Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης ΓΕ

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας» και αποστέλλει το έντυπο σε δύο μη συρραμμένα αντίγραφα (ή ηλεκτρονικά) στον Καθηγητή-Σύμβουλο. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος συμπληρώνει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας» και στα δύο αντίγραφα και επιστρέφει το ένα στο φοιτητή μαζί με τα σχόλια επί της ΓΕ, ενώ κρατά το άλλο για το αρχείο του μαζί με το γραπτό σημείωμα του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

*Σε περίπτωση ηλεκτρονικής υποβολής του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου θα πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: Π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 4η ΓΕ του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στη ΠΛΗ12 θα πρέπει να γραφεί: «**ioannou_ge4_plh12.doc**».*

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στοιχεία Φοιτητή: Ονομ/νυμο, διευθ/ση, τηλ., -ηλεκτρονική διεύθυνση	<……………………………………………………………> <……………………………………………………………> <……………………………………………………………> <……………………………………………………………>

ΚωδικόςΘΕ	**ΠΛΗ12**	Ονοματεπώνυμο Καθηγητή - Σύμβουλου	………………..
Κωδικός Τμήματος	<…. >	Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής σύμφωνα με το ακ. ημερολόγιο (***ημέρα Τρίτη***)	**20/3/2009**
Ακ. Έτος	**2008-09**	Ημερομηνία αποστολής ΓΕ από το φοιτητή	
α/α ΓΕ	**4η**	Επισυνάπτεται (*σε περίπτωση που έχει ζητηθεί*) η άδεια παράτασης από το Συντονιστή;	ΝΑΙ / ΟΧΙ

***Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή**: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα..*

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής ΓΕ από το φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στο φοιτητή	
Βαθμολογία *(αριθμητικά, ολογράφως)*	

Υπογραφή Φοιτητή	**Υπογραφή Καθηγητή-Συμβούλου**

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 4η

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: 16 Φεβρουαρίου 2009
Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 20 Μαρτίου 2009

Πριν από την λύση κάθε άσκησης καλό είναι να μελετώνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις των υποδείξεων και παραπομπών στα συγγράμματα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της τέταρτης εργασίας αναφέρονται στα:

Ενότητα 5 (Παράγωγος)
Ενότητα 6 (Βασικά Θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού)
Ενότητα 7 (Ακρότατα)
Ενότητα 8 (Το ανάπτυγμα Taylor)
Ενότητα 9 (Το ολοκλήρωμα)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «**Λογισμός Μιας Μεταβλητής**» του Γ. Δάσιου

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα συμβουλευθείτε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στη http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm ως εξής:

Συνοδευτικό **Ε**κπαιδευτικό **Υ**λικό :

Λογισμός Παράγωγοι, Βασικά Θεωρήματα Διαφορικού Λογισμού, Σειρές Taylor, Ολοκληρώματα 1

Στόχοι:

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η κατανόηση της έννοιας της παραγώγου και των εφαρμογών της στον υπολογισμό ορίων, εύρεσης ακρότατων και μελέτης συνάρτησης. Επίσης σκοπός είναι η κατανόηση ανάπτυξης και εφαρμογής των σειρών Taylor, και βασικών τεχνικών ολοκλήρωσης.

Άσκηση 1. (25 μονάδες)

i) (7 μονάδες) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & x<1 \\ 2\sqrt{x}+x^2, & x\geq 1 \end{cases}$. Εξετάστε εάν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$.

ii) (8 μονάδες) Υπολογίστε την παράγωγο για κάθε μία από τις επόμενες συναρτήσεις:

α) $f(x)=x\sqrt{x}\left(3\ln(x)-2\right)$

β) $f(x)=\dfrac{\sin^2(x)}{\sin(x^2)}$

γ) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

δ) $f(x)=e^{\sin^2(x^3)}$

iii) (10 μονάδες) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού αποδείξτε ότι: $2-\frac{e}{2}<\ln 2<\frac{2}{e}$.

Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε το θεώρημα σε κατάλληλη συνάρτηση στο διάστημα [2,e], δείτε και άσκηση 1β σελ 103 βιβλίου.

<u>Λύση</u>

i) Η f είναι προφανώς συνεχής στο $x_0=1$ αφού

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=3$$

Για την παράγωγό της στο σημείο 1 υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+3)=4$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2\sqrt{x}+x^2-3}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1}+\frac{x^2-1}{x-1}\right)=$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2\left(\sqrt{x}^2-1^2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}+\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2}{\left(\sqrt{x}+1\right)}+(x+1)\right)=1+2=3$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

ii)

α) Η f είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων

$$f(x)=x\sqrt{x}(3\ln(x)-2)=xx^{\frac{1}{2}}(3\ln(x)-2)=x^{\frac{3}{2}}(3\ln(x)-2)$$

Σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης γινομένου συναρτήσεων θα έχω:

$$f'(x)=(x^{\frac{3}{2}})'(3\ln(x)-2)+x^{\frac{3}{2}}(3\ln(x)-2)'=\frac{3}{2}x^{(\frac{3}{2}-1)}(3\ln(x)-2)+x^{\frac{3}{2}}(3(\ln(x))'-0)=$$

$$=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(3\ln(x)-2)+x^{\frac{3}{2}}(3\frac{1}{x}-0)=\frac{9}{2}\sqrt{x}\ln(x)-3\sqrt{x}+3\sqrt{x}=\frac{9}{2}\sqrt{x}\ln(x)$$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων

$$f'(x)=\left(\frac{\sin^2(x)}{\sin(x^2)}\right)'=\frac{\left(\sin^2(x)\right)'\sin(x^2)-\sin^2(x)\left(\sin(x^2)\right)'}{\sin^2(x^2)}=$$

$$=\frac{2\sin(x)\left(\sin(x)\right)'\sin(x^2)-\sin^2(x)\cos(x^2)\left(x^2\right)'}{\sin^2(x^2)}=$$

$$=\frac{2\sin(x)\cos(x)\sin(x^2)-\sin^2(x)\cos(x^2)(2x)}{\sin^2(x^2)}=$$

$$=\frac{\sin(2x)\sin(x^2)-2x\sin^2(x)\cos(x^2)}{\sin^2(x^2)}=\frac{1}{\sin(x^2)}\left(\sin(2x)-2x\sin^2(x)\cot(x^2)\right)$$

γ)

Η f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων
Σύμφωνα με τον κανόνα παραγώγισης συνθέτων συναρτήσεων

$$\left(g\circ f\right)'(x)=g'(f(x))f'(x)$$

έχουμε:

$$\left(\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right)'=\frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})}(x+\sqrt{1+x^2})'=\frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})}(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}})=$$

$$=\frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})}(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})=\frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})}(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}})=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

δ)

Χρησιμοποιώντας και πάλι τον κανόνα παραγώγισης συνθέτων συναρτήσεων έχουμε :

$$\left(e^{\sin^2(x^3)}\right)'=e^{\sin^2(x^3)}\left(\sin^2(x^3)\right)'=e^{\sin^2(x^3)}2\sin(x^3)\left(\sin(x^3)\right)'$$

$$=(e^{\sin^2(x^3)}2\sin(x^3))(\cos(x^3))(3x^2)=$$

$$=3e^{\sin^2(x^3)}\sin(2x^3)x^2$$

iii)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x$, με πεδίο ορισμού $D_f=(0,+\infty)$ και το κλειστό διάστημα [2,e]. Η f είναι συνεχής στο [2,e] και παραγωγίσιμη στο (2,e) με $f'(x)=\frac{1}{x}$.

Άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού οπότε

$$\exists\xi\in(2,e):\ f'(\xi)=\frac{f(e)-f(2)}{e-2}\Leftrightarrow\frac{1}{\xi}=\frac{\ln(e)-\ln(2)}{e-2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\xi}=\frac{1-\ln(2)}{e-2}\quad(1)$$

Αλλά

$$\xi \in (2,e) \Rightarrow 2<\xi<e \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{e} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{1}{2} > \frac{1-\ln(2)}{e-2} > \frac{1}{e} \overset{e-2>0}{\Rightarrow} \frac{e-2}{2} > 1-\ln(2) > \frac{e-2}{e} \Rightarrow$$

$$\frac{e}{2}-1 > 1-\ln(2) > 1-\frac{2}{e} \Rightarrow \frac{e}{2}-2 > -\ln(2) > -\frac{2}{e} \Rightarrow 2-\frac{e}{2} < \ln(2) < \frac{2}{e}$$

Άσκηση 2. (**25 μονάδες**)

i) (3 μονάδες) Αποδείξτε ότι $\left(x^x\right)' = x^x(\ln x+1)$, όπου $x>0$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη γνωστή ιδιότητα των λογαρίθμων: $a^b = e^{b\ln a}$

ii) (12 μονάδες) Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hospital και το προηγούμενο αποτέλεσμα, να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x+\sin x}{e^x+x}$

β) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^x-x}{\ln x - x+1}$

γ) $\lim\limits_{x\to0+} (\sin x)^x$

Υπόδειξη: Για τη (γ) δείτε το παράδειγμα στη σελίδα 27 στο κεφάλαιο Βασικά Θεωρήματα Διαφορικού Λογισμού στο Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό.

iii) (10 μονάδες) Τρία σημεία A,B,C σχηματίζουν γωνία B= 60°**.** Ένα αυτοκίνητο φεύγει από το A ενώ ταυτόχρονα ένα τρένο φεύγει από το B. Το αυτοκίνητο κινείται ευθύγραμμα προς το B με σταθερή ταχύτητα 80 km/h ενώ το τρένο κινείται επίσης ευθύγραμμα προς το C με σταθερή ταχύτητα 50 km/h. Σε τι χρόνο η απόσταση μεταξύ αυτοκινήτου και τρένου είναι ελάχιστη αν AB=200 km και BC=125 km;
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον νόμο των συνημίτονων για το τρίγωνο με κορυφές το B και τις θέσεις των δύο κινητών.

Λύση

i) Χρησιμοποιώντας την υπόδειξη έχουμε ότι

$$x^x = e^{x\ln x}.$$

Επομένως,

$$\left(x^x\right)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}\left(x\ln x\right)' = x^x\left(x'\ln x + x\left(\ln x\right)'\right)$$
$$= x^x\left(\ln x + x\frac{1}{x}\right) = x^x\left(\ln x+1\right)$$

ii)

α)

Παρατηρούμε ότι

$$x^2+x-1 \le x^2+x+\sin x \le x^2+x+1$$

Οπότε αριθμητής φράσσεται από πάνω και κάτω από δύο συναρτήσεις που απειρίζονται οπότε το όριό του είναι το άπειρο.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+\sin x}{e^x+x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+x+\sin x\right)'}{\left(e^x+x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1+\cos x}{e^x+1}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x+1+\cos x\right)'}{\left(e^x+1\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\sin x}{e^x}=0.$$

Παρόμοιο επιχείρημα χρησιμοποιούμε και για το όριο της έκφρασης $2x+1+\cos x$ όπου ισχύει

$$2x=2x+1-1\le 2x+1+\cos x\le 2x+1+1=2x+2$$

Αφού ο αριθμητής είναι φραγμένη συνάρτηση $1\le 2-\sin x\le 3$ και ο παρονομαστής τείνει στο $+\infty$.

β)

$$\lim_{x\to1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1}\frac{\left(x^x-x\right)'}{\left(\ln x-x+1\right)'}=\lim_{x\to1}\frac{x^x(\ln x+1)-1}{\left(\frac{1}{x}-1\right)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1}\frac{\left(x^x(\ln x+1)-1\right)'}{\left(\frac{1}{x}-1\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^x(\ln x+1)^2+x^x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{1\cdot(0+1)^2+1\cdot1}{-1}=\frac{2}{-1}=-2$$

γ) Χρησιμοποιώντας και πάλι ιδιότητες λογαρίθμων έχουμε:

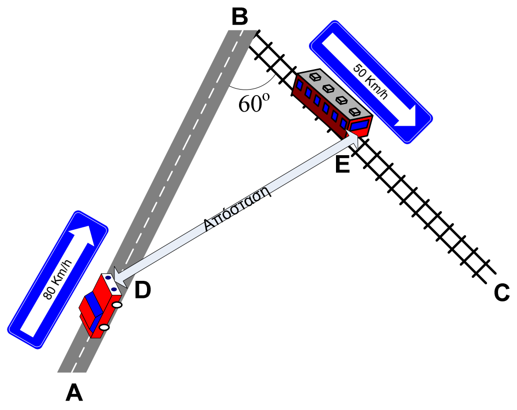
$$(\sin x)^x=e^{x\ln(\sin x)}$$

Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη ότι η εκθετική συνάρτηση είναι συνεχής και χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hospital, στα σημεία όπου εμφανίζονται απροσδιόριστες μορφές ορίων, έχουμε:

$$\lim_{x\to0+}(\sin x)^x=\lim_{x\to0+}e^{x\ln(\sin x)}=e^{\lim\limits_{x\to0+}\left(x\ln(\sin x)\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0+}\left(\frac{\ln(\sin x)}{1/x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0+}\frac{\left(\ln(\sin x)\right)'}{(1/x)'}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0+}\frac{\left(\frac{(\sin x)'}{\sin x}\right)}{\frac{-1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to0+}\left(\frac{-x^2\cos x}{\sin x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0+}\frac{\left(-x^2\cos x\right)'}{(\sin x)'}}=e^{\lim\limits_{x\to0+}\frac{-2x\cos x+x^2\sin x}{\cos x}}=e^{\frac{0}{1}}=e^0=1$$

iii)



Το αυτοκίνητο αναχωρεί από το σημείο A και φθάνει στο D ενώ το τραίνο αναχωρεί από το B και φθάνει στο E. Η απόσταση τους δίνεται πάντα από το ευθύγραμμο τμήμα DE, το οποίο προφανώς μεταβάλλεται καθώς το D (αυτοκίνητο) κινείται προς το B και το E(τραίνο) κινείται προς το C.

Από τον νόμο των συνημιτόνων για το τρίγωνο $D\overset{\triangle}{B}E$ έχουμε:

$$DE^2 = DB^2 + BE^2 - 2(DB)(BE)\cos(60^\circ)$$

όμως από τον ορισμό της ταχύτητας για κάθε κινητό έχω:

$$V_{\alpha\upsilon\tau} = \frac{AD}{t} \text{ και } V_{\tau\rho} = \frac{BE}{t}$$

χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του προβλήματος μπορώ να πάρω τις ακόλουθες εκφράσεις για BE και AD:

$$AD = 80t \text{ και } BE = 50t$$

όμως $$DB = AB - AD = 200 - AD = 200 - 80t$$

αντικαθιστώντας στην πρώτη σχέση θα πάρω:

$$DE^2 = (200-80t)^2 + (50t)^2 - 2(200-80t)(50t)\frac{1}{2}$$

όπου έχει αντικατασταθεί η τιμή του συνημίτονου των 60 μοιρών (1/2). Η παραπάνω ποσότητα που είναι το τετράγωνο της απόστασης των 2 κινητών είναι μία συνάρτηση μίας μεταβλητής (της t).

$$\begin{aligned} f(t) &= (200-80t)^2 + (50t)^2 - 2(200-80t)(50t)\frac{1}{2} = \\ &= 200^2 - 2\cdot 200\cdot 80t + 80^2t^2 + 50^2t^2 - 200\cdot 50t + 80\cdot 50t^2 = \\ &= (80^2 + 50^2 + 80\cdot 50)t^2 - (2\cdot 200\cdot 80 + 200\cdot 50)t + 200^2 = \\ &= 12900t^2 - 42000t + 40000 \end{aligned}$$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης δεν είναι όλο το $\mathbb{R}$ αλλά το διάστημα του χρόνου που θα κινούνται τα δύο οχήματα. Τα δύο οχήματα φθάνουν στο τέλος της διαδρομής τους (B για το αυτοκίνητο, C για το τρένο) την ίδια χρονική στιγμή $t = 200/80\text{h} = 125/50\text{h}=2.5\text{h}$. Οπότε πεδίο ορισμού είναι το διάστημα χρόνου $[0, 2.5]$. Παρατηρούμε ότι για λόγους ευκολίας στον υπολογισμό της παραγώγου της προς ελαχιστοποίηση συνάρτησης ελαχιστοποιούμε το τετράγωνο της απόστασης και όχι την ίδια την απόσταση. Αυτό είναι ισοδύναμο. Για να βρούμε το ελάχιστο της $f(t)$ μελετούμε την πρώτη παράγωγο της ως προς t. Παραγωγίζοντας παίρνουμε :

$$f'(t) = 2\cdot 12900t - 42000 = 0$$

και λύνοντας ως προς t βρίσκουμε την τιμή του χρόνου για την οποία μηδενίζεται η παράγωγος, οπότε έχω πιθανό ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο):

$$t_0 = \frac{70}{43}\text{h} \simeq 1.62791\text{h} .$$

Η τιμή αυτή βρίσκεται στο πεδίο ορισμού που έχουμε ορίσει τη συνάρτηση και αποτελεί τοπικό ελάχιστο διότι η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης

$$f''(t) = 25800 > 0 \quad \forall\ t \in [0, 2.5]$$

οπότε και

$$f''(t_0) > 0 \quad .$$

Επειδή η παράγωγός της $f(t)$ είναι αρνητική $\forall\ t \le t_0$ (οπότε και η συνάρτηση είναι φθίνουσα $\forall\ t \le t_0$) και θετική $\forall\ t \ge t_0$ (οπότε και η συνάρτηση είναι αύξουσα $\forall\ t \ge t_0$), το σημείο αυτό είναι και ολικό ελάχιστο.

Άσκηση 3. (20 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(x-3)^2$, με $x \in (-\infty, \infty)$. Να προσδιορίσετε:

i) Τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της στα οποία είναι **α)** αύξουσα, **β)** φθίνουσα

ii) Τα ακρότατά της (μέγιστα και ελάχιστα).

iii) Τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της στα οποία

a. στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω

b. στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

iv) Τα σημεία καμπής.

v) Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy.

vi) Τις ασύμπτωτες της f.

vii) Συνοψίστε σε ένα πίνακα τα παραπάνω στοιχεία και δώστε μία γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Λύση

i)

Παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής και άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική:

$f(x) = x(x-3)^2$, $f'(x) = (x-3)^2 + x2(x-3) = 3(x-1)(x-3)$ και

$f''(x) = 3(x-1) + 3(x-3) = 6(x-2), f'''(x) = 6$.

Άρα, η $f'(x) > 0$ αν $x < 1$ ή $x > 3$ και $f'(x) < 0$ αν $1 < x < 3$. Επομένως, η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [1,3] και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$.

(ii) Για τα ακρότατα :

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$.

Για $x=1$ η $f''(1)=-6<0$ άρα το σημείο $(1,4)$ είναι τοπικό μέγιστο.

Για $x=3$ η $f''(3)=6>0$ άρα το σημείο $(3,0)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

(iii)-(iv)
Στα σημεία καμπής πρέπει να ισχύει ότι $f''(x)=0$ και $f'''(x)\neq 0$.
Επομένως, $f''(x)=6(x-2)=0 \Rightarrow x=2$,
στο οποίο η f΄΄΄(2)=6 δεν μηδενίζεται. Άρα το σημείο $(2,2)$ είναι σημείο καμπής.

Η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα $(-\infty,2)$, όπου $f''<0$, και τα κοίλα προς τα πάνω στο διάστημα $(2,+\infty)$, όπου $f''>0$.

(v) Η συνάρτηση τέμνει τον άξονα των *x* στα σημεία όπου y=f(x)=0 δηλαδή στα (0,0) και (3,0) και επειδή f(0)=0 τέμνει τον άξονα των *y* στο σημείο (0,0).

vi) Η συνάρτηση δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτο αφού για κάθε $a\in\mathbb{R}$ είναι
$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)\neq\pm\infty$.

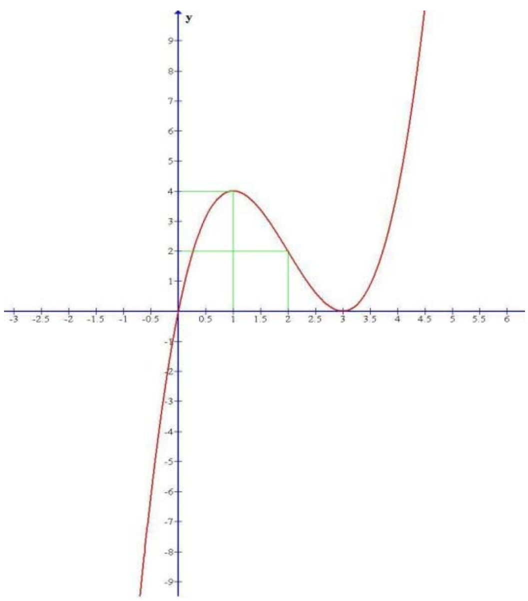
Επίσης δεν έχει και πλάγια ασύμπτωτο αφού $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}(x-3)^2=+\infty$

Ούτε οριζόντια ασύμπτωτο αφού, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x(x-3)^2=+\infty$ και
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x(x-3)^2=-\infty$.

vii) Τα παραπάνω συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

	$-\infty$		**0**		**1**		**2**		**3**		$-\infty$
f'		+		+	**0**	-		-	**0**	+	
f''		-		-		-	**0**	+		+	
f		↗	**0**	↗		↘		↘	**0**	↗	
					τ. max		**σ.κ.**		**τ. min**		

Από την παραπάνω μελέτη προκύπτει η ακόλουθη μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης :



Άσκηση 4. (15 **μονάδες**)

i) (5 μονάδες) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{-x}$. Βρείτε τους τέσσερις πρώτους όρους του αναπτύγματος Taylor της f με κέντρο x_0=0 και υπολογίστε προσεγγιστικά την τιμή της στο σημείο x=0.2.

ii) (5 μονάδες) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του προηγούμενου υποερωτήματος, βρείτε μία προσέγγιση για το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)dx$.

iii) (5 μονάδες) Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση βρείτε την ακριβή τιμή του $\int_0^1 f(x)dx$ και υπολογίστε το σφάλμα της προηγούμενης προσέγγισης.

Υπόδειξη: Δείτε τα παράδειγμα σελίδα 10 και άσκηση 5 σελίδα 13 στο κεφάλαιο Σειρές Taylor στο Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό.

Λύση

i)

Ο τύπος της σειράς με κέντρο το 0 είναι $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Υπολογίζουμε τις επιμέρους ποσότητες:

$$f(x) = xe^{-x}, f(0) = 0$$
$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x}, f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -2e^{-x} + xe^{-x}, f''(0) = -2$$
$$f'''(x) = 3e^{-x} - xe^{-x}, f'''(0) = 3$$

Η σειρά Taylor στο *x*=0 είναι

$$xe^{-x} = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + ... =$$
$$= 0 + \frac{1}{1!}x - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3 + ... = x - x^2 + \frac{x^3}{2} + ...$$

Οπότε χρησιμοποιώντας τους τέσσερις πρώτους όρους του αναπτύγματος Taylor της f έχουμε ότι

$$xe^{-x} \approx x - x^2 + \frac{x^3}{2}$$

Αντικαθιστώντας τη τιμή 0.2 συμπεραίνουμε ότι

$$f(0.2) \approx 0 + 0.2 - 0.2^2 + \frac{0.2^3}{2} = 0.164$$

Αντικαθιστώντας τη τιμή 0.2 στη συνάρτηση στο Mathematica παίρνουμε την τιμή:

$$f(0.2) = 0.2 \cdot e^{-0.2} = 0.163746$$

ii) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του προηγούμενου υποερωτήματος

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x\cdot e^{-x}dx \approx \int_0^1 \left(x - x^2 + \frac{x^3}{2} \right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} \right]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = 0.292$$

iii) Η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος είναι :

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x\cdot e^{-x}dx = \int_0^1 x\cdot \left(-e^{-x}\right)' dx = \left[-xe^{-x}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 x'\cdot\left(-e^{-x}\right)dx$$
$$= -e^{-1} + \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} + \left[-e^{-x}\right]_{x=0}^{x=1} = -e^{-1} - e^{-1} + e^0 = -2e^{-1} + 1$$

Επομένως, το σφάλμα της προσέγγισης που έγινε στο υποερώτημα ii είναι:
(Πραγματική τιμή) – (Προσεγγιστική τιμή) = $\left(-2e^{-1}+1\right)$ – 0.292 = 0.264 - 0.292 = -0.028.

Άσκηση 5. (15 μονάδες)

Υπολογίστε τα επόμενα ολοκληρώματα :

i) $\int (ax^2 + bx + c)e^{-x}dx \quad (a,b,c \in \mathbb{R})$

ii) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}dx$

iii) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$

Υπόδειξη: Θα φανεί χρήσιμη η σχέση $u^3+1=(u+1)(u^2-u+1)$.

Λύση

i)

Χρησιμοποιούμε τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

και έχουμε:

$$\int (ax^2+bx+c)e^{-x}dx = \int (ax^2+bx+c)(-e^{-x})'dx =$$
$$= -(ax^2+bx+c)e^{-x} - \int (ax^2+bx+c)'(-e^{-x})dx =$$
$$= -(ax^2+bx+c)e^{-x} + \int (2ax+b)e^{-x}dx =$$
$$= -(ax^2+bx+c)e^{-x} + \int (2ax+b)(-e^{-x})'dx =$$
$$= -(ax^2+bx+c)e^{-x} + \left[(2ax+b)(-e^{-x}) - \int (2ax+b)'(-e^{-x})dx \right] =$$
$$= -(ax^2+bx+c)e^{-x} - (2ax+b)e^{-x} + \int 2ae^{-x}dx =$$
$$= -(ax^2+bx+c)e^{-x} - (2ax+b)e^{-x} + 2a\int \left(-e^{-x}\right)' dx =$$

$$= -(ax^2+bx+c)e^{-x} - (2ax+b)e^{-x} - 2ae^{-x} + C =$$
$$= -\left[ax^2 + (b+2a)x + (c+b+2a) \right] e^{-x} + C$$

ii)

Αντικαθιστούμε $y = 1-3x$, οπότε $dy = -3dx \Leftrightarrow dx = -\frac{1}{3}dy$ και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt[3]{y}}dy = -\frac{1}{3}\int y^{-1/3}dy = -\frac{1}{3}\frac{y^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c =$$

$$-\frac{1}{3}\frac{y^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{y^2} + c = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(1-3x\right)^2} + C$$

iii)

Θέτουμε

$$u = e^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow \frac{1}{u}du = dx$$

και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I = \int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx = \int \frac{u^3+1}{u+1}\cdot\frac{1}{u}\ du$$

Ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή, αλλά

$u^3+1 = (u+1)(u^2-u+1)$

και

$$\frac{u^3+1}{u(u+1)} = \frac{(u+1)(u^2-u+1)}{u(u+1)} = \frac{u^2-u+1}{u} = u-1+\frac{1}{u}$$

Άρα

$$I = \int\left(u-1+\frac{1}{u}\right)du = \int(u-1)du + \int\frac{1}{u}du = \frac{u^2}{2} - u + \ln\left|u\right| + C = \frac{e^{2x}}{2} - e^x + x + C$$

(Σημείωση: επειδή $u = e^x \Leftrightarrow \left|u\right| = u$)

Μια εναλλακτική λύση χωρίς χρήση αλλαγής μεταβλητής:

$$\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx = \int\frac{\left(e^x\right)^3+1}{e^x+1}dx = \int\frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^x+1}dx = \int(e^{2x}-e^x+1)dx = \int(\frac{2e^{2x}}{2}-e^x+1)dx =$$
$$= \frac{e^{2x}}{2} - e^x + x + C$$