ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 1η

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: 19/10/2009

Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 20/11/2009

Οι Ασκήσεις της πρώτης εργασίας αναφέρονται στην ακόλουθη ύλη:
Κεφάλαιο 1 (Πίνακες, Ορίζουσες, Γραμμικά Συστήματα),
Κεφάλαιο 2 (Διανυσματικοί Χώροι)
του συγγράμματος του ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα» των Μ. Χατζηνικολάου και Γρ. Καμβύσα.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής μπορείτε να συμβουλευθείτε επίσης το βοηθητικό υλικό που υπάρχει στη http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm ως εξής:

Εναλλακτικό Διδακτικό Υλικό:
Κεφ2 Γραμμικά Συστήματα, Κεφ3 Πίνακες και Γραμμικά Συστήματα, Κεφ4Ορίζουσες, Κεφ5 Οι χώροι R^n , Κεφ6 Διανυσματικοί χώροι και Κεφ7 Βάση και Διάσταση.

Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό:
Πίνακες, Οι Χώροι R^n, Διανυσματικοί Χώροι.

Στόχοι
Εμπέδωση της μεθόδου απαλοιφής Gauss για την λύση (και διερεύνηση) γραμμικών συστημάτων. Υπολογισμός ορίζουσας. Κριτήριο αντιστρεψιμότητας πίνακα και εύρεση αντιστρόφου με δύο μεθόδους. Χρήση της επαγωγής. Διανυσματικοί χώροι-υπόχωροι, γραμμική θήκη, βάσεις, διάσταση.

Συμβολισμός
Στα παρακάτω, $M_n(\mathbb{R})$ συμβολίζει το σύνολο των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{R}$.

Άσκηση 1. (15 μον)

Θεωρείστε το γραμμικό σύστημα:

$$x+y-6z=a$$
$$2x+y-2z=8$$
$$4x+4y-24z=13$$

Χρησιμοποιείστε την μέθοδο απαλοιφής Gauss για να βρείτε τις τιμές του $a\in\mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, μοναδική λύση ή καμιά λύση. Να βρεθούν οι λύσεις στην περίπτωση που το σύστημα είναι συμβιβαστό. (Μπορείτε να συμβουλευθείτε ΕΔΥ_Κεφ.2 , σελ 15-16 και ΣΕΥ_Πίνακες, σελ 36-39).

Λύση

Εφαρμόζοντας την απαλοιφή Gauss στο επαυξημένο πίνακα του συστήματος έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & a \\ 2 & 1 & -2 & 8 \\ 4 & 4 & -24 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2-2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & a \\ 0 & -1 & 10 & 8-2a \\ 4 & 4 & -24 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3-4\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & a \\ 0 & -1 & 10 & 8-2a \\ 0 & 0 & 0 & 13-4a \end{pmatrix}.$$

Από την τελευταία γραμμή του δεξιού πίνακα παρατηρούμε ότι το σύστημα είναι ασυμβίβαστο αν $13-4a\neq 0$, δηλαδή αν $a\neq 13/4$.

Έστω $a=13/4$. Συνεχίζοντας την απαλοιφή Gauss έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 13/4 \\ 0 & -1 & 10 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1+\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 19/4 \\ 0 & -1 & 10 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 19/4 \\ 0 & 1 & -10 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Τα σύστημα που αντιστοιχεί στον τελευταίο πίνακα είναι

$x+4z=19/4$

$y-10z=-3/2$.

Αυτό έχει τις λύσεις $(x,y,z)=(19/4-4z,-3/2+10z,z), z\in\mathbb{R}$. Μοναδική λύση δεν υπάρχει για το συγκεκριμένο σύστημα.

Τελικά το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν $a=13/4$. Στην περίπτωση αυτή έχει άπειρες λύσεις που δίνονται από $(x,y,z)=(19/4-4z,-3/2+10z,z), z\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 2.

2α)*(12μον) Έστω* $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ *όπου* $a\in\mathbb{R}$. *Δείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν* $a\neq 1$. *Για τις τιμές αυτές υπολογίστε τον* A^{-1} .

1) *με τη μέθοδο του προσαρτημένου πίνακα (βλ ΕΔΥ Κεφάλαιο 4, Άσκηση 5)*
2) *με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss (βλ. Βιβλίο σελίδα 54, Παράδειγμα).*

2β) *(3 μον) Υπολογίστε την ορίζουσα του*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 2a-x & 2b-y & 2c-z \end{pmatrix}$$

χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις πράξεις γραμμών.

Λύση

2α) Έχουμε $\det A = 2(6-6a) = 12-12a$. Άρα A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$.

Έστω $a \neq 1$.

1) Με το συμβολισμό του ΕΔΥ Κεφ4 έχουμε

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, A_{23} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & a \end{pmatrix}, A_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, A_{33} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ξέρουμε ότι $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\left((-1)^{i+j} \det A_{ji}\right)$. Αντικαθιστώντας και υπολογίζοντας τις παραστάσεις $(-1)^{i+j}\det A_{ji}$ βρίσκουμε

$$A^{-1} = \frac{1}{12-12a}\begin{pmatrix} 6-6a & 3 & -2+a \\ 0 & 6 & -2a \\ 0 & -12 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4-4a} & \frac{a-2}{12-12a} \\ 0 & \frac{1}{2-2a} & \frac{a}{6a-6} \\ 0 & \frac{1}{a-1} & \frac{1}{3-3a} \end{pmatrix}.$$

2) Θεωρούμε τον πίνακα

$$\left(A \mid I\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και θα τον φέρουμε στη μορφή $(I \mid B)$ χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών (υπό την προϋπόθεση ότι $a \neq 1$). Τότε ξέρουμε ότι $B = A^{-1}$. Έχουμε διαδοχικά.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 - 3\Gamma_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3-3a & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 - \frac{a}{3-3a}\Gamma_3}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1-\frac{-3a}{3-3a} & -\frac{a}{3-3a} \\ 0 & 0 & 3-3a & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{1-a} & -\frac{a}{3-3a} \\ 0 & 0 & 3-3a & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 - \frac{1}{3-3a}\Gamma_3}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & -\frac{-3}{3-3a} & -\frac{1}{3-3a} \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{1-a} & -\frac{a}{3-3a} \\ 0 & 0 & 3-3a & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{1-a} & -\frac{1}{3-3a} \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{1-a} & -\frac{a}{3-3a} \\ 0 & 0 & 3-3a & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 - \frac{1}{2}\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1-a}-\frac{1}{2}(\frac{1}{1-a}) & -\frac{1}{3-3a}-\frac{1}{2}(-\frac{a}{3-3a}) \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{1-a} & -\frac{a}{3-3a} \\ 0 & 0 & 3-3a & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(\frac{1}{1-a}) & \frac{1}{2}(\frac{-2+a}{3-3a}) \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{1-a} & -\frac{a}{3-3a} \\ 0 & 0 & 3-3a & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}\Gamma_1,\ \frac{1}{2}\Gamma_2,\ \frac{1}{3-3a}\Gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4-4a} & \frac{a-2}{6-6a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2-2a} & -\frac{a}{6-6a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{3-3a} & \frac{1}{3-3a} \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4-4a} & \frac{a-2}{12-12a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2-2a} & \frac{a}{6a-6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a-1} & \frac{1}{3-3a} \end{array}\right).$$

Άρα

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4-4a} & \frac{a-2}{12-12a} \\ 0 & \frac{1}{2-2a} & \frac{a}{6a-6} \\ 0 & \frac{1}{a-1} & \frac{1}{3-3a} \end{pmatrix}.$$

2β) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 2a-x & 2b-y & 2c-z \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3-2\Gamma_1} \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ -x & -y & -z \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3+\Gamma_1} \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας έχει μηδενική γραμμή άρα η ορίζουσά του είναι ίση με 0. Συνεπώς

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 2a-x & 2b-y & 2c-z \end{pmatrix} = 0.$$

Άσκηση 3. Έστω $u_1 = (1,2,3), u_2 = (0,2,3)$ και U ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα u_1, u_2.

3α) *(10 μον) Βρείτε όλες τις τιμές του* $a \in \mathbb{R}$ *τέτοιες ώστε* $(1,1,a) \in U$. *Για τις τιμές αυτές παραστήστε το (1,1,a) ως γραμμικό συνδυασμό των* u_1, u_2.

3β) *(5 μον) Έστω* $U^{/}$ *ο υπόχωρος του* $\mathbb{R}^3$ *που παράγεται από τα* $(1,0,0),(1,6,9)$. *Δείξτε ότι* $U = U^{/}$ *(βλ. Βιβλίο σελίδα 99, Πόρισμα 6).*

Λύση

3α) Έχουμε $(1,1,a) \in U \Leftrightarrow (1,1,a) = \lambda u_1 + \mu u_2 = (\lambda, 2\lambda + 2\mu, 3\lambda + 3\mu)$ για κάποια $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, δηλαδή αν και μόνο αν το σύστημα

$$1 = \lambda$$
$$1 = 2\lambda + 2\mu$$
$$a = 3\lambda + 3\mu$$

έχει λύση ως προς λ, μ. Από τις πρώτες δυο εξισώσεις έχουμε $\lambda = 1, \mu = -\frac{1}{2}$, οπότε η τρίτη δίνει $a = \frac{3}{2}$. Άρα η απάντηση είναι $a = \frac{3}{2}$. Έχουμε

$(1,1,\frac{3}{2}) = \lambda u_1 + \mu u_2 = u_1 - \frac{1}{2}u_2.$

3β) Εύκολα επαληθεύεται ότι τα u_1, u_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα ($\lambda u_1 + \mu u_2 = (0,0,0) \Rightarrow (\lambda, 2\lambda + 2\mu, 3\lambda + 3\mu) = (0,0,0) \Rightarrow \lambda = \mu = 0$) και άρα $\dim U = 2$. Όμοια $\dim U^{/} = 2$. Λύνοντας το σύστημα που προκύπτει από $(1,0,0) = au_1 + bu_2$, βλέπουμε ότι αυτό έχει λύση (και μάλιστα $(1,0,0) = u_1 - u_2$). Άρα $(1,0,0) \in U$. Όμοια, $(1,6,9) \in U$. Άρα $U^{/} \subseteq U$ και επειδή έχουν την ίδια πεπερασμένη διάσταση, $U = U^{/}$ (δείτε πόρισμα 6 σελίδα 99 του βιβλίου).
Άλλος τρόπος. Θεωρώντας τον πίνακα με γραμμές τα 4 διανύσματα $u_1, u_2, (1,0,0), (1,6,9)$, θα βρίσκαμε μια κλιμακωτή μορφή του, όπου θα διαπιστώναμε ότι υπάρχουν 2 μη μηδενικές γραμμές. Άρα $\dim(U + U^{/}) = 2.$ Επειδή $\dim U = \dim U^{/} = 2$, θα είχαμε $U = U + U^{/} = U^{/}$.

Άσκηση 4.

4α) *(10 μον) Εξετάστε ποια από τα σύνολα*

$$\left\{(x,y,x^2) \middle| x,y \in \mathbb{R}\right\}, \quad \left\{(x,y,x-1) \middle| x,y \in \mathbb{R}\right\}, \quad \left\{(2x+y, x-y, x+y) \middle| x,y \in \mathbb{R}\right\}$$

είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$. *Σε περίπτωση που κάποιο σύνολο είναι υπόχωρος του* $\mathbb{R}^3$ *βρείτε μια βάση και τη διάστασή του.*

4β) *(15 μον) Έστω* $U = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} A \right\}$. *Δείξτε ότι* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U$ *αν και μόνο αν* $c = 2a + b - 2d = 0$. *Στη συνέχεια δείξτε ότι το* U *είναι ένας υπόχωρος του* $M_2(\mathbb{R})$ *και βρείτε μια βάση και τη διάσταση του* U. (Βλ. Άσκηση 11 ΕΔΥ κεφ7).

Λύση

4α) Το $\left\{(x,y,x^2) \middle| x,y \in \mathbb{R}\right\}$ δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Για παράδειγμα, ενώ $(1,1,1) \in \left\{(x,y,x^2) \middle| x,y \in \mathbb{R}\right\}$, έχουμε $-(1,1,1) = (-1,-1,-1) \notin \left\{(x,y,x^2) \middle| x,y \in \mathbb{R}\right\}$.

Το $\{(x,y,x-1)|x,y\in\mathbb{R}\}$ δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Για παράδειγμα, δεν περιέχει το (0,0,0).

Το $\{(2x+y,x-y,x+y)|x,y\in\mathbb{R}\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι $(2x+y,x-y,x+y)=x(2,1,1)+y(1,-1,1)$ και άρα $\{(2x+y,x-y,x+y)|x,y\in\mathbb{R}\}=\langle(2,1,1),(1,-1,1)\rangle$, δηλαδή είναι ο υπόχωρος που παράγεται από τα $(2,1,1),(1,-1,1)$.

Εύκολα επαληθεύεται ότι τα $(2,1,1),(1,-1,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι, $\lambda(2,1,1)+\mu(1,-1,1)=(0,0,0)\Rightarrow 2\lambda+\mu=\lambda-\mu=\lambda+\mu=0\Rightarrow\lambda=\mu=0$. Επειδή αυτά παράγουν τον υπόχωρο $\{(2x+y,x-y,x+y)|x,y\in\mathbb{R}\}$, αποτελούν βάση του. Άρα η διάστασή του είναι 2.

4β) Έστω $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Έχουμε διαδοχικά

$$A\in U\Leftrightarrow A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}A\Leftrightarrow\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & 2a+2b \\ c & 2c+2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2c & 2d \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} a=a+2c \\ 2a+2b=b+2d \\ c=2c \\ 2c+2d=2d \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} c=0 \\ 2a+b-2d=0. \end{cases}$$

Έστω $A_1,A_2\in U$ και $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$. Τότε $A_1\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}A_1$ και

$A_2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}A_2$ και επομένως

$(\lambda_1A_1)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}(\lambda_1A_1)$ και $(\lambda_2A_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}(\lambda_2A_2)$.

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $(\lambda_1A_1+\lambda_2A_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}(\lambda_1A_1+\lambda_2A_2)$ και άρα $\lambda_1A_1+\lambda_2A_2\in U$. Άρα ο U είναι υπόχωρος του $M_2(\mathbb{R})$.

Είδαμε πριν ότι $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in U$ αν και μόνο αν $c=2a+b-2d=0$. Συνεπώς κάθε $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in U$ είναι της μορφής

$A=\begin{pmatrix} a & 2d-2a \\ 0 & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -2a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 2d \\ 0 & d \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Δηλαδή τα στοιχεία $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ παράγουν το διανυσματικό χώρο U. (Σημείωση. Αυτό το επιχείρημα δείχνει, επίσης, ότι το U είναι υπόχωρος του $M_2(\mathbb{R})$). Αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα καθώς

$$\lambda\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} \lambda & -2\lambda+2\mu \\ 0 & \mu \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\lambda=\mu=0.$$

Άρα αποτελούν βάση του U και $\dim U=2$.

Άσκηση 5. (30 μον)

Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος. Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

5α) *Αν ο $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι τέτοιος ώστε $A^2 + 5A - I = 0$, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος.*

5β) *Για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-3^n}{2} & 3^n \end{pmatrix}$.

5γ) *Για τους υπόχωρους του $\mathbb{R}^3$, $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ και $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$, ισχύει $\dim(U \cap V) = 1$.*

5δ) *Για τους ίδιους υπόχωρους U, V του $\mathbb{R}^3$, ισχύει $U + V = \mathbb{R}^3$.*

5ε) *Για τους ίδιους υπόχωρους U, V του $\mathbb{R}^3$, ισχύει $U \oplus V = \mathbb{R}^3$.*

5ζ) *Αν τα στοιχεία u_1, u_2, u_3 ενός διανυσματικού χώρου είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε και τα $u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_1 + u_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Λύση

5α) Είναι σωστή. Έχουμε

$$A^2 + 5A - I = 0 \Rightarrow A(A + 5I) = I \Rightarrow \det(A(A+5I)) = \det I = 1 \Rightarrow$$

$$(\det A)(\det(A+5I)) = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$$

και άρα ο A είναι αντιστρέψιμος.

Διαφορετικά

Έχουμε

$$A^2 + 5A - I = 0 \Rightarrow A(A + 5I) = I$$

$$A^2 + 5A - I = 0 \Rightarrow (A + 5I)A = I$$

και άρα από τον ορισμό του αντιστρόφου ο A είναι αντιστρέψιμος με $A^{-1} = A + 5I$.

5β) Είναι σωστή.

Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο n. Για $n = 1$, είναι σαφές ότι ισχύει η αποδεικτέα σχέση. Έστω ότι $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-3^n}{2} & 3^n \end{pmatrix}$ για κάποιο θετικό ακέραιο n. Έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-3^n}{2} & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-3^n}{2} - 3^n & 3^n 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-3^{n+1}}{2} & 3^{n+1} \end{pmatrix}.$$

5γ) Είναι σωστή. Έχουμε

$$(x,y,z) \in U \cap V \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z) = (3z, -2z, z) = z(3,-2,1), z \in \mathbb{R}.$$

Άρα το στοιχείο $(3,-2,1)$ αποτελεί βάση του $U \cap V$ και $\dim(U \cap V) = 1$.

5δ) Είναι σωστή. Έχουμε

$$(x,y,z) \in U \Leftrightarrow x + y - z = 0 \Leftrightarrow (x,y,z) = (x, y, x+y) = x(1,0,1) + y(0,1,1), x, y \in \mathbb{R}.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι τα $(1,0,1),(0,1,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα οπότε αποτελούν βάση του U δηλαδή $\dim(U)=2$. Επίσης:

$(x,y,z)\in V \Leftrightarrow x+2y+z=0 \Leftrightarrow (x,y,z)=(x,y,-x-2y)=x(1,0,-1)+y(0,1,-2), x,y\in\mathbb{R}$

Εύκολα βλέπουμε ότι τα $(1,0,-1),(0,1,-2)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα οπότε αποτελούν βάση του V δηλαδή $\dim(V)=2$.

Από τη σχέση

$\dim(U+V)=\dim(U)+\dim(V)-\dim(U\cap V)$ έχω $\dim(U+V)=3$ και ως υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 3 ισχύει $U+V=\mathbb{R}^3$.

5ε) Είναι λάθος αφού $\dim(U\cap V)=1\neq 0$

5ζ) Είναι σωστή. Έστω $a,b,c\in\mathbb{R}$ με $a(u_1+u_2)+b(u_2+u_3)+c(u_1+u_3)=0$. Τότε $(a+c)u_1+(a+b)u_2+(b+c)u_3=0$. Επειδή τα u_1,u_2,u_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έχουμε $a+c=a+b=b+c=0$. Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $a=b=c=0$. Άρα τα u_1+u_2,u_2+u_3,u_1+u_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.