ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 6η

Ημερομηνία Αποστολής στους Φοιτητές: 27 Απριλίου 2009
Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 29 Μαΐου 2009

Πριν από την λύση κάθε άσκησης καλό είναι να μελετώνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις των υποδείξεων και παραπομπών στα συγγράμματα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της τέταρτης εργασίας αναφέρονται στα:

Ενότητα 11 (Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων**)**
Ενότητα 12: 12.1-12.4 (Σειρές Fourier**)**

του συγγράμματος του ΕΑΠ «**Λογισμός Μιας Μεταβλητής**» του Γ. Δάσιου

Επιπλέον η εργασία αυτή βασίζεται σε μια επανάληψη των βασικών εννοιών του μαθήματος τις οποίες πρέπει να γνωρίζετε ώστε να προετοιμασθείτε για τις Τελικές Εξετάσεις. Η πρώτη άσκηση αναφέρεται στις εφαρμογές ολοκληρωμάτων η δεύτερη στις σειρές Fourier. Με το κεφάλαιο αυτό καλύπτεται η ύλη της ΠΛΗ12. Οι υπόλοιπες ασκήσεις είναι επαναληπτικές στην ύλη της Γραμμικής Άλγεβρας, του Λογισμού μίας μεταβλητής και των Πιθανοτήτων.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα συμβουλευθείτε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στη http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm ως εξής:

Συνοδευτικό **Ε**κπαιδευτικό **Υ**λικό :

Λογισμός Ολοκληρώματα 1, Σειρές Fourier

Στόχοι:

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να σας δώσει μια εικόνα των θεμάτων που θεωρούμε απολύτως απαραίτητα, για να εξεταστείτε επιτυχώς στην ΠΛΗ12.

Ασκηση 1 (15 μον.)

Α) (**8 μον.)** Να σχεδιάσετε το χωρίο που περικλείεται μεταξύ των γραφημάτων των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ με $a \le x \le b$, και να υπολογίσετε το εμβαδόν του: $f(x) = |x| + |x-1|, g(x) = 0,\ a = -1,\ b = 2$. Να επαληθεύστε το αποτέλεσμά σας, υπολογίζοντας το ζητούμενο εμβαδόν με στοιχειώδη γεωμετρία, απ'ευθείας από την γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Β) **(7 μον.)**Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού V που δημιουργείται μέσω περιστροφής του γραφήματος της συνάρτησης $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ γύρω από τον άξονα των x, για το διάστημα $x \in [0, \pi]$.

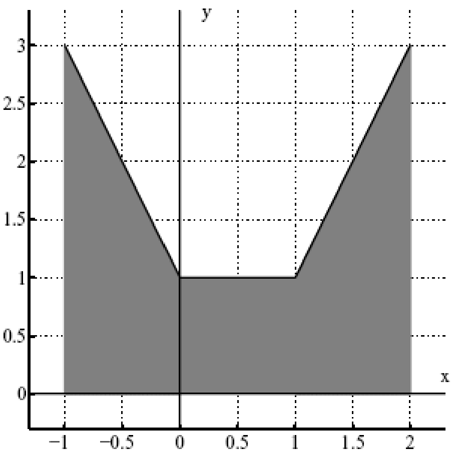
Υπόδειξη: Συμβουλευθείτε την παράγραφο 11.2 του συγγράμματος του ΕΑΠ και παρατηρήστε ότι $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$ και $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$).

Λύση:

Α) Προφανώς $f(x) \ge 0$, άρα:

$$
\begin{aligned}
E &= \int_{-1}^{2} \left(|x| + |x-1|\right) dx = \int_{-1}^{0} \left(|x| + |x-1|\right) dx + \int_{0}^{1} \left(|x| + |x-1|\right) dx + \int_{1}^{2} \left(|x| + |x-1|\right) dx \\
&= \int_{-1}^{0} \left(-x - x + 1\right) dx + \int_{0}^{1} \left(x - x + 1\right) dx + \int_{1}^{2} \left(x + x - 1\right) dx \\
&= \left[1 - 2\int_{-1}^{0} x dx\right] + 1 + \left[2\int_{1}^{2} x dx - 1\right] = \\
&= 1 - 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2} = 5
\end{aligned}
$$

Το αποτέλεσμα αυτό συμπίπτει με αυτό που βρίσκουμε αν υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν από το Σχήμα 1 αθροίζοντας το εμβαδόν του κάτω παραλληλογράμμου (με βάση 3 και ύψος 1) με αυτό των άνω δύο τριγώνων που συνθέτουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο βάσης 1 και ύψους 2.

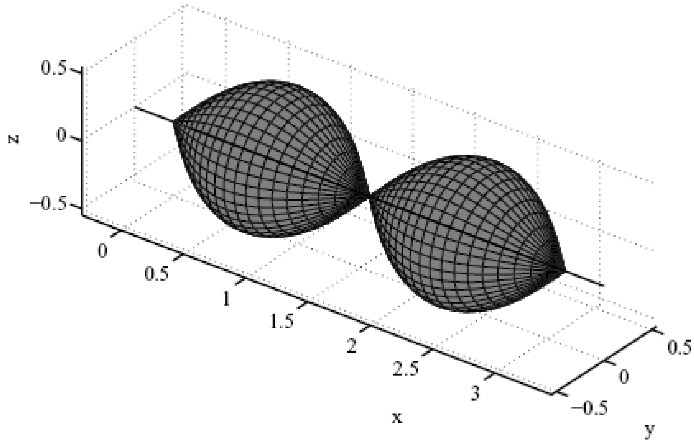


Σχήμα 1

Β) Το στερεό που δημιουργείται έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 2. Για τον υπολογισμό του όγκου του V, χρησιμοποιούμε τον τύπο $V=\int_a^b \pi f^2(x)\,dx$, ως εξής:

$$V=\int_0^\pi \pi\left[\sin x\cos x\right]^2 dx=\frac{\pi}{4}\int_0^\pi\left[\sin^2 2x\right]dx=\frac{\pi}{4}\int_0^\pi\left[\frac{1-\cos 4x}{2}\right]dx=\frac{\pi}{4}\int_0^\pi\frac{1}{2}dx-\frac{\pi}{4}\int_0^\pi\left[\frac{\cos 4x}{2}\right]dx=$$

$$=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{32}\int_0^\pi\left(\sin 4x\right)'dx=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{32}\left[\sin 4x\right]_0^\pi=\frac{\pi^2}{8}.$$



Σχήμα 2

Άσκηση 2 (16 μον.)

(α) (**6 μον.**) Για όλες τις δυνατές τιμές του ακεραίου αριθμού *n* να υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$I_n=\int_{-1}^{1}|x|\sin(\pi nx)dx,\quad J_n=\int_{-1}^{1}|x|\cos(\pi nx)dx$$

(β) (**6 μον.**) Δείξτε ότι η τριγωνομετρική σειρά Fourier της $f(x)=1-|x|$, $-1\le x\le 1$, είναι

$$1-|x|=\frac{1}{2}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2(2k-1)^2}\cos((2k-1)\pi x)$$

(γ) (**4 μον.**) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο ανάπτυγμα δείξτε ότι

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

Υπόδειξη: Σύμφωνα με τη θεωρία μας (ΣΕΥ, σειρές Fourier, σελ. 2) γνωρίζουμε ότι το ανάπτυγμα Fourier μιας συνάρτησης f(x) με πεδίο ορισμού το διάστημα [-π, π] είναι:

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)$ όπου:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,\quad \mathrm{n}\in\mathbb{N}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx,\quad \mathrm{n}\in\mathbb{N}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη γενικότερη περίπτωση όπου η συνάρτηση f(x) ορίζεται και είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα [-L,L]. Τότε η συνάρτηση $F(x)=f\left(\frac{Lx}{\pi}\right)$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα [-π,π] και η σειρά Fourier της είναι (σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις): $F(x)=f\left(\frac{Lx}{\pi}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)$. Εφαρμόζοντας την αντικατάσταση $t=\frac{Lx}{\pi}$ η σειρά Fourier της f(x) δίνεται από τη σχέση:

$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos\left(n\frac{\pi t}{L}\right)+b_n\sin\left(n\frac{\pi t}{L}\right)\right)$ με

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Lx}{\pi}\right)dx=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Lx}{\pi}\right)\cos(nx)dx=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(n\frac{\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Lx}{\pi}\right)\sin(nx)dx=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right)dx$$

Λύση:

(α) Για n=0 έχουμε

$$I_0=\int_{-1}^{1}|x|\sin(\pi nx)dx=\int_{-1}^{1}0dx=0$$

και

$$J_0=\int_{-1}^{1}|x|\cos(\pi nx)dx=\int_{-1}^{1}|x|\,dx=\int_{-1}^{0}-xdx+\int_{0}^{1}xdx=-\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{0}+\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Για $n\neq 0$ έχουμε:

$$I_n=\int_{-1}^{1}|x|\sin(\pi nx)dx=\underbrace{\int_{-1}^{0}-x\sin(\pi nx)dx}_{I1}+\underbrace{\int_{0}^{1}x\sin(\pi nx)dx}_{I2}.$$

Εφαρμόζοντας την αλλαγή μεταβλητής y=-x (dy=-dx) στο ολοκλήρωμα $I1$ παίρνουμε:

$I_1=\int_{-1}^{0}-x\sin(\pi nx)dx=-\int_{1}^{0}y\sin(-\pi ny)dy=\int_{1}^{0}y\sin(\pi ny)dy=-\int_{0}^{1}y\sin(\pi ny)dy=-I_2$, οπότε:

$\int_{-1}^{1}|x|\sin(\pi nx)dx=0$. Αυτό, βέβαια, προκύπτει άμεσα και από το γεγονός ότι η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι περιττή.

Χρησιμοποιώντας ανάλογη διαδικασία για το ολοκλήρωμα J_n παίρνουμε:

$$J_n = \int_{-1}^{1} |x|\cos(\pi nx)dx = \underbrace{\int_{-1}^{0} -x\cos(\pi nx)dx}_{J1} + \underbrace{\int_{0}^{1} x\cos(\pi nx)dx}_{J2}$$

Εφαρμόζοντας ξανά την αλλαγή μεταβλητής y=-x στο ολοκλήρωμα $J1$ παίρνουμε:

$$J_1 = \int_{-1}^{0} -x\cos(\pi nx)dx = -\int_{1}^{0} y\cos(-\pi ny)dy = -\int_{1}^{0} y\cos(\pi ny)dy = \int_{0}^{1} y\cos(\pi ny)dy = J_2 .$$

Οπότε χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε:

$$J_n = \int_{-1}^{1} |x|\cos(\pi nx)dx = 2J2 = 2\int_{0}^{1} x\cos(\pi nx)dx = \frac{2}{\pi n}\int_{0}^{1} x\left[\sin(\pi nx)\right]' dx =$$

$$\frac{2}{\pi n}\left[x\sin(\pi nx)\Big|_0^1 - \int_0^1 \sin(\pi nx)dx \right] = \frac{2}{\pi n}\left[\sin(\pi n) - 0 + \frac{1}{\pi n}\cos(\pi nx)\Big|_0^1 \right] =$$

$$\frac{2}{\pi n}\frac{1}{\pi n}\left[\cos(\pi n) - \cos(0)\right] = \frac{2}{\pi^2 n^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0 & \text{για n=2k} \\ -\dfrac{4}{\pi^2 (2k-1)^2} & \text{για n=2k-1} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

(β)

Η συνάρτηση f(x)=1-|x| του υποερωτήματος ορίζεται στο διάστημα [-1,1], δηλαδή αντιστοιχεί στην παραπάνω γενική περίπτωση με L=1. Επειδή η συνάρτηση f(x) είναι άρτια, αφού f(-x) = f(x), θα έχουμε b_n=0 (ΣΕΥ, σειρές Fourier, σελ. 2). Για τους υπόλοιπους συντελεστές της σειράς Fourier, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του υποερωτήματος (α), έχουμε:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-|x|)dx = \frac{1}{2}\left[x\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}|x|\,dx \right] = \frac{1}{2}\left(1-(-1)-1\right) = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}(1-|x|)\cos(n\pi x)dx = \int_{-1}^{1}\cos(n\pi x)dx - \int_{-1}^{1}|x|\cos(n\pi x)dx =$$

$$\sin(n\pi x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}|x|\cos(n\pi x)dx = 0 + \begin{cases} 0 & \text{για n=2k} \\ \dfrac{4}{\pi^2 (2k-1)^2} & \text{για n=2k-1} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{για n=2k} \\ \dfrac{4}{\pi^2 (2k-1)^2} & \text{για n=2k-1} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

Επομένως η σειρά Fourier είναι

$$1-|x| = \frac{1}{2} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2(2k-1)^2}\cos((2k-1)\pi x)$$

(γ) Θέτοντας x=0 στο αποτέλεσμα του υποερωτήματος (β) έχουμε:

$$1-|0| = \frac{1}{2} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2(2k-1)^2}\cos((2k-1)\pi 0) \Rightarrow 1-\frac{1}{2} = 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2(2k-1)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

Άσκηση 3. (16 μον.)

(α) (**4 μον.**) Να προσδιορισθούν τα x,y,z τέτοια ώστε ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & x \\ y & z \end{pmatrix}$ να είναι ορθογώνιος.

(β) (**6 μον.**) Να δειχθεί ότι όλοι οι 2x2 πίνακες της μορφής X = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, με bc = – a^2. ικανοποιούν την εξίσωση X^2 = 0. Αποτελεί το σύνολο W των πινάκων αυτών διανυσματικό χώρο; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(γ) (**6 μον.**) Εκφράστε τον πίνακα A= $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ως ένα γινόμενο $P\Delta P^{-1}$, όπου Δ διαγώνιος πίνακας, υπολογίστε την ακολουθία $u_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, για κάθε φυσικό αριθμό n και εξετάστε αν συγκλίνει καθώς n →∞.

Λύση:

(α) Για να είναι ο δοσμένος πίνακας ορθογώνιος πρέπει οι στήλες του να είναι μοναδιαία διανύσματα, ορθογώνια με ταξύ τους. Αυτό συνεπάγεται ότι:

$y^2 + (1/\sqrt{5})^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 2/\sqrt{5}$

Για $y = +2/\sqrt{5}$ έχουμε $x(1/\sqrt{5}) + z(2/\sqrt{5}) = 0$, δηλαδή x = -2z. Επειδή όμως πρέπει επίσης να ισχύει $x^2 + z^2 = 1$, συμπεραίνομε ότι $4z^2 + z^2 = 5z^2 = 1, \ \Rightarrow z = \pm 1/\sqrt{5}$, $x = \mp 2/\sqrt{5}$. Επομένως οι δυνατοί πίνακες είναι:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Ακολουθώντας ίδια μεθοδολογία για $y = -2/\sqrt{5}$ έχουμε $x(1/\sqrt{5}) + z(-2/\sqrt{5}) = 0$, δηλαδή x = 2z. Οπότε από τη σχέση $x^2 + z^2 = 1$ παίρνουμε $z = \pm 1/\sqrt{5}$, $x = \pm 2/\sqrt{5}$. Επομένως οι δυνατοί πίνακες είναι:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

(β) Η εξίσωση X^2 = 0 για τον δοσμένο πίνακα X γράφεται:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και η επαλήθευση της σχέσης αυτής απαιτεί προφανώς a^2 + bc = 0. Όμως το σύνολο των πινάκων αυτών W *δεν* αποτελεί διανυσματικό χώρο, επειδή, αν και περιέχει το μηδενικό στοιχείο (για *α* = b = c = 0), δεν ικανοποιεί την απαίτηση το άθροισμα δύο διαφορετικών πινάκων X_1 Є W και X_2 Є W να ανήκει και αυτό στο W. Παρατηρούμε ότι θέτοντας

$$X_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix}, \ X_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{pmatrix} \text{ έχουμε } X_1 + X_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{pmatrix} = X = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & -a_1 - a_2 \end{pmatrix}$$

Όμως, από τις σχέσεις $a_1^2 = -b_1c_1$, $a_2^2 = -b_2c_2$ δεν προκύπτει γενικά ότι $(a_1 + a_2)^2 = -(b_1 + b_2)(c_1 + c_2)$, επομένως δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι X Є W.

(γ) Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι -1 και 6 και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα (1, 1) και (-5, 2). Επομένως ο πίνακας P και ο αντίστροφός του είναι:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & 5/7 \\ -1/7 & 1/7 \end{pmatrix}$$

Άρα

$$u_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = P\Delta^n P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/7 & 5/7 \\ -1/7 & 1/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Είναι φανερό ότι η ακολουθία u_n *δεν* συγκλίνει αφού διαρκώς εναλλάσσεται μεταξύ του (1,1) και του (-1,-1).

Άσκηση 4 (16 μον.)

Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο:

$$f(x, y, z) = (x - z, x - y - z, x + y - z).$$

(i) Βρείτε τον πίνακα της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

(ii) Προσδιορίστε τον πυρήνα και την εικόνα της f καθώς και αντίστοιχες βάσεις. Είναι η f 1-1; Είναι επί ;

(iii) Υπάρχει ο αντίστροφός του πίνακα της f ;

Υπόδειξη: Μπορείτε να συμβουλευθείτε το Παράδειγμα 1, σελ. 216 του βιβλίου. Επίσης Παράδειγμα 1 σελ. 20 και τα Παραδείγματα 3,4 σελ. 31-32 από το κεφάλαιο Γραμμικές Απεικονίσεις του ΣΕΥ.

Λύση:

(i) Για την κανονική βάση $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ του $\mathbb{R}^3$ έχουμε :

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (1,1,1) &&= 1\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 1\cdot(0,0,1) \\ f(0,1,0) &= (0,-1,1) &&= 0\cdot(1,0,0) - 1\cdot(0,1,0) + 1\cdot(0,0,1) \\ f(0,0,1) &= (-1,-1,-1) &&= -1\cdot(1,0,0) - 1\cdot(0,1,0) - 1\cdot(0,0,1) \end{aligned}$$

Επομένως, ο πίνακας της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbf{R}^3$ είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Για τον πυρήνα της f έχουμε:

$$(x, y, z) \in Kerf \Leftrightarrow f(x, y, z) = (0,0,0) \Leftrightarrow (x - z, x - y - z, x + y - z) = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Έτσι τα στοιχεία του Kerf έχουν τη μορφή:

$$(z,0,z) = z\cdot(1,0,1),\ \ z\in\mathbb{R}\ ,$$

με το διάνυσμα $(1,0,1)$ να αποτελεί βάση του Kerf . Πρόκειται δηλαδή για έναν υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 1. Αντίστοιχα, για την εικόνα Imf έχουμε:

$$\begin{aligned}\vec{v}\in \operatorname{Im} f &\Leftrightarrow \vec{v} = f(x,y,z) \Leftrightarrow \vec{v} = (x-z, x-y-z, x+y-z) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \vec{v} = (x,x,x)+(0,-y,y)+(-z,-z,-z) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \vec{v} = x\cdot(1,1,1)+y\cdot(0,-1,1)+z\cdot(-1,-1,-1)\end{aligned}$$

Πρόκειται δηλαδή για τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα $(1,1,1),\ (0,-1,1),\ (-1,-1,-1)$. Γνωρίζουμε επίσης ότι οι διαστάσεις του πυρήνα και της εικόνας της γραμμικής απεικόνισης f συνδέονται μέσω της σχέσης :

$$\dim(\text{Kerf}) + \dim(\text{Imf}) = \dim(\mathbf{R}^3)\ ,$$

και δεδομένου ότι ήδη αποδείξαμε πως dim(Kerf)=1, συμπεραίνουμε ότι dim(Imf)=2.
Συνεπώς, δύο μόνο από τα προηγούμενα διανύσματα θα είναι ανεξάρτητα και θα αποτελούν μία βάση της εικόνας. Αυτό επαληθεύεται εύκολα από το γεγονός ότι το τρίτο διάνυσμα είναι (-1) φορές το πρώτο! Έτσι, τα $\{(1,1,1),\ \ (0,-1,1)\}$ αποτελούν μια βάση της Imf.

(iii) Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω συμπεράσματα μπορούμε να πούμε ότι: Η f *δεν είναι 1-1* αφού ο πυρήνας της δεν είναι μηδενικός. Η f *δεν είναι επί* αφού η εικόνα της δεν συμπίπτει με το πεδίο τιμών της έχοντας μικρότερη διάσταση από αυτό. Άρα, αφού ο πίνακας που αντιστοιχεί σε μία γραμμική απεικόνιση είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν το ίδιο συμβαίνει και με την αντίστοιχη απεικόνιση, ο A δεν αντιστρέφεται αφού η f δεν είναι 1-1 και επί.

Άσκηση 5 (22 μον.)

(α) (**4 μον.**) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας: $a_n = \dfrac{(2n-1)!}{(3n+1)!}$, $n\geq 1$,

Υπόδειξη: βλ. ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες, Παράγραφοι 2.4 και 2.5. Μελετήστε το παράδειγμα 5 της παραγράφου 2.5.3.

(β) **(4 μον.)** Να μελετηθεί ως προς την σύγκλισή της η σειρά: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+1}$

(γ) (**6 μον.**) Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x) = \dfrac{ax^3}{3}+\dfrac{bx^2}{2}+cx$. Να προσδιορισθούν οι πραγματικές σταθερές a,b,c, ώστε η y = f(x) να έχει σημείο καμπής στο (x, y) = (3/2, 3/4), και τοπικά ακρότατα στα σημεία x=1 και x=2. Ακολούθως να προσδιορισθεί το είδος των ακρότατων αυτών.

(δ) (**8 μον**.) Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$ με δύο τρόπους .Χρησιμοποιήστε, εκτός από κανόνα de L'Hospital, την αντικατάσταση με τα αναπτύγματα Taylor: $\sin x = x-\dfrac{x^3}{6}+...,\quad \tan x = x+\dfrac{x^3}{3}+....$ Ποιά μέθοδο προτιμάτε και γιατί;

Υπόδειξη: Εκτός από τον κανόνα de L'Hospital, θα φανεί χρήσιμη και η Πρόταση 5.1.13 του Σ.Ε.Υ.

Λύση:

(α) Έχουμε $a_n \neq 0$ και

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\frac{\left[2(n+1)-1\right]!(3n+1)!}{\left[3(n+1)+1\right]!(2n-1)!} = \lim\frac{(2n+1)!(3n+1)!}{(3n+4)!(2n-1)!} =$$

$$=\lim\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)!(3n+1)!}{(3n+4)(3n+3)(3n+2)(3n+1)!(2n-1)!} = \lim\frac{(2n+1)2n}{(3n+4)(3n+3)(3n+2)} =$$

$$=\lim\frac{4n^2}{27n^3} = \frac{4}{27}\cdot\lim\frac{1}{n} = \frac{4}{27}\cdot 0 = 0,$$

κρατώντας τους πλέον αποκλίνοντες όρους στον αριθμητή και παρονομαστή και χρησιμοποιώντας $\lim\frac{1}{n}=0$. Γνωρίζουμε όμως ότι αν για μια ακολουθία a_n με $a_n \neq 0$ ισχύει $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ τότε αυτή είναι μηδενική (παράδειγμα 5 της παραγράφου 2.5.3 του Σ.Ε.Υ.). Επομένως για την ακολουθία της άσκησης έχουμε $\boxed{\lim a_n = 0}$

(β) Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου βρίσκουμε ότι:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+1\right)3^{n+1}}{\left[(n+1)^2+1\right]3^n} = 3\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2+2n+2} = 3\cdot 1>1,$$ πράγμα που σημαίνει ότι η σειρά αποκλίνει.

(γ) Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική και οι πρώτες δύο παράγωγοί της είναι $f'(x)=ax^2+bx+c$, και $f''(x)=2ax+b$. Αφού στο x = 3/2 έχει σημείο καμπής αυτό σημαίνει ότι $f''(3/2)=3a+b=0 \Rightarrow$ b = - 3a και επειδή τα x=1 και x=2 είναι ακρότατα θα ισχύει: $f'(1)=a+b+c=0$ και $f'(2)=4a+2b+c=0$, από τα οποία προκύπτει ότι c = 2a, με a αυθαίρετο. Επειδή όμως γνωρίζουμε ότι στο σημείο καμπής x = 3/2, έχουμε y = 3/4, από τη μορφή της y = f(x) προκύπτει ότι

$$f(\frac{3}{2}) = \frac{a(3/2)^3}{3}-\frac{3a(3/2)^2}{2}+3a = \frac{3a}{4} = \frac{3}{4},$$

Άρα, έχουμε α = 1 (οπότε και b = - 3, c = 2) και, επομένως, αφού $f''(1)=-1<0$ και $f''(2)=1>0$ το x=1 είναι τοπικό μέγιστο και το x=2 τοπικό ελάχιστο.

Εναλλακτικά από το ότι η συνάρτηση διέρχεται από το στο (x, y) = (3/2, 3/4) δηλαδή ισχύει $f(3/2)=3/4 \Leftrightarrow 3a+3b+4c=2$ καταλήγουμε στην ίδια λύση λύνοντας το σύστημα:

$a+b+c=0$
$4a+2b+c=0$
$3a+3b+4c=2$

(δ)

Στο ζητούμενο όριο εμφανίζεται απροσδιοριστία $\left(\frac{0}{0}\right)$, οπότε εφαρμόζοντας διαδοχικά τον κανόνα de L'Hospital, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\tan x-\sin x\right)'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3x^2}\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x\right)'}{\left(3x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\sin x}{\cos^3 x}+\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{3x\cos^3 x}+\frac{\sin x}{6x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos^3 x}+\frac{1}{6}\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 1=\boxed{\frac{1}{2}},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γνωστό όριο $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$.

Αντικαθιστώντας τώρα τα δοθέντα αναπτύγματα Taylor στο όριο, βρίσκουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^3/3+...-(x-x^3/6+...)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3/3+x^3/6+...}{x^3}=\frac{1}{2}$$

Προφανώς η δεύτερη μέθοδος είναι προτιμητέα, ως πολύ συντομότερη!

Άσκηση 6 (15 μον.)

(α) (6 μον.) Σε μία εξέταση πολλαπλής επιλογής δίνονται πέντε απαντήσεις σε κάθε ερώτηση μία από τις οποίες είναι μόνο σωστή. Ο εξεταζόμενος είτε γνωρίζει την απάντηση, με πιθανότητα 0.8, είτε απαντά στη τύχη. Αν ο εξεταζόμενος απάντησε σωστά σε μία ερώτηση, ποια είναι η πιθανότητα να μην την γνώριζε;

Υπόδειξη: Θεωρήστε τα ενδεχόμενα A={ο εξεταζόμενος απάντησε σωστά} και B = {ο εξεταζόμενος δεν γνώριζε την απάντηση}. Ζητάμε τότε την $P(B|A)$ για τον υπολογισμό της οποίας πρέπει να χρησιμοποιήσετε τον τύπο Bayes.

(β) (9 μον.) Μια τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ η οποία δίδεται από τον τύπο:

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-\lambda x}, & 0\le x<+\infty \\ 0 \quad , & x<0 \end{cases}$$

(i) Να βρεθεί η πραγματική σταθερά λ ώστε η συνάρτηση αυτή να είναι πυκνότητα πιθανότητας.

(ii) Να βρεθούν οι πιθανότητες $P\{1\le X\le 2\}$ και $P\{X\ge 10\}$.

(iii) Να βρεθούν η μέση τιμή E(X) και η διασπορά V(X) της μεταβλητής X.

Λύση:

(α) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A = {ο εξεταζόμενος απάντησε σωστά} και B = {ο εξεταζόμενος δεν γνώριζε την απάντηση}.
Άρα $P(A) = P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B')P(B') = 0,2 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,8 = 0,84$. Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \mid B)P(B)}{P(A)} = \dfrac{0,2 \cdot 0,2}{0,84} = \dfrac{0,04}{0,84} = 0,047619$.
(β) Η $f_X(x)$ είναι καλώς ορισμένη και θετική.
(i) Για να είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. πρέπει $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$.
(ii) $P\{1 \le X \le 2\} = -e^{-2} + e^{-1}$ και $P\{X \ge 10\} = e^{-10}$.
(iii) E(X) = $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x e^{-x} dx = -xe^{-x} \big|_0^{\infty} + \int_{0}^{+\infty} e^{-x} dx = 0 + 1 = 1$ και
V(X) = E(X^2) – [E(X)]^2. Όμως

E(X^2) = $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} \big|_0^{\infty} + 2\int_{0}^{+\infty} x e^{-x} dx = 0 + 2$, επομένως V($X$) = 1.
