde{c}_2)-11\tilde{c}_2(15\tilde{c}_1+14\tilde{c}_2)\neq 0\Rightarrow 7\tilde{c}_1^2-5\tilde{c}_1\tilde{c}_2-7\tilde{c}_2^2\neq 0.$$

Λύνοντας το παραπάνω τριώνυμο βρίσκουμε $\Delta = 221\tilde{c}_2^2 > 0$ και

$$\tilde{c}_1 \neq \frac{5 \pm \sqrt{221}}{14}\tilde{c}_2 .$$

Άρα, από την (5) οι ζητούμενοι πίνακες είναι

$$A = \begin{bmatrix} 11\tilde{c}_1 & 11\tilde{c}_2 \\ 15\tilde{c}_1 + 14\tilde{c}_2 & 14\tilde{c}_1 + 5\tilde{c}_2 \end{bmatrix}, \quad \text{όταν } \tilde{c}_1 \neq \frac{5 \pm \sqrt{221}}{14}\tilde{c}_2 ,\ \tilde{c}_2 \in \mathbb{R} .$$

Παρατήρηση : Τα ομογενή συστήματα (2), (4) τα επιλύουμε με τον αλγόριθμο του Gauss ή λύνουμε τις δύο πρώτες εξισώσεις ως προς $c_3, c_4$ και αντικαθιστώντας στις άλλες δύο εξισώσεις διαπιστώνουμε ότι επαληθεύονται.

Εναλλακτικά παρατίθεται η παρακάτω λύση:

**ii)** Έστω ότι ο πίνακας Α είναι της μορφής $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$.

Γνωρίζουμε από σχετική ιδιότητα ότι ισχύει $\boldsymbol{(AB)A = A(BA)}$.

$$\boldsymbol{(AB)A} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{5x + 11z} & \boldsymbol{5y + 11w} \\ \boldsymbol{11x + 25z} & \boldsymbol{11y + 25w} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\boldsymbol{A(BA)} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 14 \\ 14 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{ax + 14y} & \boldsymbol{14x + by} \\ \boldsymbol{az + 14w} & \boldsymbol{14z + bw} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Εξισώνοντας τις (1), (2) έχουμε: $\begin{pmatrix} 5x + 11z & 5y + 11w \\ 11x + 25z & 11y + 25w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + 14y & 14x + by \\ az + 14w & 14z + bw \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x + 11z = ax + 14y \\ 5y + 11w = 14x + by \\ 11x + 25z = az + 14w \\ 11y + 25w = 14z + bw \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-5)x + 14y - 11z + 0w = 0 \\ 14x + (b-5)y + 0z - 11w = 0 \\ 11x + 0y + (25-a)z - 14w = 0 \\ 0x + 11y - 14z + (25-b)w = 0 \end{cases}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του παραπάνω ομογενούς συστήματος είναι ο εξής:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a-5 & 14 & -11 & 0 & 0 \\ 14 & b-5 & 0 & -11 & 0 \\ 11 & 0 & 25-a & -14 & 0 \\ 0 & 11 & -14 & 25-b & 0 \end{array}\right) (3)$$

α) Για $\begin{cases} \boldsymbol{a}=\mathbf{20} \\ \boldsymbol{b}=\mathbf{10} \end{cases}$, ο πίνακας (3) γίνεται:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 15 & 14 & -11 & 0 & 0 \\ 14 & 5 & 0 & -11 & 0 \\ 11 & 0 & 5 & -14 & 0 \\ 0 & 11 & -14 & 15 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \to \frac{1}{15} r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{14}{15} & -\frac{11}{15} & 0 & 0 \\ 14 & 5 & 0 & -11 & 0 \\ 11 & 0 & 5 & -14 & 0 \\ 0 & 11 & -14 & 15 & 0 \end{array}\right) \underset{r_3 \to r_3 - 11 r_1}{\xrightarrow{r_2 \to r_2 - 14 r_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{14}{15} & -\frac{11}{15} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{121}{15} & \frac{154}{15} & -11 & 0 \\ 0 & -\frac{154}{15} & \frac{196}{15} & -14 & 0 \\ 0 & 11 & -14 & 15 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to -\frac{15}{121} r_2}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{14}{15} & -\frac{11}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{14}{11} & \frac{15}{11} & 0 \\ 0 & -\frac{154}{15} & \frac{196}{15} & -14 & 0 \\ 0 & 11 & -14 & 15 & 0 \end{array}\right) \underset{r_4 \to r_4 - 11 r_2}{\xrightarrow{r_3 \to r_3 + \frac{154}{15} r_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{14}{15} & -\frac{11}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{14}{11} & \frac{15}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \to r_1 - \frac{14}{15} r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{11} & -\frac{14}{11} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{14}{11} & \frac{15}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Οπότε προκύπτει $\begin{cases} x=-\frac{5}{11}\lambda_1+\frac{14}{11}\lambda_2 \\ y=\frac{14}{11}\lambda_1-\frac{15}{11}\lambda_2 \\ z=\lambda_1 \\ w=\lambda_2 \end{cases}$, όπου $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Τελικά, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{11}}\lambda_1+\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{11}}\lambda_2 & \frac{\mathbf{14}}{\mathbf{11}}\lambda_1-\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{11}}\lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}=\lambda_1\cdot\begin{pmatrix} -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{11}} & \frac{\mathbf{14}}{\mathbf{11}} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}+\lambda_2\cdot\begin{pmatrix} \frac{\mathbf{14}}{\mathbf{11}} & -\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{11}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$,

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Επιπλέον, αφού $\det(AB)=\det A\cdot\det B$ με $\det(AB)=4\neq 0$, θα πρέπει $\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}\neq\mathbf{0}$ και $\det B\neq 0$. Δηλαδή υπάρχει ένας <u>περιορισμός</u> για τα $\lambda_1, \lambda_2$. Έχουμε ότι:

$$\det A=\begin{vmatrix} -\frac{5}{11}\lambda_1+\frac{14}{11}\lambda_2 & \frac{14}{11}\lambda_1-\frac{15}{11}\lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix}=\left(-\frac{5}{11}\lambda_1+\frac{14}{11}\lambda_2\right)\cdot\lambda_2-\lambda_1\cdot\left(\frac{14}{11}\lambda_1-\frac{15}{11}\lambda_2\right)=$$

$=\frac{14}{11}\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)-\frac{10}{11}\lambda_1\lambda_2$ . Πρέπει, λοιπόν, $\mathbf{14}\left(\boldsymbol{\lambda}_2^2-\boldsymbol{\lambda}_1^2\right)-\mathbf{10}\boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{\lambda}_2\neq\mathbf{0}$

β) Για $\begin{cases} \boldsymbol{a} = \mathbf{10} \\ \boldsymbol{b} = \mathbf{20} \end{cases}$, ο πίνακας (3) γίνεται:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 14 & -11 & 0 & 0 \\ 14 & 15 & 0 & -11 & 0 \\ 11 & 0 & 15 & -14 & 0 \\ 0 & 11 & -14 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \to \frac{1}{5} r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{14}{5} & -\frac{11}{5} & 0 & 0 \\ 14 & 15 & 0 & -11 & 0 \\ 11 & 0 & 15 & -14 & 0 \\ 0 & 11 & -14 & 5 & 0 \end{array}\right) \underset{r_3 \to r_3 - 11 r_1}{\xrightarrow{r_2 \to r_2 - 14 r_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{14}{5} & -\frac{11}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{121}{5} & \frac{154}{5} & -11 & 0 \\ 0 & -\frac{154}{5} & \frac{196}{5} & -14 & 0 \\ 0 & 11 & -14 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to -\frac{5}{121} r_2}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{14}{5} & -\frac{11}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{14}{11} & \frac{5}{11} & 0 \\ 0 & -\frac{154}{5} & \frac{196}{5} & -14 & 0 \\ 0 & 11 & -14 & 5 & 0 \end{array}\right) \underset{r_4 \to r_4 - 11 r_2}{\xrightarrow{r_3 \to r_3 + \frac{154}{5} r_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{14}{5} & -\frac{11}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{14}{11} & \frac{5}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \to r_1 - \frac{14}{5} r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{15}{11} & -\frac{14}{11} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{14}{11} & \frac{5}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Οπότε προκύπτει, $\begin{cases} x = -\frac{15}{11}\lambda_1 + \frac{14}{11}\lambda_2 \\ y = \frac{14}{11}\lambda_1 - \frac{5}{11}\lambda_2 \\ z = \lambda_1 \\ w = \lambda_2 \end{cases}$, όπου $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Τελικά, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{11}}\lambda_1 + \frac{\mathbf{14}}{\mathbf{11}}\lambda_2 & \frac{\mathbf{14}}{\mathbf{11}}\lambda_1 - \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{11}}\lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{11}} & \frac{\mathbf{14}}{\mathbf{11}} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{14}}{\mathbf{11}} & -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{11}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$,
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Ομοίως με την περίπτωση α), θα έχουμε <u>περιορισμό</u> για τα $\lambda_1, \lambda_2$. Πρέπει
$\mathbf{det}\,\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0} \Rightarrow$

$$\det A = \begin{vmatrix} -\frac{15}{11}\lambda_1 + \frac{14}{11}\lambda_2 & \frac{14}{11}\lambda_1 - \frac{5}{11}\lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \left(-\frac{15}{11}\lambda_1 + \frac{14}{11}\lambda_2\right) \cdot \lambda_2 - \lambda_1 \cdot \left(\frac{14}{11}\lambda_1 - \frac{5}{11}\lambda_2\right) =$$

$= \frac{14}{11}\left(\lambda_2^2 - \lambda_1^2\right) - \frac{10}{11}\lambda_1\lambda_2$. Πρέπει, λοιπόν, $\mathbf{14}\left(\boldsymbol{\lambda_2^2} - \boldsymbol{\lambda_1^2}\right) - \mathbf{10}\boldsymbol{\lambda_1\lambda_2} \neq \mathbf{0}$.

**3.** (**Μονάδες 20**) Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**i)** (**5 μονάδες**) Είναι ο πίνακας $A$ αντιστρέψιμος;

**ii)** (**5 μονάδες**) Να υπολογιστούν : ο πίνακας $B = AA^T$ και η ορίζουσα του πίνακα

$$\lambda I_3 - B.$$

**iii)** (**5 μονάδες**) Να υπολογιστεί ο πίνακας

$$A^+ = -\frac{1}{b_2} A^T (B + b_1 I_3),$$

όπου $b_1, b_2$ είναι οι συντελεστές των $\lambda^2$ και $\lambda$ του πολυωνύμου $\det(\lambda I_3 - B)$.

**iv)** (**5 μονάδες**) Να αποδείξετε ότι ο πίνακας $A^+$ επαληθεύει τις ισότητες:

$$AA^+A = A \quad \text{και} \quad (A^+A)^T = A^+A.$$

<u>**ΛΥΣΗ :**</u> **i)** Ο πίνακας $A$ δεν είναι αντιστρέψιμος, διότι

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 - 1 \cdot (1-1) + 1 - 3 = 0.$$

Εναλλακτικά μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αφού ο Α έχει την πρώτη και την τρίτη γραμμή (ή στήλη) ίδιες η ορίζουσα είναι μηδέν.

**ii)** Επειδή ο πίνακας $A$ είναι συμμετρικός, ισχύει $A = A^T$, οπότε έχουμε

$$B = AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 5 & 11 & 5 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix},$$

και

$$\det(\lambda I_3 - B) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -5 & -3 \\ -5 & \lambda - 11 & -5 \\ -3 & -5 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda - 3) \begin{vmatrix} \lambda - 11 & -5 \\ -5 & \lambda - 3 \end{vmatrix} - (-5) \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ -3 & \lambda - 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -5 & \lambda - 11 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 - 17\lambda^2 + 16\lambda.$$

**iii)** Από το ii) έχουμε $b_1 = -17$ και $b_2 = 16$ και κάνοντας αντικατάσταση τους πίνακες $A, B$ έχουμε :

$$A^{+}=-\frac{1}{b_2}A^T(B+b_1I_3)=-\frac{1}{16}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-14&5&3\\5&-6&5\\3&5&-14\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{16}\begin{bmatrix}-6&4&-6\\4&-8&4\\-6&4&-6\end{bmatrix}=-\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-3&2&-3\\2&-4&2\\-3&2&-3\end{bmatrix}.$$

**iv)** Με αντικατάσταση του πίνακα $A^{+}$ από το iii) έχουμε :

$$AA^{+}A=-\frac{1}{8}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&2&-3\\2&-4&2\\-3&2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{bmatrix}=-\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-8&-8&-8\\-8&-24&-8\\-8&-8&-8\end{bmatrix}=A.$$

Επίσης

$$A^{+}A=-\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-3&2&-3\\2&-4&2\\-3&2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{bmatrix}=-\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-4&0&-4\\0&-8&0\\-4&0&-4\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

Από όπου βλέπουμε ότι ο πίνακας $A^{+}A$ είναι συμμετρικός οπότε ισχύει $(A^{+}A)^T=A^{+}A$.

Εναλλακτικά χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ανάστροφων πινάκων (βλ. βιβλίο, σελ. 17) βρίσκουμε ότι ο $B$ είναι συμμετρικός πίνακας, διότι

$$B^T=(AA^T)^T=\left(A^T\right)^T A^T=AA^T=B$$

Στο ίδιο συμπέρασμα φθάνουμε και πιο απλά από τη μορφή του $B$ που έχουμε υπολογίσει στο ερώτημα ii) παραπάνω.

Ακόμη ισχύει

$$(A^{+})^T=\left(-\frac{1}{b_2}A^T(B+b_1I_3)\right)^T=-\frac{1}{b_2}(B+b_1I_3)^T\left(A^T\right)^T=-\frac{1}{b_2}(B^T+b_1I_3)A=-\frac{1}{b_2}(B+b_1I_3)A$$

Οπότε

$$(A^{+}A)^T=A^T(A^{+})^T=A^T\left(-\frac{1}{b_2}(B+b_1I_3)A\right)=-\frac{1}{b_2}A^T(B+b_1I_3)A=A^{+}A.$$

## 4. (**Μονάδες 30**)

**i)** (**10 μονάδες**) Αν $A=\begin{bmatrix}1&-2&1\\2&-1&0\\-1&1&2\end{bmatrix}$, βρείτε έναν πίνακα $X$ έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα:

$$A^TXA=I_3.$$

**ii)** **a)** (**5 μονάδες**) Αν $abc \neq 0$ $(a,b,c \in \mathbb{R})$, να λύσετε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} cy + bz &= abc \\ cx + az &= abc \\ bx + ay &= abc \end{aligned}$$

**b)** (**5 μονάδες**) Αν $a = 0$ και $b, c \neq 0$, ποια είναι η λύση του παραπάνω συστήματος;

**iii)** (**10 μονάδες**) Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα επόμενα διανύσματα

$$(1,\, 1,\, a),\ (2,\, 0,\, 3),\ (3,\, -1,\, 1)$$

αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}^3$. Για τις τιμές του $a$ που βρήκατε πριν, να εκφράσετε το διάνυσμα $(1,\, 0,\, 1)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων

$$(1,\, 1,\, a),\ (2,\, 0,\, 3),\ (3,\, -1,\, 1).$$

<u>Υπόδειξη:</u> Για το πρώτο ερώτημα λύστε τη σχέση ως προς τον πίνακα $X$ και χρησιμοποιήσετε την ιδιότητα του αντιστρόφου γινομένου πινάκων (σελ. 23 του βιβλίου). Για το ερώτημα 4ii a) μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο επίλυσης συστημάτων Cramer (σελ. 31 του βιβλίου).

<u>**ΛΥΣΗ :**</u> **i)** Χρησιμοποιώντας ιδιότητες οριζουσών υπολογίζουμε ότι

$$\det A = \det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{bmatrix} = 7 \neq 0,$$

συνεπώς ο πίνακας $A$ είναι αντιστρέψιμος (βλ. βιβλίο, σελ. 31). Επιπλέον, εφαρμόζοντας και τις ιδιότητες των αντιστρόφων πινάκων (βλ. βιβλίο, σελ. 23-24) η δοσμένη ισότητα γράφεται:

$$A^T X A = I_3 \Leftrightarrow X = (A^T)^{-1} I_3 A^{-1} = (AA^T)^{-1}.$$

Ο πίνακας

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

έχει $\det(AA^T) = 49$ και από τον τύπο του προσαρτημένου πίνακα (βλ. βιβλίο, σελ. 31 και ΕΔΥ_Κεφ. 4, σελ. 4-5) ή με τη μέθοδο σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα $\begin{bmatrix} AA^T & I \end{bmatrix}$ (βλ. ΕΔΥ_Κεφ. 3, σελ. 14), βρίσκουμε

$$X = (AA^T)^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

**ii) (a)** Η λύση του συστήματος είναι μοναδική, διότι

$$\det\begin{bmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{bmatrix} = 2abc \neq 0,$$

(βλ. βιβλίο, σελ. 31) και τότε

$$x = \frac{\det\begin{bmatrix} abc & c & b \\ abc & 0 & a \\ abc & a & 0 \end{bmatrix}}{2abc} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 1 & 0 & a \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(ab + ac - a^2) = \frac{a}{2}(b + c - a),$$

$$y = \frac{\det\begin{bmatrix} 0 & abc & b \\ c & abc & a \\ b & abc & 0 \end{bmatrix}}{2abc} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & b \\ c & 1 & a \\ b & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{b}{2}(a + c - b),$$

$$z = \frac{\det\begin{bmatrix} 0 & c & abc \\ c & 0 & abc \\ b & a & abc \end{bmatrix}}{2abc} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & c & 1 \\ c & 0 & 1 \\ b & a & 1 \end{vmatrix} = \frac{c}{2}(a + b - c).$$

**ii) (b)** Για $a = 0$, $b, c \neq 0$, από τις εξισώσεις του συστήματος έχουμε ότι

$$cy + bz = 0 \quad \text{και} \quad x = 0.$$

Το σύνολο των λύσεων είναι τα διανύσματα

$$(x, y, z) = (0, y, -\frac{c}{b}y) = t(0, b, -c), \ \ t \in \mathbb{R} \ \text{ή} \ t \in \mathbb{C}.$$

**iii)** Τα διανύσματα είναι βάση του $\mathbb{R}^3$ αν και μόνο αν

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 10 - 2a \neq 0,$$

δηλαδή, $a \neq 5$.

Από την ισότητα

$$(1,0,1) = k(1,1,a) + \lambda(2,0,3) + \mu(3,-1,1)$$

Από όπου προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} k+2\lambda+3\mu&=1\\ k\qquad\ -\mu&=0\\ ak+3\lambda+\mu&=1 \end{aligned}$$

Για τη λύση του συστήματος μπορούμε να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο του Gauss, ως ακολούθως:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ a & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 4 & 1\\ 0 & 3-2a & 1-3a & 1-a \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1/2\\ 0 & 3-2a & 1-3a & 1-a \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1/2\\ 0 & 0 & a-5 & -1/2 \end{array}\right].$$

Το σύστημα που αντιστοιχεί στον τελευταίο επαυξημένο πίνακα το λύνουμε με προς τα πίσω αντικατάσταση.

$$\left.\begin{aligned} k+2\lambda+3\mu&=1\\ \lambda-2\mu&=1/2\\ (a-5)\mu&=1/2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} k+2\lambda+3\mu&=1\\ \lambda=2\mu+1/2&=\frac{a-3}{2(a-5)}\\ \mu&=-\frac{1}{2(a-5)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} k&=1-2\lambda-3\mu=-\frac{1}{2(a-5)}\\ \lambda&=\frac{a-3}{2(a-5)}\\ \mu&=-\frac{1}{2(a-5)} \end{aligned}$$

5. (**Μονάδες 25**)

**i)** (**5 Μονάδες**) Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

a) $U=\left\{(x,y,z)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^3:\ \ 7x+4y+8z=-2\right\}$

b) $V=\left\{(x,y,z)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^3:\ \ 7x+4y+8z=0\right\}$.

**ii)** Έστω οι διανυσματικοί υπόχωροι $W_1, W_2$ του $\mathbb{R}^4$ που ορίζονται από τα σύνολα:

$$W_1=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4\ :\ \ x_2-2x_3+2x_4=0\right\}$$
$$W_2=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4\ :\ \ 2x_3+x_4=0\right\}$$

a) (**5 μονάδες**) Να βρείτε μία βάση του υπόχωρου $W_1\cap W_2$ .

b) (**10 μονάδες**) Να υπολογίσετε τη διάσταση των υπόχωρων $W_1$, $W_2$, $W_1\cap W_2$, $W_1+W_2$.

c) (**5 μονάδες**) Δικαιολογήστε γιατί ο $\mathbb{R}^4$ δεν είναι το ευθύ άθροισμα των $W_1$, $W_2$. Δείξτε ότι για τον $\Delta = span\{(0,0,0,1)\}$ ισχύει $\mathbb{R}^4 = W_2 \oplus \Delta$.

Υπόδειξη: Μπορείτε να συμβουλευθείτε από το ΕΔΥ τις λυμένες ασκήσεις 1, 16 Κεφ.6 και άσκηση 14 Κεφ. 7.

**ΛΥΣΗ :** **i) a)** Το $U$ **δεν** είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, γιατί δεν περιέχει το $(0,0,0)$.

**b)** Το $V$ **είναι** υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Πράγματι, επειδή το $(0,0,0) \in V$, το $V \neq \varnothing$, οπότε χρησιμοποιώντας το θεώρημα 2.3.1, στο βιβλίο, σελ. 81, έχουμε ότι για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ και $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in V$ ισχύουν

$$\lambda_1(x_1, y_1, z_1) + \lambda_2(x_2, y_2, z_2) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2,\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)$$

και

$$\begin{aligned} 7(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + 4(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + 8(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) &= \\ \lambda_1(7x_1 + 4y_1 + 8z_1) + \lambda_2(7x_2 + 4y_2 + 8z_2) &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Άρα $\lambda_1(x_1, y_1, z_1) + \lambda_2(x_2, y_2, z_2) \in V$.

**ii) a)** Έστω

$$W_1 \cap W_2 = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ :\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \ \text{ και } \ 2x_3 + x_4 = 0\right\}.$$

Λύνοντας το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_2 &= 6x_3 \\ x_4 &= -2x_3 \end{aligned}$$

μπορούμε να γράψουμε

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, 6x_3, x_3, -2x_3) = x_1(1,0,0,0) + x_3(0,6,1,-2),$$

άρα $W_1 \cap W_2 = span\left\{(1,0,0,0), (0, 6, 1, -2)\right\}$.

Μία βάση του $W_1 \cap W_2$ είναι $\left\{(1,0,0,0), (0, 6, 1, -2)\right\}$ αφού τα διανύσματα (1,0,0,0) και (0,6,1,-2) είναι γραμμικά ανεξάρτητα, όπως αποδεικνύεται πολύ εύκολα.

**b)** Για τον υπόχωρο $W_1$ και από την ιδιότητα που πρέπει να ικανοποιούν οι συντεταγμένες κάθε στοιχείου του μπορούμε να γράψουμε

$$x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 2x_3 - 2x_4,$$

οπότε ο υπόχωρος

$$\begin{aligned}
W_1 &= \left\{ (x_1\,,\,x_2\,,\,x_3\,,\,x_4) \in \mathbb{R}^4 \;:\; x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \right\} \\
&= \left\{ (x_1,\, 2x_3 - 2x_4,\, x_3,\, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;:\; x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ x_1(1,0,0,0) + x_3(0,2,1,0) + x_4(0,-2,0,1) : \;\; x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= span\{(1,0,0,0),\;\; (0,2,1,0),\;\; (0,-2,0,1)\}.
\end{aligned}$$

Επιπλέον, τα διανύσματα $(1,0,0,0)$, $(0,2,1,0)$, $(0,-2,0,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι, αν $k,l,m \in \mathbb{R}$ με

$$k(1,0,0,0) + l(0,2,1,0), + m(0,-2,0,1) = (0,0,0,0)$$

το σύστημα

$$\begin{aligned}
&k = 0 \\
&2l - 2m = 0 \\
&l = 0 \\
&m = 0
\end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση $k = l = m = 0$.

Άρα, μία βάση του $W_1$ είναι $\{(1,0,0,0),\;\; (0,2,1,0),\;\; (0,-2,0,1)\}$ με $\dim W_1 = 3$.
Όμοια αποδεικνύεται ότι ο υπόχωρος

$$\begin{aligned}
W_2 &= \left\{ (x_1\,,\,x_2\,,\,x_3\,,\,x_4) \in \mathbb{R}^4 \;:\; 2x_3 + x_4 = 0 \right\} \\
&= \left\{ (x_1,\, x_2,\, x_3,\, -2x_3) \in \mathbb{R}^4 \;:\; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ x_1(1,0,0,0) + x_2(0,1,0,0) + x_3(0,0,1,-2) : \;\; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= span\{(1,0,0,0),\;\; (0,1,0,0),\;\; (0,0,1,-2)\}.
\end{aligned}$$

και ότι τα διανύσματα $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,-2)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άρα, $\dim W_2 = 3$.

Στο προηγούμενο ερώτημα iii) b) βρέθηκε ότι μία βάση του $W_1 \cap W_2$ είναι $\left\{(1,0,0,0),\, (0,\,6,\,1,-2)\right\}$, συνεπώς $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$.

Για το άθροισμα $W_1 + W_2$ εφαρμόζουμε το θεώρημα των διαστάσεων (βλ. βιβλίο, θεώρημα 2.5.1, σελ. 100), οπότε έχουμε

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = 3 + 3 - 2 = 4\,.$$

**c)** Επειδή $W_1 \cap W_2 \neq \{\mathbf{0}\}$, ο $\mathbb{R}^4$ **δεν** είναι το ευθύ άθροισμα των υπόχωρων $W_1$, $W_2$, (βλ. βιβλίο, θεώρημα 2.5.2, σελ. 101).

Για τον $\Delta = span\{(0,0,0,1)\}$ ισχύει $\mathbb{R}^4 = W_2 \oplus \Delta$.

Πράγματι, το διάνυσμα $(0,0,0,1) \notin W_2$, διότι σε διαφορετική περίπτωση θα υπήρχαν $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$k_1(1,0,0,0) + k_2(0,1,0,0) + k_3(0,0,1,-2) = (0,0,0,1). \qquad (1)$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η διανυσματική εξίσωση (1) είναι αδύνατη.

Συνεπώς $W_2 \cap \Delta = \{\mathbf{0}\}$.

Επιπλέον, επειδή $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ και τα διανύσματα

$$(1,0,0,0), \quad (0,1,0,0), \quad (0,0,1,-2), \quad (0,0,0,1)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα[1], αποτελούν μία βάση του χώρου $\mathbb{R}^4$, (βλ. βιβλίο, θεώρημα 2.4.7, σελ. 99).

[1] Η ορίζουσα του πίνακα με στήλες τα διανύσματα είναι διάφορη του μηδενός ή το δείχνουμε με τον ορισμό.