Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης ΓΕ

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας» και αποστέλλει το έντυπο σε δύο μη συρραμμένα αντίγραφα (ή ηλεκτρονικά) στον Καθηγητή-Σύμβουλο. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος συμπληρώνει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας» και στα δύο αντίγραφα και επιστρέφει το ένα στο φοιτητή μαζί με τα σχόλια επί της ΓΕ, ενώ κρατά το άλλο για το αρχείο του μαζί με το γραπτό σημείωμα του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

*Σε περίπτωση ηλεκτρονικής υποβολής του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου θα πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: Π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 5η ΓΕ του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στη ΠΛΗ12 θα πρέπει να γραφεί: «**ioannou_ge5_plh12.doc**».*

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στοιχεία Φοιτητή: Ονομ/νυμο, διευθ/ση, τηλ., -ηλεκτρονική διεύθυνση	<……………………………………………………………> <……………………………………………………………> <……………………………………………………………> <……………………………………………………………>

ΚωδικόςΘΕ	**ΠΛΗ12**	Ονοματεπώνυμο Καθηγητή - Σύμβουλου	………………..
Κωδικός Τμήματος	**<…. >**	Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής σύμφωνα με το ακ. ημερολόγιο (***ημέρα Τρίτη***)	**28/4/2009**
Ακ. Έτος	**2008-09**	Ημερομηνία αποστολής ΓΕ από το φοιτητή	
α/α ΓΕ	**5η**	Επισυνάπτεται (*σε περίπτωση που έχει ζητηθεί*) η άδεια παράτασης από το Συντονιστή;	ΝΑΙ / ΟΧΙ

***<u>Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή</u>**: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα..*

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής ΓΕ από το φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στο φοιτητή	
Βαθμολογία *(αριθμητικά, ολογράφως)*	

Υπογραφή Φοιτητή **Υπογραφή Καθηγητή-Συμβούλου**

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 5η

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: 28 Μαρτίου 2009
Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 24 Απριλίου 2009

Πριν από την λύση κάθε άσκησης καλό είναι να μελετώνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις των υποδείξεων και παραπομπών στα συγγράμματα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της πέμπτης εργασίας αναφέρονται στα:

Ενότητα 10 (Γενικευμένη Ολοκλήρωση)
του συγγράμματος του ΕΑΠ «**Λογισμός Μιας Μεταβλητής**» του Γ. Δάσιου

Ενότητα 2 (2.1 – 2.5**)** (Βασική Πιθανοθεωρία)
Ενότητα 3 (3.1, 3.3.1, 3.3.2, 4.5, 4.7**)** (Τυχαίες μεταβλητές και χαρακτηριστικά των κατανομών τους – Χρήσιμα πρότυπα κατανομών)
του συγγράμματος του ΕΑΠ «Βασικά Εργαλεία και Μέθοδοι για τον Έλεγχο της Ποιότητας» του κ. Ι. Κουτρουβέλη

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα συμβουλευθείτε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στη http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm ως εξής:

Συνοδευτικό **Ε**κπαιδευτικό **Υ**λικό :
Λογισμός Ολοκληρώματα 1 (για άσκηση 2), Ολοκληρώματα 2 (για άσκηση 1)
Πιθανότητες Πιθανότητες 1 και Πιθανότητες 2 (για ασκήσεις 3-6)

Στόχοι:

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι :
α) η κατανόηση τεχνικών ολοκλήρωσης καθώς και ο υπολογισμός γενικευμένων ολοκληρωμάτων,
β) η κατανόηση της έννοιας της πιθανότητας καθώς και ο υπολογισμός της πιθανότητας ενδεχομένων βάσει προτάσεων από την αξιωματική θεωρία των πιθανοτήτων,
γ) η κατανόηση της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής και ο υπολογισμός βάσει κατάλληλων συναρτήσεων της πιθανοτικής συμπεριφοράς τυχαίων μεταβλητών που περιγράφουν τα αποτελέσματα ενός πειράματος.

Θέμα 1. (16 μονάδες)

Να υπολογιστούν τα αόριστα ολοκληρώματα:

1. $I_1 = \int \frac{\cos^3(x)}{\sin^2(x)}dx$ **2.** $I_2 = \int x\sqrt{2x+1}dx$

3. $I_3 = \int \frac{3x-1}{x^2+x-6}dx$ **4.** $I_4 = \int e^x \sin(kx)dx$, $k \in \mathbb{N}$

Υπόδειξη: Στην (1) να γίνει ολοκλήρωση με αντικατάσταση ώστε να φύγουν οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις (κεφ.3 από ΣΕΥ). Στην (2) να γίνει ολοκλήρωση με αντικατάσταση ώστε να φύγουν τα ριζικά (κεφ.3 από ΣΕΥ). Στην (3) μπορείτε να αναλύσετε το κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων (κεφ.7 από ΣΕΥ). Στην (4) μπορείτε να χρησιμοποιήσετε παραγοντική ολοκλήρωση (κεφ.5 από ΣΕΥ).

<u>Λύση</u>

1. Θέτουμε $u = \sin x \Rightarrow du = (\sin x)' dx = \cos x dx$ και άρα έχουμε

$$I_1 = \int \frac{\cos^3(x)}{\sin^2(x)}dx = \int \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}\cos x dx = \int \frac{1-\sin^2(x)}{\sin^2(x)}\cos x dx =$$

$$\overset{u=\sin x}{\underset{du=\cos x dx}{=}} \int \frac{1-u^2}{u^2}du = \int\left(\frac{1}{u^2}-1\right)du = \int\left(u^{-2}-1\right)du =$$

$$= \frac{u^{-2+1}}{-2+1} - u + c = -u^{-1} - u + c \overset{u=\sin x}{=} -\frac{1}{\sin x} - \sin x + c$$

2. Θέτουμε $u = \sqrt{2x+1}$ όπου $u \geq 0$ και συνεπώς

$$du = \left[(2x+1)^{1/2}\right]' dx = \frac{1}{2}(2x+1)^{-1/2}(2x+1)' dx = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2x+1}}dx = \frac{1}{u}dx \Rightarrow dx = udu$$

Επίσης λύνοντας ως προς x θα έχουμε $x = \frac{u^2-1}{2}$. Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα I_2 θα έχουμε

$$I_2 = \int x\sqrt{2x+1}dx = \int \frac{u^2-1}{2} \times u \times udu = \frac{1}{2}\int\left(u^4-u^2\right)du =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{4+1}}{4+1} - \frac{u^{2+1}}{2+1}\right) + c = \frac{u^5}{10} - \frac{u^3}{6} + c$$

Συνεπώς

$$I_2 = \frac{u^5}{10} - \frac{u^3}{6} + c \overset{u=\sqrt{2x+1}}{=} = \frac{(2x+1)^{\frac{5}{2}}}{10} - \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{6} + c$$

3. Αναλύουμε το κλάσμα σε επιμέρους κλάσματα

$$\frac{3x-1}{x^2+x-6} = \frac{3x-1}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{(A+B)x+(3A-2B)}{(x-2)(x+3)}$$

και εξισώνουμε τους συντελεστές των δυνάμεων του x στον αριθμητή του αρχικού και του τελικού κλάσματος

$$A+B=3$$
$$3A-2B=-1$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα θα έχουμε

$$A=1, B=2$$

και άρα

$$\frac{3x-1}{x^2+x-6}=\frac{3x-1}{(x-2)(x+3)}=\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+3}$$

Οι παραπάνω συντελεστές θα μπορούσαν να προκύψουν και ως εξής :

$$A=\lim_{x\to 2}(x-2)\frac{3x-1}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x-1}{x+3}=\frac{3\times 2-1}{2+3}=\frac{5}{5}=1$$
$$B=\lim_{x\to -3}(x+3)\frac{3x-1}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to -3}\frac{3x-1}{x-2}=\frac{3\times(-3)-1}{-3-2}=\frac{-10}{-5}=2$$

Άρα

$$I_3=\int\frac{3x-1}{x^2+x-6}dx=\int\frac{3x-1}{(x-2)(x+3)}dx=\int\left(\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+3}\right)dx=$$
$$=\ln\left(|x-2|\right)+2\ln\left(|x+3|\right)+c$$

4.

$$I_4=\int e^x\sin(kx)dx=\int e^x\left(-\frac{1}{k}\cos(kx)\right)'dx=-\frac{1}{k}e^x\cos(kx)-\int\left(-\frac{1}{k}\cos(kx)\right)\left(e^x\right)'dx=$$
$$=-\frac{1}{k}e^x\cos(kx)+\frac{1}{k}\int\cos(kx)e^xdx=-\frac{1}{k}e^x\cos(kx)+\frac{1}{k}\int e^x\left(\frac{1}{k}\sin(kx)\right)'dx=$$
$$=-\frac{1}{k}e^x\cos(kx)+\frac{1}{k}e^x\left(\frac{1}{k}\sin(kx)\right)-\frac{1}{k}\int\frac{1}{k}\sin(kx)\left(e^x\right)'dx=$$
$$=-\frac{1}{k}e^x\cos(kx)+\frac{1}{k^2}e^x\sin(kx)-\frac{1}{k^2}\int e^x\sin(kx)dx=$$
$$=-\frac{1}{k}e^x\cos(kx)+\frac{1}{k^2}e^x\sin(kx)-\frac{1}{k^2}I_4\Rightarrow$$
$$\left(1+\frac{1}{k^2}\right)I_4=-\frac{1}{k}e^x\cos(kx)+\frac{1}{k^2}e^x\sin(kx)\Rightarrow$$
$$I_4=\frac{-\frac{1}{k}e^x\cos(kx)+\frac{1}{k^2}e^x\sin(kx)}{\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}=\frac{-\frac{k}{k^2}e^x\cos(kx)+\frac{1}{k^2}e^x\sin(kx)}{\frac{k^2+1}{k^2}}=\frac{-ke^x\cos(kx)+e^x\sin(kx)}{k^2+1}$$

Άρα $I_4=\dfrac{-ke^x\cos(kx)+e^x\sin(kx)}{k^2+1}+c$.

Θέμα 2. (16 μονάδες)

Να υπολογίσετε τα γενικευμένα ολοκληρώματα :

1. $I_1 = \int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx$ **2.** $I_2 = \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

3. $I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ **4.** $I_4 = \int_1^{+\infty} (1-x)e^{-x}dx$

Υπόδειξη: Τα παραπάνω ολοκληρώματα είναι γενικευμένα ολοκληρώματα α', β' και γ' είδους τα οποία μελετάει το Κεφ. 10 του βιβλίου (Κεφ. 10.1 και 10.2) (δείτε επίσης ΣΕΥ Ολοκληρώματα 1, σελ. 19). Στις (1) και (3) να γίνει ολοκλήρωση με αντικατάσταση ώστε να φύγουν τα ριζικά (κεφ.3 από ΣΕΥ). Στην (2) επίσης με αντικατάσταση του εκθέτη. Στην (4) μπορείτε να χρησιμοποιήσετε παραγοντική ολοκλήρωση (κεφ.5, ΣΕΥ).

Λύση

1. (1^{ος} Τρόπος) Επειδή ο παρονομαστής μηδενίζεται στο x=1 θα έχουμε

$$I_1 = \int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{t\to 1^+}\int_t^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx .$$

Το αόριστο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx = \int \frac{(x-1)-1}{\sqrt{x-1}}dx = \int \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}dx - \int \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx .$$

Αντικαθιστούμε $z = x-1$, $dx = dz$ και έχουμε:

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}dx = \int \sqrt{z}dz = \frac{2}{3}(z)^{3/2} + C_1 = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C_1 ,$$

άρα $\int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}dx = \left[\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}\right]_1^2 = \frac{2}{3}$. Με τον ίδιο τρόπο έχουμε

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \int z^{-1/2}dz = 2z^{1/2} + C_2 = 2(x-1)^{1/2} + C_2$$

άρα $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = 2\lim_{t\to 1^+}\left[\sqrt{x-1}\right]_t^2 = 2\left(1 - \lim_{t\to 1^+}\sqrt{t-1}\right) = 2$.

Το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται $I_1 = \int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$.

(2^{ος} Τρόπος)

Επειδή ο παρονομαστής μηδενίζεται στο x=1 θα έχουμε

$$I_1 = \int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{t\to 1^+}\int_t^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx .$$

Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα. Θέτουμε $u=\sqrt{x-1}$ ή $x=u^2+1$, $dx=2udu$ και έχουμε

$$\int \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx=\int \frac{u^2-1}{u}2udu=2\int\left(u^2-1\right)du=2\left(\int u^2du-\int udu\right)=\frac{2}{3}u^3-2u+C=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3-2\sqrt{x-1}+C$$

Το ορισμένο ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_t^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx=\left(\frac{2}{3}\left(\sqrt{2-1}\right)^3-2\sqrt{2-1}\right)-\left(\frac{2}{3}\left(\sqrt{t-1}\right)^3-2\sqrt{t-1}\right)=\frac{-4}{3}-\left(\frac{2}{3}\left(\sqrt{t-1}\right)^3-2\sqrt{t-1}\right)$$

Άρα $I_1=\lim\limits_{t\to 1^+}\int_t^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx=\frac{-4}{3}-0=\frac{-4}{3}$.

2. Έστω η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ που ορίζεται από τον τύπο $f(x)=xe^{-x^2}$. Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής και επομένως ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[0,t]$, για $t>0$. Έχουμε $I_2=\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t xe^{-x^2}dx$. Υπολογίζουμε το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα. Θέτουμε $u=-x^2$, $du=-2xdx$ και έχουμε:

$$\int xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int\left(e^{-x^2}\right)(-2x)dx=-\frac{1}{2}\left(\int e^u du\right)=-\frac{1}{2}e^u+C=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.$$

Επομένως $\int_0^t xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}e^{-t^2}+\frac{1}{2}$. Έχουμε $I_2=\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

Άρα $I_2=\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}=\frac{1}{2}$

3. Έχουμε $I_3=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}=\int_0^1\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$. Υπολογίζουμε το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$. Αντικαθιστούμε $x=z^2$, $dx=2zdz$ και έχουμε $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}=\int\frac{2zdz}{\left(z^2+1\right)z}=2\int\frac{dz}{z^2+1}=2Arc\tan(z)+C$. Επαναφέρουμε την αρχική μεταβλητή x και έχουμε $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}=2Arc\tan(\sqrt{x})+C$. Υπολογίζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0^+}\left(\int_t^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}\right) = \lim_{t\to 0^+}\left[2Arc\tan(\sqrt{x})\right]_t^1 = \lim_{t\to 0^+}\left(\pi/2 - 2Arc\tan(\sqrt{t})\right) = \pi/2 - 0 = \pi/2$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \lim_{t\to +\infty}\left(\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}\right) = \lim_{t\to +\infty}\left[2Arc\tan(\sqrt{x})\right]_1^t = \lim_{t\to +\infty}\left(2Arc\tan(\sqrt{t}) - \pi/2\right) =$$

$$= 2\cdot \pi/2 - \pi/2 = \pi/2$$

Άρα $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \pi/2 + \pi/2 = \pi$.

4. Έστω η συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ που ορίζεται από τον τύπο $f(x)=(1-x)e^{-x}$. Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής και επομένως ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[1,t]$, για $t>0$. Έχουμε $I_4 = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t (1-x)e^{-x}dx$. Υπολογίζουμε το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα με παραγοντική ολοκλήρωση και έχουμε:

$$\int (1-x)e^{-x}dx = -\int (1-x)\left(e^{-x}\right)' dx = \int (x-1)\left(e^{-x}\right)' dx = (x-1)e^{-x} - \int e^{-x}\left(x-1\right)' dx =$$

$$= (x-1)e^{-x} - \int e^{-x}dx = (x-1)e^{-x} + e^{-x} + C = xe^{-x} + C$$

Άρα $\displaystyle\int_1^t (1-x)e^{-x}dx = \left[xe^{-x}\right]_1^t = \frac{t}{e^t} - \frac{1}{e}$. Για να βρούμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα πρέπει να βρούμε το όριο $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}$ που είναι της μορφής $\displaystyle\frac{+\infty}{+\infty}$. Εφαρμόζουμε τον κανόνα του De L' Hospital, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{(t)'}{\left(e^t\right)'} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^t} = 0$. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα γίνεται $\displaystyle I_4 = \int_1^{+\infty}(1-x)e^{-x}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t (1-x)e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{e^t} - \frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$

Θέμα 3. (20 μονάδες)

Ρίχνουμε ένα ζάρι διαδοχικά τρεις φορές. Θεωρούμε τα εξής ενδεχόμενα:

Α: και στις τρεις ρίψεις έρχεται το ίδιο αποτέλεσμα,
Β: το άθροισμα των αριθμών στις τρεις ρίψεις είναι 5,
Γ: στη πρώτη ρίψη έρχεται το 1 και στην τρίτη έρχεται το 3,
Δ: στη δεύτερη ρίψη έρχεται το 1.

a) (8 μονάδες) Να περιγράψετε το δειγματοχώρο Ω του παραπάνω πειράματος. Πόσα στοιχεία έχει; Να βρείτε ποια υποσύνολά του αντιστοιχούν στα ενδεχόμενα Α, Β, Γ και Δ και στη συνέχεια να υπολογίσετε τις πιθανότητες Ρ(Α), Ρ(Β), Ρ(Γ), Ρ(Δ).

b) (12 Μονάδες) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A\cup\Delta)$, $P(B\cup\Gamma)$, $P(B'\cap\Delta')$ και $P(\Delta\,|\,A)$. Εξετάστε αν τα ενδεχόμενα Α, Δ είναι ανεξάρτητα. Ομοίως για τα ενδεχόμενα Β, Γ και για τα Γ, Δ. Βρείτε ποια ζεύγη ενδεχομένων από τα Α, Β, Γ, Δ αποτελούνται από ξένα μεταξύ τους ενδεχόμενα.

Υπόδειξη. Η έννοια του δειγματικού χώρου ορίζεται στο Κεφ. 2.2 του βιβλίου, ενώ βασικές προτάσεις και η αξιωματική θεμελίωση της πιθανότητας αναφέρονται στο Κεφ. 2.3 του βιβλίου (δείτε επίσης ΣΕΥ, Κεφ. 1.1 από Πιθανότητες Ι). Θα χρειαστεί επίσης να μελετήσετε το Κεφ. 2.5 του βιβλίου που αναφέρεται στην δεσμευμένη πιθανότητα (δείτε επίσης ΣΕΥ, Κεφ. 1.2 και Κεφ. 1.3 από Πιθανότητες Ι).

Λύση

a) Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από όλες τις διατεταγμένες τριάδες (α,β,γ) όπου τα α,β,γ ανήκουν στο σύνολο {1,2,3,4,5,6} των δυνατών αποτελεσμάτων της ρίψης ενός ζαριού. Άρα το Ω έχει 6^3=216 στοιχεία. Έχουμε τώρα:

i) Α={(1,1,1), (2,2,2), (3,3,3), (4,4,4), (5,5,5), (6,6,6)}, άρα $P(A)=\dfrac{\#(A)}{\#(\Omega)}=\dfrac{6}{216}=\dfrac{1}{36}$.

ii) Β={(1,1,3), (1,3,1), (1,2,2), (2,1,2), (2,2,1), (3,1,1)} (όλες οι τριάδες με άθροισμα 5) άρα $P(B)=\dfrac{\#(B)}{\#(\Omega)}=\dfrac{6}{216}=\dfrac{1}{36}$.

iii) Γ={(1,1,3), (1,2,3), (1,3,3), (1,4,3), (1,5,3), (1,6,3)} άρα $P(\Gamma)=\dfrac{\#(\Gamma)}{\#(\Omega)}=\dfrac{6}{216}=\dfrac{1}{36}$.

iv) Δ={(α,1,β) : τα α,β ανήκουν στο {1,2,3,4,5,6}} άρα $P(\Delta)=\dfrac{\#(\Delta)}{\#(\Omega)}=\dfrac{6^2}{216}=\dfrac{1}{6}$.

b) Εύκολα φαίνεται ότι $A\cap\Delta=\{(1,1,1)\}$ άρα $P(A\cap\Delta)=\dfrac{\#(A\cap\Delta)}{\#(\Omega)}=\dfrac{1}{216}$ που δίνει $P(A\cup\Delta)=P(A)+P(\Delta)-P(A\cap\Delta)=\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{216}=\dfrac{41}{216}$.

Επίσης $B\cap\Gamma=\{(1,1,3)\}$ άρα $P(B\cap\Gamma)=\dfrac{\#(B\cap\Gamma)}{\#(\Omega)}=\dfrac{1}{216}$ που δίνει

$$P(B\cup\Gamma)=P(B)+P(\Gamma)-P(B\cap\Gamma)=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}-\frac{1}{216}=\frac{11}{216}.$$

Από τους τύπους του de Morgan έχουμε $B'\cap\Delta'=(B\cup\Delta)'$ και αφού $B\cap\Delta=\{(1,1,3),(2,1,2),(3,1,1)\}$ βρίσκουμε

$$P(B\cup\Delta)=P(B)+P(\Delta)-P(B\cap\Delta)=\frac{1}{36}+\frac{1}{6}-\frac{3}{216}=\frac{39}{216}=\frac{13}{72}$$ άρα

$$P(B'\cap\Delta')=1-P(B\cup\Delta)=1-\frac{13}{72}=\frac{59}{72}.$$

Επίσης $P(\Delta|A)=\dfrac{P(A\cap\Delta)}{P(A)}=\dfrac{1/216}{1/36}=\dfrac{1}{6}$.

Τώρα αφού $P(A \cap \Delta) = \frac{1}{216} = \frac{1}{36} . \frac{1}{6} = P(A)P(\Delta)$ τα Α,Δ είναι ανεξάρτητα και αφού

$P(B \cap \Gamma) = \frac{1}{216} \neq \frac{1}{36} . \frac{1}{36} = P(B)P(\Gamma)$ τα Β,Γ δεν είναι ανεξάρτητα ενώ αφού

$P(\Gamma \cap \Delta) = \frac{1}{216} = \frac{1}{36} . \frac{1}{6} = P(\Gamma)P(\Delta)$, τα Γ,Δ είναι ανεξάρτητα.

Εύκολα φαίνεται δε ότι τα Α,Β είναι ξένα, τα Α,Γ είναι ξένα και κανένα άλλο ζεύγος.

Θέμα 4. (18 μονάδες)

Σε ένα εργοστάσιο υπάρχουν δύο μηχανές Α και Β που κατασκευάζουν το 40% και 60% των προϊόντων αντίστοιχα. Είναι γνωστό από την εμπειρία του παρελθόντος ότι το 2% και 3% των προϊόντων τα οποία δημιουργούνται από τις μηχανές Α και Β αντίστοιχα είναι ελαττωματικά.

a) (6 μονάδες) Να υπολογίσετε την πιθανότητα το τυχαίο προϊόν που θα επιλέξουμε από το εργοστάσιο να είναι ελαττωματικό.

b) (6 μονάδες) Αν επιλέξουμε ένα προϊόν τυχαία από το εργοστάσιο και βρούμε ότι είναι ελαττωματικό, ποια η πιθανότητα να κατασκευάστηκε στην μηχανή Α;

c) (6 μονάδες) Αν επιλέξουμε ένα προϊόν τυχαία από το εργοστάσιο και βρούμε ότι δεν είναι ελαττωματικό, ποια η πιθανότητα να κατασκευάστηκε στην μηχανή Β;

Υπόδειξη. Να ορίσετε τα γεγονότα Ε={το προϊόν είναι ελαττωματικό},Ε'={το προϊόν δεν είναι ελαττωματικό}, Α={το προϊόν κατασκευάστηκε στην μηχανή Α}, Β={το προϊόν κατασκευάστηκε στην μηχανή Β}. Θα σας βοηθήσει ιδιαίτερα το κεφάλαιο 2.5 του βιβλίου (Δεσμευμένη Πιθανότητα) καθώς και το κεφάλαιο 1.3 από το ΣΕΥ Πιθανότητες Ι που αναφέρεται στο ίδιο αντικείμενο.

Λύση Ορίζουμε τα ενδεχόμενα :

Ε={το προϊόν είναι ελαττωματικό}
Ε'={το προϊόν δεν είναι ελαττωματικό}
Α={το προϊόν κατασκευάστηκε στην μηχανή Α}
Β={το προϊόν κατασκευάστηκε στην μηχανή Β}

Τότε θα έχουμε :

(a)

$$P(E) = P(A)P(E/A) + P(B)P(E/B) = 0.40 \times 0.02 + 0.60 \times 0.03 = 0.026 = 2.6\%$$

(b)

$$P(A/E) = \frac{P(E/A)P(A)}{P(A)P(E/A) + P(B)P(E/B)} =$$

$$= \frac{0.02 \times 0.40}{0.40 \times 0.02 + 0.60 \times 0.03} = 0.307692 = 30.7692\%$$

(c)

$$P(B/E') = \frac{P(E'/B)P(B)}{P(E')} = \frac{P(E'/B)P(B)}{1-P(E)}$$
$$= \frac{0.97 \times 0.60}{1-0.026} = 0.597536 = 59.7536\%$$

Θέμα 5. (20 μονάδες)

a) Η τυχαία μεταβλητή Χ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} kx & 0 < x \le \frac{1}{2} \\ k(1-x) & \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0 & x \le 0 \text{ ή } x \ge 1 \end{cases}$$

i) (5μονάδες) Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού *k*.

ii) (5 μονάδες) Να βρεθούν οι πιθανότητες $P\left(X < \frac{1}{2}\right)$ και $P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}\right)$.

Να εξετασθεί αν τα ενδεχόμενα $A = \left\{X < \frac{1}{2}\right\}$ και $B = \left\{\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}\right\}$ είναι ανεξάρτητα.

b) (5μονάδες) Η μηνιαία κατανάλωση πετρελαίου για θέρμανση μιας πολυκατοικίας σε χιλιάδες λίτρα είναι τυχαία μεταβλητή Χ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4, & \alpha\nu \quad 0 < x < 1 \\ 0, & \alpha\nu \quad x \notin (0,1) \end{cases}$$

Ποια χωρητικότητα πρέπει να έχει η δεξαμενή του λέβητα ώστε η πιθανότητα να εξαντληθεί το πετρέλαιο σε ένα μήνα να είναι 1% ;

c) (5μονάδες) Μια τυχαία μεταβλητή Χ έχει ομοιόμορφη κατανομή $U(a,b)$ με μέση τιμή $\mu = 1$ και διασπορά $\sigma^2 = \frac{4}{3}$. Να βρεθεί η πιθανότητα $P(X < 0)$.

Υπόδειξη. Για το ερώτημα (α) θα χρειαστεί να μελετήσετε την έννοια της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (Κεφ. 3.1 του βιβλίου) και πιο συγκεκριμένα τον ορισμό στη σελ. 59, ενώ η ανεξαρτησία ενδεχομένων έχει οριστεί στο Κεφ.2.5 του βιβλίου. Για το ερώτημα (b) θα πρέπει να μελετήσετε το Κεφ.2.5 του βιβλίου. Στο ερώτημα (c) θα χρειαστείτε τον ορισμούς της μέσης τιμής και της διασποράς που δίνονται στο Κεφ. 3.3.1 του βιβλίου (Κεφ. 2.3 από ΣΕΥ Πιθανότητες ΙΙ). Η ομοιόμορφη κατανομή ορίζεται στο Κεφ. 4.7.1 του βιβλίου (σελ.22 από ΣΕΥ, Πιθανότητες ΙΙ).

Λύση

(a) (i) Για να είναι η $f(x)$ συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας πρέπει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{0}^{1/2} kxdx + \int_{1/2}^{1} k(1-x)dx = 1 \Rightarrow \left[k\frac{x^2}{2} \right]_0^{1/2} + \left[k(x-\frac{x^2}{2}) \right]_{1/2}^{1} = 1 \Rightarrow k = 4$$

(ii)

$$P(X < \frac{1}{2}) = \int_{0}^{1/2} 4xdx = \frac{1}{2}, \qquad P(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}) = \int_{1/4}^{1/2} 4xdx + \int_{1/2}^{3/4} 4(1-x)dx = \frac{3}{4}$$

Για να είναι τα ενδεχόμενα Α και Β ανεξάρτητα πρέπει $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ που ισχύει μιας και

$$P(A \cap B) = \int_{1/4}^{1/2} 4xdx = \frac{3}{8}, \qquad P(A)P(B) = \frac{1}{2}\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

(b) Έστω ότι η χωρητικότητα του λέβητα είναι V.

Αν $V \geq 1$, τότε από τον ορισμό της πυκνότητας $P(X \geq V) = 0$. Αν $0 < V < 1$ έχουμε

$$P(X \geq V) = 0,01 \Rightarrow \int_{V}^{+\infty} f(x)dx = 0,01 \Rightarrow \int_{V}^{1} 5(1-x)^4 dx = 0,01 \Rightarrow \int_{1}^{V} -5(1-x)^4 dx = 0,01$$

$$\Rightarrow \left[(1-x)^5 \right]_1^V = 0,01 \Rightarrow (1-V)^5 = 0,01 \Rightarrow 1-V = (0,01)^{\frac{1}{5}} \Rightarrow V = 1-(0,01)^{\frac{1}{5}} \Rightarrow V \approx 0,6019$$

ή $V \approx 601,9$ λίτρα.

(c) Η ομοιόμορφη κατανομή έχει πυκνότητα

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \alpha\nu \quad a < x < b \\ 0, & \alpha\nu \quad x \notin (a,b) \end{cases}$$

Επομένως

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{a+b}{2}$$

και

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{a}^{b} \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b = \frac{1}{b-a}.\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$VarX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

Κατά συνέπεια έχουμε

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = 1 \\ \dfrac{(a-b)^2}{12} = \dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow b = 3, a = -1 .$$

Οι λύσεις $b = -1, a = 3$ απορρίπτονται αφού πρέπει $a < b$. Επομένως η συνάρτηση πυκνότητας είναι

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & \alpha\nu \quad -1 < x < 3 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

Άρα $P(X < 0) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}[x]_{-1}^{0} = \frac{1}{4}$.

Θέμα 6. (10 μονάδες)

Στον πρόσφατο διαγωνισμό του ΑΣΕΠ στο τεστ γενικών γνώσεων και δεξιοτήτων παρατηρήθηκε ότι τα αποτελέσματα ακολουθούσαν κανονική κατανομή με μέση τιμή *μ* και τυπική απόκλιση *σ*. 3.5% των αποτελεσμάτων είχαν βαθμολογία πάνω από 85 (η βαθμολογία κυμαινόταν από 0 έως 100), ενώ 6.1% είχαν βαθμολογία κάτω από 25.

- **a)** (5 μονάδες) Να βρεθούν οι τιμές των *μ* και *σ*.
- **b)** (5 μονάδες) Αν το κράτος αποφασίσει να προσλάβει το 10% των ατόμων που συγκέντρωσαν την υψηλότερη βαθμολογία να υπολογίσετε πάνω από πια βαθμολογία θα πρέπει να έχει γράψει κάποιος ώστε να ανήκει στην κατηγορία αυτή.

Υπόδειξη. Δείτε Κεφ.4.5 από το βιβλίο (ΣΕΥ Πιθανότητες 2, σελ.22), καθώς και τον Πίνακα ΙΙ.1 για την τυπική κανονική κατανομή στο Παράρτημα του βιβλίου.

Λύση

a) $P(X > 85) = 3.5\% \Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{85-\mu}{\sigma}\right) = 0.035 \Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{85-\mu}{\sigma}\right) = 0.965$

και από τον πίνακα της κανονικής κατανομής έχουμε

$$\frac{85-\mu}{\sigma} = 1.81 \Rightarrow \mu + 1.81\sigma = 85$$

Ακόμα

$$P(X < 25) = 6.1\% \Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{25-\mu}{\sigma}\right) = 0.061 \Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < -\frac{25-\mu}{\sigma}\right) = 0.939$$

και από τον πίνακα της κανονικής κατανομής έχουμε

$$\frac{\mu-25}{\sigma}=1,55 \Rightarrow \mu-1.55\sigma=25$$

Λύνοντας το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l}\mu+1.81\sigma=85\\ \mu-1.55\sigma=25\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\mu=52.7\\ \sigma=17.9\end{array}\right.$$

b)

$$P(X>a)=0.10 \Rightarrow P\left(\frac{\mathrm{X}-\mu}{\sigma}>\frac{a-\mu}{\sigma}\right)=0.10$$

$$\Rightarrow P\left(Z>\frac{a-\mu}{\sigma}\right)=0.10 \Rightarrow P\left(Z<\frac{a-\mu}{\sigma}\right)=0.90$$

και από τον πίνακα της κανονικής κατανομής έχουμε

$$z=\frac{a-\mu}{\sigma}=1.28 \Rightarrow \frac{a-52.7}{17.9}=1.28 \Rightarrow a=75.6$$

Άρα για να ανήκει κάποιος στο 10% των ατόμων που συγκέντρωσαν την υψηλότερη βαθμολογία θα πρέπει να έχει γράψει πάνω από 75.6.