Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης ΓΕ

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας» και αποστέλλει το έντυπο σε δύο μη συρραμμένα αντίγραφα (ή ηλεκτρονικά) στον Καθηγητή-Σύμβουλο. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος συμπληρώνει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας» και στα δύο αντίγραφα και επιστρέφει το ένα στο φοιτητή μαζί με τα σχόλια επί της ΓΕ, ενώ κρατά το άλλο για το αρχείο του μαζί με το γραπτό σημείωμα του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

*Σε περίπτωση ηλεκτρονικής υποβολής του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου θα πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: <u>Π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 2η ΓΕ του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στη ΠΛΗ12 θα πρέπει να γραφεί:</u> «**ioannou_ge2_plh12.doc**».*

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στοιχεία Φοιτητή: Ονομ/νυμο, διευθ/ση, τηλ., -ηλεκτρονική διεύθυνση	<…………………………………………………………> <…………………………………………………………> <…………………………………………………………> <…………………………………………………………>

ΚωδικόςΘΕ	**ΠΛΗ12**	Ονοματεπώνυμο Καθηγητή - Σύμβουλου	………………..
Κωδικός Τμήματος	<…. >	Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής σύμφωνα με το ακ. ημερολόγιο (***ημέρα Τρίτη***)	**13/1/2009**
Ακ. Έτος	**2008-09**	Ημερομηνία αποστολής ΓΕ από το φοιτητή	
α/α ΓΕ	**2η**	Επισυνάπτεται (*σε περίπτωση που έχει ζητηθεί*) η άδεια παράτασης από το Συντονιστή;	ΝΑΙ / ΟΧΙ

***<u>Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή</u>**: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα..*

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής ΓΕ από το φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στο φοιτητή	
Βαθμολογία *(αριθμητικά, ολογράφως)*	

Υπογραφή Φοιτητή	**Υπογραφή Καθηγητή-Συμβούλου**

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 2η

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: 24 Νοεμβρίου 2008

Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 9 Ιανουαρίου 2009.

Οι Ασκήσεις της δεύτερης εργασίας αναφέρονται στα **Κεφάλαια 3, 4, 5** του συγγράμματος του ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα» των Μ. Χατζηνικολάου και Γρ. Καμβύσα.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής μπορείτε να συμβουλευθείτε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στη http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm ως εξής:
Εναλλακτικό **Δ**ιδακτικό **Υ**λικό: Κεφάλαια 5-11.
Συνοδευτικό **Ε**κπαιδευτικό **Υ**λικό: Γραμμικές Απεικονίσεις, Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα, Διαγωνοποίηση, Τετραγωνικές Μορφές.

Ενδεικτικές Λύσεις

Η πρώτη άσκηση αναφέρεται σε διανυσματικούς χώρους που έχουν εσωτερικό γινόμενο (Κεφάλαιο 3 του βιβλίου, ΕΔΥ Κεφάλαιο 5 και 6, ΣΕΥ Οι Χώροι $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$.)

1. (**Μονάδες 20**)

i) (6 μον) Να βρεθούν οι τιμές του $k \in \mathbb{R}$ ώστε η γωνία των διανυσμάτων $(1,1,0), (k,1,k)$ να είναι $\pi/4$.

ii) Έστω U ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα

$$x_1 = (2,1,0-1), \quad x_2 = (1,-1,1,0).$$

a. (3 μον) Εξετάστε εάν τα διανύσματα αυτά αποτελούν βάση του χώρου U.

b. (4 μον) Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του U.

c. (7 μον) Να βρεθεί μια βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος $U^{\perp}$ του U.

Μπορείτε να συμβουλευτείτε τα Παραδείγματα 10, 13 του Κεφ 3 του βιβλίου και τα Παραδείγματα στις σελ 18-20 του ΣΕΥ Ο Χώρος $\mathbb{R}^n$.

Λύση

i) Έστω $a=(1,1,0), b=(k,1,k)$. Έχουμε $\cos(\pi/4)=\dfrac{\langle a,b\rangle}{|a||b|}=\dfrac{k+1}{\sqrt{2}\sqrt{2k^2+1}}$, οπότε

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{k+1}{\sqrt{2}\sqrt{2k^2+1}} \Rightarrow k+1=\sqrt{2k^2+1} \Rightarrow k^2+2k+1=2k^2+1 \Rightarrow k^2-2k=0 \Rightarrow k=0,2.$$

ii) a. Παρατηρούμε (με βάση τον ορισμό για παράδειγμα $k\cdot x_1+l\cdot x_2=(0,0,0,0) \Leftrightarrow k\cdot(2,1,0-1)+l\cdot(1,-1,1,0)=(0,0,0,0) \Leftrightarrow k=l=0$) ότι τα x_1,x_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και άρα αποτελούν βάση του U.

ii) b. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο ορθοκανονικοποίησης των Gram-Schmidt έχουμε:

$$u_1=x_1=(2,1,0,-1)$$

$$u_2=x_2-\frac{\langle x_2,u_1\rangle}{|u_1|^2}u_1=(1,-1,1,0)-\frac{1}{6}(2,1,0,-1)=\frac{1}{6}(4,-7,6,1)$$

και η ζητούμενη ορθοκανονική βάση είναι

$$\widehat{u_1}=\frac{u_1}{|u_1|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,0,-1)$$

$$\widehat{u_2}=\frac{u_2}{|u_2|}=\frac{1}{\sqrt{102}}(4,-7,6,1).$$

ii) c. Έστω $y\in\mathbb{R}^4$. Τότε $y\in U^{\perp}$ αν και μόνο αν $\langle x_1,y\rangle=\langle x_2,y\rangle=0$. Γράφοντας $y=(a,b,c,d)$ έχουμε $\langle x_1,y\rangle=\langle x_2,y\rangle=0 \Leftrightarrow \begin{cases}2a+b-d=0\\ a-b+c=0.\end{cases}$ Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $y=\left(\dfrac{-c+d}{3},\dfrac{2c+d}{3},c,d\right)=c\left(\dfrac{-1}{3},\dfrac{2}{3},1,0\right)+d\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},0,1\right)$, όπου $c,d\in\mathbb{R}$.

Οπότε ο $U^{\perp}$ παράγεται από τα διανύσματα $y_1=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},0,1\right)$ και $y_2=\left(\dfrac{-1}{3},\dfrac{2}{3},1,0\right)$.

Εύκολα (με βάση τον ορισμό για παράδειγμα) βλέπουμε ότι τα y_1,y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Οπότε τα διανύσματα αυτά αποτελούν βάση του $U^{\perp}$.

Το αντικείμενο της δεύτερης άσκηση είναι οι γραμμικές απεικονίσεις (Κεφάλαιο 4 του βιβλίου, ΕΔΥ Κεφάλαιο 8, ΣΕΥ Γραμμικές Απεικονίσεις).

2. (**Μονάδες 25**)

i) (6 μον) Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικές

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=(x+y,xy)$$

$$g:M_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R},\ g\left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right)=a+d.$$

ii) (6 μον) Βρείτε τον τύπο της γραμμικής απεικόνισης $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, εάν $f(2,1)=(1,2,1)$ και $f(1,1)=(-1,0,1)$.

iii) Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$,

$$f(x,y,z)=(x+y+3z,x+2y+4z,y+z).$$

a. (3 μον) Βρείτε τον πίνακα της απεικόνισης ως προς τις κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

b. (4 μον) Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του $\ker f$ και του $\operatorname{Im} f$

c. (6 μον) Δείξτε ότι $(a,b,c)\in \operatorname{Im} f$ αν και μόνο αν $a-b+c=0$.

Μπορείτε να συμβουλευθείτε το Παράδειγμα 1σελ 216 του βιβλίου. Επίσης τις Ασκήσεις 1, 2, 6, 12 Κεφ 8 από το ΕΔΥ και το Παράδειγμα 1 σελ 20 και τα Παραδείγματα 3,4 σελ 31-32 ΣΕΥ Γραμμικές Απεικονίσεις.

Λύση

i) Η f δεν είναι γραμμική επειδή, για παράδειγμα, $f(2,2)=(4,4)$ αλλά $2f(1,1)=2(2,1)=(4,2).$

Η g είναι γραμμική γιατί για κάθε $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ και $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix},\begin{pmatrix} x & y\\ z & w\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ έχουμε

$$g\left(\lambda\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} x & y\\ z & w\end{pmatrix}\right)=g\left(\begin{pmatrix} \lambda a+\mu x & \lambda b+\mu y\\ \lambda c+\mu z & \lambda d+\mu w\end{pmatrix}\right)=$$
$$\lambda a+\mu x+\lambda d+\mu w=\lambda(a+d)+\mu(x+w)=$$
$$\lambda g\left(\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right)+\mu g\left(\begin{pmatrix} x & y\\ z & w\end{pmatrix}\right).$$

ii) Τα $(2,1)$ και $(1,1)$ είναι φανερά (μπορείτε να το δείξετε απλά) είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Εφόσον είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ αποτελούν βάση του χώρου και το τυχαίο διάνυσμα $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ μπορούμε να το γράψουμε σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων:

$$(x,y)=\lambda(2,1)+\mu(1,1)\Rightarrow \begin{matrix} x=2\lambda+\mu\\ y=\lambda+\mu\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda=x-y\\ \mu=2y-x\end{matrix}$$

και η απεικόνιση γίνεται:

$$f(x,y)=f\left(\lambda(2,1)+\mu(1,1)\right)=\lambda f\left((2,1)\right)+\mu f\left((1,1)\right)=$$
$$\lambda(1,2,1)+\mu(-1,0,1)=(x-y)(1,2,1)+(2y-x)(-1,0,1)=(2x-3y,2x-2y,y).$$

iii) a. Επειδή $f\left((1,0,0)\right)=(1,1,0), f\left((0,1,0)\right)=(1,2,1), f\left((0,0,1)\right)=(3,4,1)$, ο πίνακας της απεικόνισης είναι ο $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

iii) b. Για τον πυρήνα έχουμε $(x,y,z)\in\ker f \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3z=0 \\ x+2y+4z=0 \\ \quad\; y+z=0. \end{cases}$

Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών βρίσκουμε ότι η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα των συντελεστών του συστήματος είναι

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2-\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3-\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1-\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ Άρα οι

λύσεις του συστήματος είναι $(-2,-1,1)z,\ z\in\mathbb{R},$ και επομένως μια βάση του $\ker f$ είναι το $(-2,-1,1)$ και $\dim\ker f=1.$

Επειδή $\dim \operatorname{Im} f=\dim\mathbb{R}^3-\dim\ker f=3-1=2$, για να βρούμε μια βάση του $\operatorname{Im} f$ αρκεί να βρούμε δυο γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία στο $\operatorname{Im} f$. Παρατηρούμε ότι τα $f(1,0,0)=(1,1,0)$, $f(0,1,0)=(1,2,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα οπότε μια βάση του $\operatorname{Im} f$ αποτελούν τα $(1,1,0),(1,2,1).$

iii) c. Έχουμε $(a,b,c)\in\operatorname{Im} f$ αν και μόνο αν το σύστημα

$$\begin{cases} x+y+3z=a \\ x+2y+4z=b \\ \quad\; y+z=c \end{cases}$$

είναι συμβιβαστό. Χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & a \\ 1 & 2 & 4 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2-\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & a \\ 0 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 1 & 1 & c \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3-\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & a \\ 0 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & a-b+c \end{pmatrix}.$$

Από την τρίτη γραμμή του τελευταίου πίνακα βλέπουμε ότι το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν $a-b+c=0.$

Εναλλακτικά, με βάση τα όσα είπαμε στο προηγούμενο ερώτημα $(a,b,c)\in\operatorname{Im} f \Leftrightarrow (a,b,c)=k(1,1,0)+l(1,2,1)$ εφόσον αυτά τα δύο διανύσματα παράγουν το χώρο εικόνα. Εάν πάρουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος και εφαρμόσουμε γραμμοπράξεις

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2-\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3-\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & a-b+c \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε από την τρίτη γραμμή του τελευταίου πίνακα ότι το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν $a-b+c=0$.

Οι υπόλοιπες ασκήσεις της εργασίες αναφέρονται σε ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα και διαγωνοποίηση πινάκων (Κεφάλαιο 5 του βιβλίου, ΕΔΥ Κεφάλαια 9-11, ΣΕΥ Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα, Διαγωνοποίηση, Τετραγωνικές Μορφές).

3. (Μονάδες 25)

i) Έστω $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. (10 μον) Υπολογίστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A. Εξετάστε αν ο A διαγωνοποιείται

b. (5 μον) Για κάθε θετικό ακέραιο n υπολογίστε τον A^{n+2}. (Υπόδειξη: το θεώρημα των Cayley-Hamilton ίσως είναι χρήσιμο. Βλ. Άσκηση 12 ΕΔΥ Κεφ9.)

ii) (10 μον) Ένα σωματίδιο κινείται στο επίπεδο έτσι ώστε μετά από n δευτερόλεπτα, $n=1,2,\ldots$, οι συντεταγμένες του (x_n, y_n) ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x_n &= 10x_{n-1} + 9y_{n-1} \\ y_n &= -18x_{n-1} - 17y_{n-1}. \end{aligned}$$

Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του για $n=2008$ αν $x_0=y_0=1$.

(Υπόδειξη: Έστω $A=\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ -18 & -17 \end{pmatrix}$. Οι δοσμένες σχέσεις ισοδυναμούν με τη

$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ και άρα έχουμε $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Υπολογίστε τον A^n με τη βοήθεια της διαγωνοποίησης. Βλ. σελίδες 9-10 και Άσκηση 10 ΕΔΥ Κεφάλαιο10. Επίσης ΣΕΥ παράγραφος 10.2)

Μπορείτε να συμβουλευθείτε τα Παραδείγματα 9,10 σελ 274 - 278 του βιβλίου. Επίσης τις Ασκήσεις 4,7 Κεφ 9 από το ΕΔΥ και τα Παραδείγματα 9.1.13, 9.1.14 από το ΣΕΥ Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα.

Λύση

i) a. Για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχουμε

$$\chi_A(x)=\det\begin{pmatrix} x-1 & -1 & -3 \\ -1 & x-2 & -4 \\ 0 & -1 & x-1 \end{pmatrix}=(x-1)((x-2)(x-1)-4)+(-(x-1)-3)=$$

$$x^3-4x^2=x^2(x-4),$$

οπότε οι ιδιοτιμές είναι 0 (διπλής αλγεβρικής πολλαπλότητας) και 4 (μονής αλγεβρικής πολλαπλότητας)

Για την ιδιοτιμή 0 τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0.$ Στο υποερώτημα 2iii)b είδαμε ότι οι λύσεις είναι $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}z,\ z\in\mathbb{R},$ και άρα τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι τα $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}z,\ z\in\mathbb{R}-\{0\}.$ Οπότε η γεωμετρική πολλαπλότητα του ιδιοχώρου της ιδιοτιμής είναι 1.

Για την ιδιοτιμή 4 λύνουμε το σύστημα $(A-4I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0.$ Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_2\leftrightarrow\Gamma_1}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_2+3\Gamma_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 15 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3\leftrightarrow\Gamma_2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 15 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_3+5\Gamma_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Οπότε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα των συντελεστών είναι $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Συνεπώς οι λύσεις είναι $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}z,\ z\in\mathbb{R}-\{0\}$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι τα

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} z,\ z \in \mathbb{R} - \{0\}$. Δηλαδή η γεωμετρική πολλαπλότητα του ιδιοχώρου της ιδιοτιμής είναι 1.

Από τα προηγούμενα βλέπουμε κάθε 3 ιδιοδιανύσματα του A είναι γραμμικά εξαρτημένα και άρα δεν υπάρχει βάση του $\mathbb{R}^3$ αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του A. Επομένως ο A δεν διαγωνοποιείται. Εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ότι αφού η γεωμετρική πολλαπλότητα μιας ιδιοτιμής (της ιδιοτιμής 0 εν προκειμένου) δεν είναι ίση με την αλγεβρική ο πίνακας δεν διαγωνοποιείται.

i) b. Από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton έχουμε $A^2(A-4I)=0 \Rightarrow A^3 = 4A^2$.

Χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι

$A^4 = A^3A = 4A^2A = 4A^3 = 4^2A^2$. Όμοια $A^5 = 4^3A^2$. Με μια άμεση επαγωγή στο $n \geq 1$ αποδεικνύεται ότι $A^{n+2} = 4^nA^2$. Άρα $A^{n+2} = 4^n \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 15 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

ii) Έστω $A = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ -18 & -17 \end{pmatrix}$. Παρατηρούμε ότι το σύστημα $\begin{matrix} x_n = & 10x_{n-1} + 9y_{n-1} \\ y_n = & -18x_{n-1} - 17y_{n-1} \end{matrix}$ ισοδυναμεί με το $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ και άρα έχουμε

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$\det(xI - A) = \det \begin{pmatrix} x-10 & -9 \\ 18 & x+17 \end{pmatrix} = x^2 + 7x - 8$. Συνεπώς οι ιδιοτιμές είναι

$\dfrac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(-8)}}{2} = 1, -8$. Άρα ο A διαγωνοποιείται διότι έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές.

Λύνοντας τα συστήματα $(A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ και $(A-(-8)I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ βρίσκουμε ότι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 1 είναι $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} y,\ y \in \mathbb{R} - \{0\}$, και τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή -8 είναι $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} y,\ y \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Θέτοντας

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ξέρουμε ότι ο P είναι αντιστρέψιμος και $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$. Άρα $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}P^{-1}$

και για κάθε $n \geq 0$,

$$A^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-8)^n \end{pmatrix}P^{-1}. \tag{2}$$

Εύκολα υπολογίσουμε ότι $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Αντικαθιστώντας στην (2) και κάνοντας τις πράξεις παίρνουμε

$$A^n = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-8)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-(-8)^n & 1-(-8)^n \\ 2(-8)^n - 2 & 2(-8)^n - 1 \end{pmatrix}.$$

Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-(-8)^n & 1-(-8)^n \\ 2(-8)^n - 2 & 2(-8)^n - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \left(2-(-8)^n\right)x_0 + \left(1-(-8)^n\right)y_0 \\ \left(2(-8)^n - 2\right)x_0 + \left(2(-8)^n - 1\right)y_0 \end{pmatrix}$$

και άρα

$$\begin{aligned} x_n &= \left(2-(-8)^n\right)x_0 + \left(1-(-8)^n\right)y_0 \\ y_n &= \left(2(-8)^n - 2\right)x_0 + \left(2(-8)^n - 1\right)y_0. \end{aligned}$$

Η ζητούμενη απάντηση είναι

$$\begin{aligned} x_{2008} &= \left(2 - 8^{2008}\right) + \left(1 - 8^{2008}\right) = 3 - 2\cdot 8^{2008} \\ y_{2008} &= \left(2\cdot 8^{2008} - 2\right) + \left(2\cdot 8^{2008} - 1\right) = -3 + 4\cdot 8^{2008}. \end{aligned}$$

4. (Μονάδες 20)

Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}$ και $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. (5 μον) Με χρήση των σχετικών θεωρήματων για την ορθογωνιότητα και τη διαγωνοποίηση πινάκων αποδείξτε ότι υπάρχει ορθογώνιος πίνακας $P \in M_3(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε ο $P^{-1}AP$ είναι διαγώνιος αν και μόνο αν $c = a$.

b. (10 μον) Έστω $c = a,\ a \neq \pm b,\ a \neq 0$. Να δειχτεί ότι κάθε ιδιόχωρος του A έχει διάσταση 1 και να βρεθεί ένας ορθογώνιος P τέτοιος ώστε ο $P^{-1}AP$ είναι διαγώνιος.

c. (5 μον) Έστω $c = a = 0,\ b \neq 0.$ Ποια είναι η διάσταση του ιδιόχωρου που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0;

Μπορείτε να συμβουλευθείτε το Παράδειγμα 18 σελ 296 του βιβλίου, την Άσκηση 12 Κεφ 10 από το ΕΔΥ και τις σελ 36-37 από το ΣΕΥ Διαγωνοποίηση.

Λύση

a. Αν $c = a$, τότε ο A είναι πραγματικός συμμετρικός πίνακας και το ζητούμενο είναι το συμπέρασμα του Θεωρήματος 5.3.3 του βιβλίου (ή Θεώρημα 8 κεφ10 του ΕΔΥ). Αντίστροφα, αν $P^{-1}AP = D$, όπου P ορθογώνιος και D διαγώνιος, τότε

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^t = \left(PDP^{-1}\right)^t = (P^{-1})^t D^t P^t = PDP^{-1} = A,$$

αφού $P^{-1} = P^t,\ D^t = D.$ Δηλαδή ο A είναι συμμετρικός και άρα $c = a.$

b. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ είναι

$\det\begin{pmatrix} x & 0 & -a \\ 0 & x-b & 0 \\ -a & 0 & x \end{pmatrix} = (x-b)(x^2-a^2).$ Οι ιδιοτιμές του A είναι $a, -a, b$.

Υπολογίζοντας τους αντίστοιχους ιδιόχωρους βρίσκουμε

$$V(a) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V(-a) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V(b) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Παρατηρούμε ότι τα ιδιοδιανύσματα $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι ανά δύο κάθετα.

Θεωρούμε τον πίνακα P που έχει στήλες αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα μήκους 1 (ορθοκανονικοποιούμε δηλαδή, διαιρούμε με το μέτρο κάθε διανύσματος)

Καταλήγουμε δηλαδή στον $P=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$. Τότε ο P είναι ορθογώνιος και ξέρουμε από τη θεωρία ότι $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

c. Με πράξεις βρίσκουμε $V(0)=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ και άρα $\dim V(0)=2.$ (Εναλλακτικά και χωρίς πράξεις θα μπορούσαμε να φτάσουμε άμεσα στο συμπέρασμα $\dim V(0)=2$ επειδή η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής 0 είναι ίση με 2 και και ο A διαγωνοποιείται.)

5. (Μονάδες 10)

i) (5 μον) Έστω $A\in M_2(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι ο συμμετρικός πίνακας AA^t είναι θετικά ημιορισμένος.

ii) (5 μον) Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου $a\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάθε $x,y,z\in\mathbb{R}$

$$x^2+y^2+z^2+2axy+2xz+2ayz\geq 0.$$

(Υπόδειξη: Βλ. θεώρημα 2, Κεφ11, ΕΔΥ. Ίσως η εξής παρατήρηση είναι χρήσιμη: Αν $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ είναι τέτοιοι ώστε $\lambda+\mu\geq 0$ και $\lambda\mu\geq 0$, τότε $\lambda,\mu\geq 0$)

Λύση

i) Έστω $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Τότε $AA^t=\begin{pmatrix} a^2+c^2 & ac+bd \\ ac+bd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$. Αν λ,μ είναι οι ιδιοτιμές του AA^t, τότε

$$\begin{aligned} \lambda+\mu &= tr(AA^t)=a^2+c^2+b^2+d^2\geq 0 \\ \lambda\mu &= \det(AA^t)=(\det A)(\det A^t)=(\det A)^2\geq 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς $\lambda,\mu\geq 0$ και ο AA^t είναι θετικά ημιορισμένος σύμφωνα με το θεώρημα 2, Κεφ11, ΕΔΥ .

ii) Ισοδύναμα, ζητάμε τις τιμές του a έτσι ώστε ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ που αντιστοιχεί στη τετραγωνική μορφή $x^2+y^2+z^2+2axy+2xz+2ayz$ είναι θετικά ημιορισμένος. Με πράξεις βρίσκουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $x(x^2-3x+2-2a^2)$ και άρα οι ιδιοτιμές είναι $0,\dfrac{3+\sqrt{8a^2+1}}{2},\dfrac{3-\sqrt{8a^2+1}}{2}$.

Αυτές είναι μη αρνητικές αν και μόνο αν
$3-\sqrt{8a^2+1}\geq 0 \Leftrightarrow 3\geq \sqrt{8a^2+1} \Leftrightarrow 9\geq 8a^2+1 \Leftrightarrow 8a^2\leq 8 \Leftrightarrow a^2\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq a\leq 1.$