ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 3η

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: 12 Ιανουαρίου 2009

Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 13 Φεβρουαρίου 2009.

Πριν από την λύση κάθε άσκησης καλό είναι να μελετούνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις από τις παραπομπές στα συγγράμματα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της 3ης εργασίας αναφέρονται στα:

Ενότητα 1 (Τα βασικά σύνολα αριθμών)
Ενότητα 2 (Συναρτήσεις – Ακολουθίες – Όρια)
Ενότητα 3 (Σειρές) και
Ενότητα 4 (Όριο και συνέχεια συνάρτησης)
του συγγράμματος του ΕΑΠ «Γενικά Μαθηματικά Ι – Τόμος Α' - Λογισμός μιας Μεταβλητής» του Γ. Δάσιου.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα συμβουλευθείτε επίσης το **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στο http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm ως εξής:

Υλικό Εισαγωγικών και Προαπαιτούμενων Μαθηματικών: Εισαγωγικές Ασκήσεις για τη ΘΕ. Οι λύσεις τους. Εισαγωγικές Έννοιες της ΘΕ, Σύνολα Αριθμών.

Συνοδευτικό **Ε**κπαιδευτικό **Υ**λικό: **Λογισμός**
Σύνολα Αριθμών, Ακολουθίες, Συναρτήσεις, Σειρές, Όρια και Συνέχεια.

Στόχοι:

Κατανόηση και εμπέδωση των παρακάτω εννοιών:
Πραγματικοί και μιγαδικοί αριθμοί (έμφαση στην τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών και την εύρεση των ριζών αυτών).
Συναρτήσεις (έμφαση στην εύρεση του πεδίου ορισμού, τη σύνθεση συναρτήσεων, την εύρεση της αντίστροφης και στις ιδιότητες 1-1 και επί).
Ακολουθίες (έμφαση στην έννοια της ακολουθίας, στο όριο και τα κριτήρια σύγκλισης, στις φραγμένες, τις μονότονες και τις απειριζόμενες ακολουθίες).
Σειρές (έμφαση στην έννοια της σειράς, τις ειδικές κατηγορίες σειρών και στα κριτήρια σύγκλισης σειρών)
Όριο και συνέχεια μιας συνάρτησης, πλευρικό όριο και πλευρική συνέχεια, μονοτονία συναρτήσεων.

Η πρώτη άσκηση αναφέρεται στα βασικά σύνολα αριθμών (βλ. βιβλίο Γ. Δάσιου, Λογισμός μιας Μεταβλητής, Ενότητα 1, Υλικό Εισαγωγικών και Προαπαιτούμενων Μαθηματικών, Εισαγωγικές Ασκήσεις για τη ΘΕ και Εισαγωγικές Έννοιες της ΘΕ Παράγραφος 1.4 καθώς επίσης και ΣΕΥ Λογισμός, Σύνολα Αριθμών.

Άσκηση 1. (8 μονάδες)

α) (4 μον.) Να γραφεί ο μιγαδικός αριθμός $z = 1+i\sqrt{3}$ στην τριγωνομετρική μορφή και να υπολογιστεί η δύναμη z^4.

β) (4 μον.) Να λυθεί η εξίσωση $z^7 = 1+i\sqrt{3}$.

(Υπόδειξη: βλ. ΣΕΥ Λογισμός, Σύνολα αριθμών, Παραδείγματα 1.14. 5, 1.15.5 και 1.16).

Λύση

α) Η τριγωνομετρική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού $z = a+bi$ είναι. $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, όπου ρ είναι το μέτρο $|z| = \rho = \sqrt{a^2+b^2}$ του $a+bi$ και θ το πρωτεύον όρισμα του $a+bi$.

Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού της άσκησης είναι: $\rho = |z| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$.

Το πρωτεύον όρισμα θ του z ορίζεται από τις σχέσεις:

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \sin\theta = \frac{b}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{με} \quad 0 \le \theta < 2\pi\text{. Οπότε } \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Άρα η τριγωνομετρική μορφή του z είναι η $z = 1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Σύμφωνα με το θεώρημα De Moivre (βλ. Θεώρημα 1.15.3 στο ΣΕΥ Λογισμός, Σύνολα αριθμών) η κ δύναμη του μιγαδικού αριθμού $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ είναι $z^\kappa = \rho^\kappa\left(\cos(\kappa\theta) + i\sin(\kappa\theta)\right)$. Συνεπώς η τέταρτη δύναμη του δοθέντος μιγαδικού αριθμού είναι:

$$(1+i\sqrt{3})^4 = 2^4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^4 = 16\left(\cos\left(4\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(4\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 16\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 - i8\sqrt{3} \ .$$

β) Έστω $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$. Η εξίσωση $z^n = a$ έχει n διακεκριμένες λύσεις οι οποίες είναι οι n-οστές ρίζες του μιγαδικού αριθμού α και δίνονται από τον τύπο

$$z_\kappa = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2\kappa\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\kappa\pi}{n}\right), \quad \kappa = 0,1,\ldots,n-1,$$

όπου ρ είναι το μέτρο του a και θ το όρισμά του (βλ. Ενότητα 1 σελ. 6 του βιβλίου και την παράγραφο 1.16 του ΣΕΥ Λογισμός, Σύνολα αριθμών).

Έτσι, οι ρίζες της εξίσωσης $z^7 = 1+i\sqrt{3}$ είναι οι έβδομες ρίζες του μιγαδικού αριθμού $1+i\sqrt{3}$, οι οποίες είναι 7 διαφορετικοί μιγαδικοί αριθμοί και δίνονται από τον τύπο:

$$z_\kappa = \sqrt[7]{2}\left(\cos\frac{2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}}{7}+i\sin\frac{2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}}{7}\right),\quad \kappa=0,1,\ldots,6\,.$$

Οπότε, για $\kappa=0,1,\ldots,6$, παίρνουμε διαδοχικά:

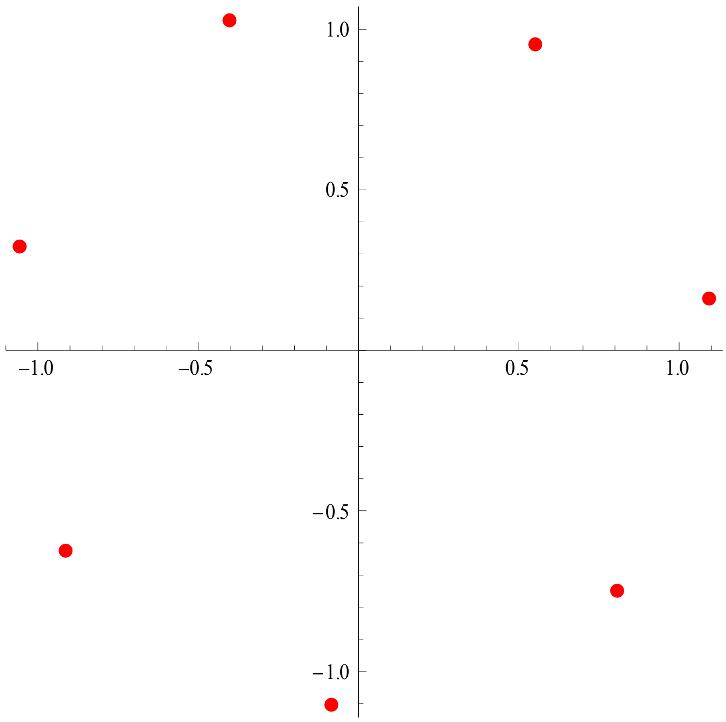
$$z_0=\sqrt[7]{2}\left(\cos\frac{2\cdot 0\cdot\pi+\frac{\pi}{3}}{7}+i\sin\frac{2\cdot 0\cdot\pi+\frac{\pi}{3}}{7}\right)=\left(\cos\frac{\pi}{21}+i\sin\frac{\pi}{21}\right),$$

$$z_1=\sqrt[7]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{21}+i\sin\frac{7\pi}{21}\right),\quad z_2=\sqrt[7]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{21}+i\sin\frac{13\pi}{21}\right),$$

$$z_3=\sqrt[7]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{21}+i\sin\frac{19\pi}{21}\right), z_4=\sqrt[7]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{21}+i\sin\frac{25\pi}{21}\right),$$

$$z_5=\sqrt[7]{2}\left(\cos\frac{31\pi}{21}+i\sin\frac{31\pi}{21}\right),\quad \text{και}\quad z_6=\sqrt[7]{2}\left(\cos\frac{37\pi}{21}+i\sin\frac{37\pi}{21}\right).$$

Οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης στο μιγαδικό επίπεδο σχηματίζουν ένα κανονικό επτάγωνο που εγγράφεται σε ένα κύκλο με αρχή το (0,0) και ακτίνα $\sqrt[7]{2}$:



Η δεύτερη άσκηση αναφέρεται στις συναρτήσεις (βλ. βιβλίο Γ. Δάσιου, Λογισμός μιας Μεταβλητής, Ενότητα 2, Παράγραφος 2.1, Υλικό Εισαγωγικών και Προαπαιτούμενων Μαθηματικών Εισαγωγικές Ασκήσεις για τη ΘΕ και Εισαγωγικές Έννοιες της ΘΕ, Παράγραφος 1.2 καθώς επίσης και ΣΕΥ Λογισμός, Συναρτήσεις.

Άσκηση 2. (18 μονάδες)

α) (6 μον.) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων που δίδονται από τους παρακάτω τύπους:

i. $y = \dfrac{1}{x^4 - 16}$ **ii.** $y = \sqrt{1-x} + \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

(Υπόδειξη: βλ. ΣΕΥ Λογισμός, Συναρτήσεις, Παράδειγμα 4.1.4).

β) (6 μον.) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$, $g(x) = \sqrt{2-x}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της κάθε μιας. Να υπολογισθούν οι συνθέσεις:

i. $(f \circ g)(x)$ και **ii.** $(g \circ f)(x)$.

(Υπόδειξη: βλ. ΣΕΥ Λογισμός, Συναρτήσεις Παραδείγματα 4.3.2)

γ) (6 μον.) Δίνεται η συνάρτηση

$f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{-1\} : x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$.

Είναι η συνάρτηση 1-1; Είναι επί; Να δοθεί η αντίστροφη συνάρτηση αν υπάρχει.

(Υπόδειξη: βλ. ΣΕΥ Λογισμός, Συναρτήσεις, Παράδειγμα 4.4.4)

Λύση

α) i. Έχουμε μια ρητή συνάρτηση και άρα πρέπει ο παρονομαστής να μη μηδενίζεται. Βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης $x^4 - 16 = 0$. Έχουμε

$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$.

Επειδή το $(x^2 + 4)$ δεν μηδενίζεται για πραγματικούς αριθμούς, προκύπτει ότι οι ρίζες αυτές είναι το 2 και το -2. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο

$(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

ii. Για να ορίζεται η συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ πρέπει οι δύο υπόρριζες ποσότητες να είναι μη αρνητικές και ο παρονομαστής να μη μηδενίζεται. Δηλαδή πρέπει

$1 - x \geq 0$, $1 + x \geq 0$, και $\sqrt{1+x} \neq 0$.

Δηλαδή $x \leq 1$, $x \geq -1$ και $x \neq -1$. Συνεπώς, το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο (-1, 1].

β) Κατ' αρχήν βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της κάθε μιας συνάρτησης.

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ - {1} (το 1 μηδενίζει τον παρονομαστή).

Το πεδίο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ - {2} διότι η εξίσωση

$y = \dfrac{2x}{x-1} \Leftrightarrow yx - y = 2x \Leftrightarrow x = \dfrac{y}{y-2}$ έχει λύση για $y \neq 2$ στο πεδίο ορισμού της *f*.

Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 2]$ (η υπόριζη ποσότητα πρέπει να είναι μη αρνητική), ενώ το πεδίο τιμών της είναι το $[0, +\infty)$.

i. Η σύνθεση $(f \circ g)(x)$ ορίζεται, μιας και τη τομή του πεδίου τιμών της g με το πεδίο ορισμού της f δεν είναι το κενό σύνολο, για όλους τους πραγματικούς $x \in (-\infty, 2]$ για τους οποίους $g(x) = \sqrt{2-x}$ $\in \mathbb{R}$ - {1}, δηλαδή $\sqrt{2-x} \neq 1$ και άρα $x \neq 1$.

Οπότε, για $x \in (-\infty,1)\cup(1,2]$, έχουμε :

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{2-x}) = \frac{2\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}-1}.$$

ii. Η σύνθεση $(g\circ f)(x)$ ορίζεται, μιας και τη τομή του πεδίου τιμών της f με το πεδίο ορισμού της g δεν είναι το κενό σύνολο, για όλους τους πραγματικούς $x \in \mathbb{R}$ - $\{1\}$ για τους οποίους $f(x)=\dfrac{2x}{x-1} \in (-\infty,2]$, δηλαδή $\dfrac{2x}{x-1}\leq 2$ και άρα $x<1$.

(Διότι $\dfrac{2x}{x-1}\leq 2 \Rightarrow \dfrac{2x}{x-1}-2\leq 0 \Rightarrow \dfrac{2x-2x+2}{x-1}\leq 0 \Rightarrow \dfrac{2}{x-1}\leq 0 \Rightarrow x-1<0 \Rightarrow x<1$)

Οπότε, έχουμε για $x \in (-\infty,1)$:

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \quad g(\frac{2x}{x-1}) = \sqrt{2-\frac{2x}{x-1}} = \sqrt{\frac{2}{1-x}} \ .$$

γ)

Η συνάρτηση μας θα είναι $1-1$ αν, για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\mathbb{R}-\{1\}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ προκύπτει ότι $x_1=x_2$. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}-\{1\}$. Τότε έχουμε

$$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \frac{1+x_1}{1-x_1}=\frac{1+x_2}{1-x_2} \Leftrightarrow (1+x_1)(1-x_2)=(1+x_2)(1-x_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+x_1-x_2-x_1x_2 = 1+x_2-x_1-x_2x_1 \Leftrightarrow 2x_1=2x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2.$$

Συνεπώς, η $f(x)$ είναι $1-1$.

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε αν η συνάρτηση είναι επί. Έστω $y\in\mathbb{R}-\{-1\}$. Θα ελέγξουμε αν υπάρχει $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ τέτοιο ώστε $y=\dfrac{1+x}{1-x}$. Λύνουμε αυτή την εξίσωση ως προς x:

$$y(1-x)=1+x \Leftrightarrow y-yx=1+x \Leftrightarrow x(y+1)=y-1 \Leftrightarrow x=\frac{y-1}{y+1}, \text{ γιατί } y\neq -1.$$

Άρα, για κάθε y που ανήκει στο πεδίο τιμών της $f(x)$, υπάρχει x που να ανήκει στο πεδίο ορισμού της και να αντιστοιχεί στο y. Συνεπώς η $f(x)$ είναι επί.
Επειδή η συνάρτησή μας είναι $1-1$ και επί, είναι και αντιστρέψιμη. Η αντίστροφή της είναι η

$$f^{-1}:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}-\{1\}: y\mapsto \frac{x-1}{x+1}.$$

Η τρίτη άσκηση αναφέρεται στις ακολουθίες (βλ. βιβλίο Γ. Δάσιου, Λογισμός μιας Μεταβλητής, Ενότητα 2, Παράγραφοι 2.2-2.4 καθώς επίσης και ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες).

Άσκηση 3 (16 μονάδες)

α) (8 μον.) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι μηδενικές.

i. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ ii. $a_n = n^{3/2}(\sqrt{n^4+4} - n^2)$

(Υπόδειξη: Να αποδείξετε ότι η $|a_n|$ φράσσεται από μηδενική ακολουθία)

β) (8 μον.) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι φραγμένες.

i. $a_n = \dfrac{n\sin 3n}{n^2+1}$ ii. $a_n = \dfrac{2n+5}{3^n}$

(Υπόδειξη: βλ. ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες, Παράγραφος 2.3, Πρόταση 2.3.5, Παραδείγματα 2.3.8. Για την 3.β.ii να κάνετε χρήση της ανισότητας Bernoulli, βλ. ΣΕΥ Λογισμός, Σύνολα Αριθμών σελ. 46).

Λύση

α) **i.** Έχουμε: $|a_n| = \left|\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}\right| = \dfrac{1}{(n+1)^2} = \dfrac{1}{n^2+2n+1} < \dfrac{1}{2n}$

Θέτοντας $b_n = \dfrac{1}{2n}$ έχουμε $b_n = \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n} \to \dfrac{1}{2}\cdot 0 = 0$. Άρα, σύμφωνα με γνωστό κριτήριο, επειδή η $|a_n|$ φράσσεται από μηδενική ακολουθία η ακολουθία a_n θα είναι μηδενική.

ii. Επειδή $\sqrt{n^4+4} > \sqrt{n^4} = n^2$ θα ισχύει $\sqrt{n^4+4} - n^2 > 0$ και επομένως $|a_n| = a_n$. Έτσι, έχουμε:

$$|a_n| = a_n = n^{3/2}(\sqrt{n^4+4} - n^2) = n^{3/2}\frac{(\sqrt{n^4+4} - n^2)\cdot(\sqrt{n^4+4} + n^2)}{(\sqrt{n^4+4} + n^2)} =$$

$$= n^{3/2}\frac{n^4+4-n^4}{\sqrt{n^4+4}+\sqrt{n^4}} = n^{3/2}\frac{4}{\sqrt{n^4+4}+\sqrt{n^4}} < \frac{4n^{3/2}}{\sqrt{n^4}+\sqrt{n^4}} = \frac{4n^{3/2}}{n^2+n^2} =$$

$$= \frac{4n^{3/2}}{2n^2} = 2n^{\frac{3}{2}-2} = 2n^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{n^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Θέτοντας $b_n = \dfrac{2}{\sqrt{n}}$ έχουμε $|b_n| = \left|\dfrac{2}{\sqrt{n}}\right| = \dfrac{2}{\sqrt{n}} = 2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 2\cdot 0 = 0$ (βλέπε ΣΕΥ-Λογισμός-Ακολουθίες- παράγραφος 2.2.3 Παραδείγματα (απλοί υπολογισμοί ορίων)).

Άρα, η $|a_n|$ φράσσεται από μηδενική ακολουθία και συνεπώς η ακολουθία a_n θα είναι μηδενική.

β) i. Έχουμε: $|a_n| = \left|\dfrac{n\sin 3n}{n^2+1}\right| = \dfrac{n|\sin 3n|}{n^2+1} \le \dfrac{n\cdot 1}{n^2+1} = \dfrac{n}{n^2+1} < \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2} \quad \forall n \in N$

(διότι $(n-1)^2 \ge 0 \Leftrightarrow n^2 - 2n + 1 \ge 0 \Leftrightarrow n^2 + 1 \ge 2n$)

Επειδή η ακολουθία a_n είναι απολύτως φραγμένη θα είναι και φραγμένη.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι εφόσον η ακολουθία a_n φράσσεται απόλυτα από την $b_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ η οποία είναι μηδενική (άρα συγκλίνουσα, οπότε και φραγμένη) συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία είναι φραγμένη.

ii. Από την ανισότητα Bernoulli έχουμε ότι $3^n = (1+2)^n \ge 1+2n$. Οπότε

$\dfrac{1}{3^n} \le \dfrac{1}{1+2n} \Rightarrow \dfrac{2n+5}{3^n} \le \dfrac{2n+5}{1+2n}$. Συνεπώς

$$|a_n| = \left|\frac{2n+5}{3^n}\right| = \frac{2n+5}{3^n} \le \frac{2n+5}{1+2n} = \frac{2n+1+4}{2n+1} = \frac{2n+1}{2n+1} + \frac{4}{2n+1} = 1 + \frac{4}{2n+1} \le$$

$$\le 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \quad \forall n \in N$$

Διότι $n \ge 1 \Leftrightarrow 2n+1 \ge 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \ge \frac{1}{2n+1} \Leftrightarrow \frac{4}{2n+1} \le \frac{4}{3}$. Άρα η ακολουθία a_n είναι απολύτως φραγμένη, συνεπώς θα είναι και φραγμένη.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι εφόσον η ακολουθία a_n φράσσεται απόλυτα από την $b_n = \frac{2n+5}{2n+1}$ η οποία είναι συγκλίνει στο 1 (οπότε είναι και φραγμένη) συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία είναι φραγμένη.

Η τέταρτη άσκηση αναφέρεται επίσης στις ακολουθίες (βλ. βιβλίο Γ.Δάσιου, Λογισμός μιας Μεταβλητής, Ενότητα 2, παράγραφοι 2.2-2.4 καθώς επίσης και ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες).

Άσκηση 4 (24 μονάδες)

α) (16 μον.) Να υπολογίσετε τα όρια των ακολουθιών a_n, $n = 1, 2, \ldots$ με γενικούς όρους:

i. $a_n = \frac{3^n}{n^n}$ **ii.** $a_n = (\frac{2n^2-3}{3n^2-2})^2$ **iii.** $a_n = \frac{2^n+3^n}{5^n+4^n}$ **iv.** $a_n = \frac{n^2-3n+9}{2n+1}$

(Υπόδειξη: βλ. ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες, Παράγραφοι 2.4 και 2.5. Μελετήστε το Παράδειγμα 3 σελ. 16. και τα Παραδείγματα 5 και 6 σελ. 25).

β) (8 μον.) Να εξετάσετε την μονοτονία των παρακάτω ακολουθιών a_n, $n = 1, 2, \ldots$ με γενικούς όρους:

i. $a_n = (-1)^n$ **ii.** $a_n = \frac{-n!}{n^n}$

(Υπόδειξη: βλ. ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες, Παράγραφος 2.6., Παραδείγματα 2.6.2).

Λύση

α) **i.** Έχουμε ότι

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\left|\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n}{n^n}}\right| = \lim\left|\frac{3^{n+1}\cdot n^n}{3^n\cdot(n+1)^{n+1}}\right| = \lim\left|\frac{3^n\cdot 3\cdot n^n}{3^n\cdot(n+1)^n\cdot(n+1)}\right| =$$

$$= \lim\left|\frac{3}{n+1}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n}\right| = \lim\left\{\frac{3}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right\} = \lim\frac{3}{n+1}\lim\left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim\frac{3}{n+1}\lim\left(\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \lim\frac{3}{n+1}\lim\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 0\cdot\frac{1}{e} = 0$$

Επειδή $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 < 1$, θα ισχύει $\lim a_n = 0$.

ii. $\lim a_n = \lim\left(\frac{2n^2-3}{3n^2-2}\right)^2 = \lim\left(\frac{\frac{2n^2-3}{n^2}}{\frac{3n^2-2}{n^2}}\right)^2 = \left(\frac{2-\lim\frac{3}{n^2}}{3-\lim\frac{2}{n^2}}\right)^2 = \left(\frac{2-0}{3-0}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

iii. Έχουμε:

$$\lim a_n = \lim\frac{2^n+3^n}{5^n+4^n} = \lim\frac{\frac{2^n}{5^n}+\frac{3^n}{5^n}}{\frac{5^n}{5^n}+\frac{4^n}{5^n}} = \lim\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{4}{5}\right)^n} = \frac{\lim\left(\frac{2}{5}\right)^n+\lim\left(\frac{3}{5}\right)^n}{\lim 1+\lim\left(\frac{4}{5}\right)^n} = \frac{0+0}{1+0} = 0$$

(Ισχύει ότι αν $0 \le \lambda < 1,\ \ \lambda^n \to 0$)

iv.

$$\lim a_n = \lim\frac{n^2-3n+9}{2n+1} = \lim\frac{n^2(1-\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2})}{n(2+\frac{1}{n})} = \lim\left(n\frac{1-\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}}{2+\frac{1}{n}}\right) = \lim n\cdot\lim\frac{1-\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2}}{2+\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim n\frac{\lim(1-\frac{3}{n}+\frac{9}{n^2})}{\lim(2+\frac{1}{n})} = +\infty\cdot\frac{1-0+0}{2+0} = +\infty\cdot\frac{1}{2} = +\infty$$

(βλέπε ΣΕΥ-Λογισμός-Ακολουθίες-Πρόταση 2.10.4)

β) i. $a_{n+1}-a_n = (-1)^{n+1}-(-1)^n = (-1)^n\cdot(-1)-(-1)^n = (-1)^n\cdot\left(-1-1\right) = -2\cdot(-1)^n$

Όμως: $a_{n+1}-a_n = -2\cdot 1 = -2$ αν $n =$ άρτιος και

$a_{n+1}-a_n = -2\cdot(-1) = 2$ αν $n =$ περιττός

Επομένως η ακολουθία a_n δεν είναι μονότονη, αφού το $a_{n+1}-a_n = -2\cdot(-1)^n$ δεν διατηρεί πρόσημο.

ii. Επειδή $a_n = \frac{-n!}{n^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα ισχύει $a_n < 0$. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του λόγου έχουμε:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{-(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{-n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!\ n^n}{n!\ (n+1)^{n+1}} = \frac{n!\ (n+1)\ n^n}{n!\ (n+1)^n\ (n+1)} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1$$

γιατί $\frac{n}{n+1} < 1$. Συνεπώς ισχύει: $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$ γιατί $a_n < 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άρα η ακολουθία a_n είναι γνησίως αύξουσα.

Η πέμπτη άσκηση αναφέρεται στις σειρές (βλ. βιβλίο Γ. Δάσιου, Λογισμός μιας Μεταβλητής, Ενότητα 3 καθώς επίσης και ΣΕΥ Λογισμός, Σειρές).

Άσκηση 5 (16 μονάδες)

Στις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν η σειρά των απείρων όρων συγκλίνει ή όχι:

i. (5 μον.) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n^5}{n!}$ **ii.** (5 μον.) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\cdot n!}{(3n)!}$ **iii.** (6 μον.) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n\cdot n!}{n^n}$ για $\lambda=2$ και $\lambda=3$

(Υπόδειξη: βλ. βιβλίο Γ. Δάσιου, Λογισμός μιας Μεταβλητής, Παραδείγματα, σελ. 36-40 καθώς και Σ.Ε.Υ, Λογισμός – Σειρές, Παράγραφοι 2.4, 3.2.1, 3.2.2, 3.3, 3.4)

Λύση

i. Ο γενικός όρος έχει την μορφή: $\alpha_n=(-1)^{n+1}\frac{n^5}{n!}$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο του λόγου για την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$. Έχουμε:

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|=\frac{\frac{(n+1)^5}{(n+1)!}}{\frac{(n)^5}{n!}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^5\cdot\frac{n!}{(n+1)!}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^5\frac{1}{n+1}.$$

Άρα $\lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)=1\cdot 0=0<1$.

Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ συγκλίνει. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ επομένως συγκλίνει απολύτως άρα, σύμφωνα με το 3.3 της σελ. 41 του βιβλίου Γ. Δάσιου, Λογισμός μιας Μεταβλητής, έχουμε και σχετική σύγκλιση. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ συγκλίνει.

ii. Εφαρμόζουμε το κριτήριο του λόγου.

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\frac{\frac{(n+1)^3\cdot(n+1)!}{(3(n+1))!}}{\frac{n^3\cdot n!}{(3n)!}}=\frac{(n+1)^3\cdot(n+1)!\cdot(3n)!}{(3(n+1))!\cdot n^3\cdot n!}.$$

Ισχύουν

$(n+1)!=n!\cdot(n+1)$,

$(3(n+1))!=(3n+3)!=(3n)!\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)$, άρα

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\frac{(n+1)^3\cdot n!\cdot(n+1)\cdot(3n)!}{(3n)!\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)\cdot n^3\cdot n!}=\frac{(n+1)^4}{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot 3\cdot(n+1)\cdot n^3}=$$

$$=\frac{(n+1)^3}{3\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot n^3}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}{3\cdot(3n+1)\cdot(3n+2)}$$

Προφανώς $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3=1$, άρα $\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=0<1$

Συνεπώς η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\cdot n!}{(3n)!}$ συγκλίνει.

iii. Ο γενικός όρος έχει την μορφή: $\alpha_n=\frac{\lambda^n\cdot n!}{n^n}$. Εφαρμόζουμε το <u>κριτήριο του λόγου</u>:

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\frac{\frac{\lambda^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{\lambda^n\cdot n!}{n^n}}=\frac{\lambda^{n+1}\cdot(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot\lambda^n\cdot n!}=\frac{\lambda\cdot(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lambda\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{\lambda}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Είναι γνωστό ότι $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

Άρα $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\frac{\lambda}{e}$. Για $\lambda=2$ έχουμε $\frac{2}{e}<1$, άρα η σειρά συγκλίνει. Για $\lambda=3$ έχουμε $\frac{3}{e}>1$, άρα η σειρά αποκλίνει.

Η έκτη άσκηση αναφέρεται στα όρια και τη συνέχεια συναρτήσεων (βλ. βιβλίο Γ. Δάσιου, Λογισμός μιας Μεταβλητής, Ενότητα 4 καθώς και το ΣΕΥ Λογισμός, <u>Όρια και Συνέχεια</u>)

Άσκηση 6. (18 μονάδες)

α) (12 μον.) Βρείτε τα όρια

i. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}$, **ii.** $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}$,

iii. $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$, **iv.** $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$

β) (6 μον.) Βρείτε τις τιμές του c για τις οποίες η συνάρτηση

$f(x)=\begin{cases}x^2-c^2, & x<4\\ cx+20, & x\geq 4\end{cases}$ είναι συνεχής για κάθε $x\in(-\infty,+\infty)$.

(Υπόδειξη: βλ. ΣΕΥ Λογισμός, Όρια και Συνέχεια, Παραδείγματα 5.3.3).

Λύση :

α) **i.** Μπορούμε να δούμε ότι το όριο του αριθμητή της συνάρτησης $\frac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}$ είναι $\lim_{x\to 0}x=0$, ενώ το όριο του παρονομαστή της είναι

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}=\sqrt{1-\lim_{x\to 0}x}-\sqrt{1+\lim_{x\to 0}x}=\sqrt{1-0}-\sqrt{1+0}=0.$$

Συνεπώς δεν μπορούμε να συμπεράνουμε για το όριο της με βάση την πρόταση της Παραγράφου 2.4 του βιβλίου. Αν όμως πολλαπλασιάσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή της συνάρτησης επί την συζυγή παράσταση του παρονομαστή, θα έχουμε την παράσταση:

$$\frac{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}{\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=\frac{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}{\left(\left(\sqrt{1-x}\right)^2-\left(\sqrt{1+x}\right)^2\right)}=\frac{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}{(1-x)-(1+x)}=$$

$$=\frac{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}{-2x}=-\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{2},$$

της οποίας το όριο, όταν $x\to 0$, είναι (σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1.6 του ΣΕΥ Λογισμός, Όρια και Συνέχεια):

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{2}\right)=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-\lim_{x\to 0}x}+\sqrt{1+\lim_{x\to 0}x}\right)=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}\right)=-1.$$

ii. Και εδώ παρατηρούμε ότι το όριο του αριθμητή είναι

$$\lim_{x\to 0}\tan^{-1}x=\tan^{-1}\left(\lim_{x\to 0}x\right)=\tan^{-1}0=0$$

ενώ το όριο του παρονομαστή είναι $\lim\limits_{x\to 0}x=0$. Συνεπώς, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε για το όριο που θέλουμε να υπολογίσουμε με βάση την πρόταση της Παραγράφου 2.4 του βιβλίου. Χρησιμοποιώντας όμως την Πρόταση 5.1.14 του ΣΕΥ Λογισμός, Όρια και Συνέχεια, και εφαρμόζοντας την αντικατάσταση $v=\tan^{-1}(x)$, έτσι ώστε $x=\tan v$ και $v\to 0$ όταν $x\to 0$, το παραπάνω όριο μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}=\lim_{v\to 0}\frac{v}{\tan v}=\lim_{v\to 0}\frac{v\cos v}{\sin v}=\lim_{v\to 0}\frac{v}{\sin v}\lim_{v\to 0}\cos v=\frac{1}{\lim\limits_{v\to 0}\frac{\sin v}{v}}\lim_{v\to 0}\cos v=1\bullet 1=1.$$

Στον παραπάνω υπολογισμό χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 5.1.13 του ΣΕΥ Λογισμός, Όρια και Συνέχεια.

iii. Παρατηρούμε ότι, καθώς το x πλησιάζει στο 0 από θετικές τιμές, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty-\infty$, το οποίο είναι απροσδιόριστο. Όμως, μπορούμε να κάνουμε το εξής:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to 0^+}x-1}{\lim\limits_{x\to 0^+}x^2}=\frac{0-1}{0}=-\frac{1}{0}=-\infty.$$

iv. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}=\frac{\sqrt{2+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}}{3-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x}}=\frac{\sqrt{2+0}}{3-0}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

b) Για $x\in(-\infty,4)$, η $f(x)$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική συνάρτηση για κάθε τιμή του c. Για τον ίδιο λόγο και για οποιοδήποτε c, η $f(x)$ είναι συνεχής και στο διάστημα $x\in(4,+\infty)$.

Για να είναι συνεχής και στο σημείο $x = 4$, θα πρέπει: $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = f(4)$.

Επειδή

$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-}\left(x^2 - c^2\right) = 16 - c^2$ και $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+}\left(cx + 20\right) = 4c + 20 = f(4)$,

έχουμε ότι $16 - c^2 = 4c + 20 \Leftrightarrow c^2 + 4c + 4 = 0 \Leftrightarrow c = -2$.