Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης ΓΕ

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας» και αποστέλλει το έντυπο σε δύο μη συρραμμένα αντίγραφα (ή ηλεκτρονικά) στον Καθηγητή-Σύμβουλο. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος συμπληρώνει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας» και στα δύο αντίγραφα και επιστρέφει το ένα στο φοιτητή μαζί με τα σχόλια επί της ΓΕ, ενώ κρατά το άλλο για το αρχείο του μαζί με το γραπτό σημείωμα του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

*Σε περίπτωση ηλεκτρονικής υποβολής του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου θα πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: <u>Π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 2η ΓΕ του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στη ΠΛΗ12 θα πρέπει να γραφεί:</u> «**ioannou_ge2_plh12.doc**».*

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στοιχεία Φοιτητή: Ονομ/νυμο, διευθ/ση, τηλ., -ηλεκτρονική διεύθυνση	<……………………………………………………………> <……………………………………………………………> <……………………………………………………………> <……………………………………………………………>

ΚωδικόςΘΕ	**ΠΛΗ12**	Ονοματεπώνυμο Καθηγητή - Σύμβουλου	………………..
Κωδικός Τμήματος	**<…. >**	Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής σύμφωνα με το ακ. ημερολόγιο (***ημέρα Τρίτη***)	**12/1/2010**
Ακ. Έτος	**2009-10**	Ημερομηνία αποστολής ΓΕ από το φοιτητή	
α/α ΓΕ	**2η**	Επισυνάπτεται (*σε περίπτωση που έχει ζητηθεί*) η άδεια παράτασης από το Συντονιστή;	ΝΑΙ / ΟΧΙ

***<u>Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή</u>**: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα.*

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής ΓΕ από το φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στο φοιτητή	
Βαθμολογία *(αριθμητικά, ολογράφως)*	

Υπογραφή Φοιτητή

Υπογραφή Καθηγητή-Συμβούλου

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 2η

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: 23 Νοεμβρίου 2009

Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 8 Ιανουαρίου 2010.

Οι Ασκήσεις της δεύτερης εργασίας αναφέρονται στα **Κεφάλαια 3, 4, 5** του βιβλίου του ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα» των Μ. Χατζηνικολάου και Γρ. Καμβύσα.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής μπορείτε να συμβουλευθείτε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στη http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm ως εξής:
Εναλλακτικό **Δ**ιδακτικό **Υ**λικό: Κεφάλαια 5-11.
Συνοδευτικό **Ε**κπαιδευτικό **Υ**λικό: Γραμμικές Απεικονίσεις, Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα, Διαγωνοποίηση, Τετραγωνικές Μορφές.

Η πρώτη άσκηση αναφέρεται σε διανυσματικούς χώρους που έχουν εσωτερικό γινόμενο (Βιβλίο: Κεφ 3, ΕΔΥ: Κεφ 5 και 6, ΣΕΥ Οι Χώροι $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$) και η δεύτερη άσκηση αναφέρεται στους γραμμικούς μετασχηματισμούς (Βιβλίο: Κεφ 4, ΕΔΥ: Κεφ 8, ΣΕΥ Γραμμικές απεικονίσεις)

1. (**Μονάδες 20**)

i) (5 μον) Αν $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_1$ και $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_2$ είναι εσωτερικά γινόμενα στον πραγματικό διανυσματικό χώρο V, να αποδείξετε ότι

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = k \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_1 + \lambda \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_2, \text{ για κάθε } k, \lambda > 0,$$

είναι επίσης εσωτερικό γινόμενο του V.

ii) (5 μον) Στον $\mathbb{R}^4$ βρείτε διάνυσμα $\boldsymbol{x}$ που είναι κάθετο στα διανύσματα $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_4$ και σχηματίζει ίσες γωνίες με τα διανύσματα $\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, όπου $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^4$ και ο χώρος είναι εφοδιασμένος με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

iii) (10 μον) Βρείτε τη διάσταση και μία ορθοκανονική βάση του διανυσματικού υπόχωρου

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \circ (1,2,-1) = 0\},$$

όπου $\circ$ συμβολίζει το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο.

Για το υποερώτημα i) αποδείξτε τις ιδιότητες του Ορισμού 3.1.1, σελ 144 του βιβλίου και συμβουλευτείτε την Άσκηση 12 στο Κεφ 6 από το ΕΔΥ. Για το iii) μπορείτε να συμβουλευθείτε το Παράδειγμα 13 σελ 168 του βιβλίου και στο Κεφ 7 από το ΕΔΥ την Άσκηση 17.

Λύση :

i) Τα εσωτερικά γινόμενα $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_1$ και $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_2$ ικανοποιούν τις ιδιότητες του Ορισμού 3.1.1 (βλέπε σελ. 144 βιβλίου), κατά συνέπεια για κάθε $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$, $k, \lambda > 0$ και $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$(\mathrm{I}_1) \quad \begin{aligned} \langle \mu\boldsymbol{x} + \nu\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} \rangle &= k\langle \mu\boldsymbol{x} + \nu\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} \rangle_1 + \lambda\langle \mu\boldsymbol{x} + \nu\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} \rangle_2 \\ &= k\mu\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_1 + k\nu\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} \rangle_1 + \lambda\mu\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_2 + \lambda\nu\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} \rangle_2 \\ &= \mu\left(k\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_1 + \lambda\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_2\right) + \nu\left(k\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} \rangle_1 + \lambda\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} \rangle_2\right) = \mu\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \nu\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} \rangle \end{aligned}$$

$$(\mathrm{I}_2) \quad \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = k\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_1 + \lambda\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_2 = k\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle_1 + \lambda\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle_2 = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$$

(I_3) $\quad \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = k\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle_1 + \lambda\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle_2 \geq 0$, καθόσον $k, \lambda > 0$ και

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow k\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle_1 + \lambda\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle_2 = 0 \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle_1 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle_2 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

ii) Από την καθετότητα του $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ με τα διανύσματα της βάσης $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_4$ έχουμε

$$\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{e}_4 = 0 \Rightarrow x_1 = x_4 = 0.$$

Επειδή το διάνυσμα $\boldsymbol{x}$ σχηματίζει ίσες γωνίες με τα διανύσματα $\boldsymbol{e}_2$ και $\boldsymbol{e}_3$ έχουμε

$$\frac{\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{e}_2}{\|\boldsymbol{x}\|} = \frac{\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{e}_3}{\|\boldsymbol{x}\|} \Rightarrow x_2 = x_3 = c.$$

Συνεπώς, $\boldsymbol{x} = (0, x_2, x_2, 0) = c(0,1,1,0)$, $c \in \mathbb{R}$.

iii) Από την ισότητα

$$(x,y,z) \circ (1,2,-1) = 0 \Rightarrow x + 2y - z = 0$$

και κατά συνέπεια για τα διανύσματα $(x,y,z) \in U$ έχουμε

$$(x,y,z) = (x, y, x+2y) = x(1,0,1) + y(0,1,2),$$

δηλαδή, $U = span\{\boldsymbol{u}_1 = (1,0,1),\ \boldsymbol{u}_2 = (0,1,2)\}$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα $\dim U = 2$.

Στο σύνολο $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ εφαρμόζουμε τη μέθοδο ορθοκανονικοποίησης των Gram-Schmidt (σελ. 167 βιβλίου) :

Το διάνυσμα $\boldsymbol{\eta}_1 = \boldsymbol{u}_1 = (1,0,1)$ και το $\boldsymbol{\eta}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \dfrac{\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{\eta}_1}{\boldsymbol{\eta}_1 \cdot \boldsymbol{\eta}_1}\boldsymbol{\eta}_1 = (0,1,2) - \dfrac{2}{2}(1,0,1) = (-1,1,1)$.

Κανονικοποιούμε τα διανύσματα $\hat{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{\eta_1}{\|\eta_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ και $\hat{\boldsymbol{u}}_2 = \frac{\boldsymbol{\eta}_2}{\|\boldsymbol{\eta}_2\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ και έχουμε ότι η ορθοκανονική βάση του U είναι $\{\hat{\boldsymbol{u}}_1, \hat{\boldsymbol{u}}_2\}$.

2. (**Μονάδες 25**)

Έστω η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με

$$f(x, y, z) = (x + 3y - 4z,\ x + y + 2z,\ y - 2z)$$

i) Να δείξετε ότι η f είναι γραμμική.

ii) Βρείτε τον πίνακα αναπαράστασης της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

iii) Βρείτε μία βάση και τη διάσταση της εικόνας της f.

iv) Βρείτε μία βάση και τη διάσταση του πυρήνα της f.

v) Να ορίσετε την απεικόνιση f^{-1}, αν υπάρχει.

Μπορείτε να συμβουλευθείτε το Παράδειγμα 1σελ 216 του βιβλίου. Επίσης στο Κεφ 8 από το ΕΔΥ τις Ασκήσεις 1, 6, 12 και το κεφάλαιο Γραμμικές Απεικονίσεις από το ΣΕΥ, το Παράδειγμα 1 σελ 20 και τα Παραδείγματα 3,4, σελ 31-33.

Λύση :

i) Έστω $\boldsymbol{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ δύο στοιχεία του $\mathbb{R}^3$, τότε

$$f(\boldsymbol{v}_1) = f(x_1, y_1, z_1) = (x_1 + 3y_1 - 4z_1,\ x_1 + y_1 + 2z_1,\ y_1 - 2z_1),$$
$$f(\boldsymbol{v}_2) = f(x_2, y_2, z_2) = (x_2 + 3y_2 - 4z_2,\ x_2 + y_2 + 2z_2,\ y_2 - 2z_2)$$

Για κάθε $k, \lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$\begin{aligned}
f(k\boldsymbol{v}_1 + \lambda\boldsymbol{v}_2) &= f(k(x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2, y_2, z_2)) \\
&= f(kx_1 + \lambda x_2, ky_1 + \lambda y_2, kz_1 + \lambda z_2) \\
&= \big(kx_1 + \lambda x_2 + 3(ky_1 + \lambda y_2) - 4(kz_1 + \lambda z_2), kx_1 + \lambda x_2 + ky_1 + \lambda y_2 + 2(kz_1 + \lambda z_2), (ky_1 + \lambda y_2) - 2(kz_1 + \lambda z_2)\big) \\
&= k(x_1 + 3y_1 - 4z_1,\ x_1 + y_1 + 2z_1,\ y_1 - 2z_1) + \lambda(x_2 + 3y_2 - 4z_2,\ x_2 + y_2 + 2z_2,\ y_2 - 2z_2) \\
&= kf(\boldsymbol{v}_1) + \lambda f(\boldsymbol{v}_2)
\end{aligned}$$

Επομένως για κάθε $k, \lambda \in \mathbb{R}$ και $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ ισχύει η ισότητα :

$$f(k\boldsymbol{v}_1 + \lambda\boldsymbol{v}_2) = kf(\boldsymbol{v}_1) + \lambda f(\boldsymbol{v}_2),$$

άρα η f είναι γραμμική.

ii) Για τον πίνακα αναπαράστασης της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ θεωρούμε τα διανύσματα της κανονικής βάσης του

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1),$$

και υπολογίζουμε:

$$f(\boldsymbol{e}_1) = 1\boldsymbol{e}_1 + 1\boldsymbol{e}_2 + 0\boldsymbol{e}_3$$
$$f(\boldsymbol{e}_2) = 3\boldsymbol{e}_1 + 1\boldsymbol{e}_2 + 1\boldsymbol{e}_3$$
$$f(\boldsymbol{e}_3) = -4\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3$$

Άρα ο πίνακας αναπαράστασης είναι $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

iii)

Επειδή

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x+3y-4z, x+y+2z, y-2z) \\ &= x(1,1,0) + y(3,1,1) + z(-4,2,-2) \end{aligned}$$

η εικόνα της f παράγεται από τα διανύσματα $(1,1,0)$, $(3,1,1)$, $(-4,2,-2)$. Για να βρούμε μία βάση της εικόνας $\operatorname{Im} f$ θα εξετάσουμε αν τα διανύσματα των γεννητόρων είναι γραμμικά ανεξάρτητα εφαρμόζοντας γραμμοπράξεις στον αντίστοιχο πίνακα. Επομένως:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_2 \to (-3)r_1 + r_2 \\ r_3 \to 4r_1 + r_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \end{bmatrix} r_3 \to 3r_2 + r_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα τα διανύσματα $\{(1,1,0),\ (0,-2,1),\ (0,0,1)\}$ αποτελούν μία βάση της $\operatorname{Im} f$ με $\dim(\operatorname{Im} f) = 3$.

iv) Επειδή η διάσταση του $\mathbb{R}^3$ είναι 3, από την ισότητα

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) \Rightarrow \dim(\ker f) = 0,$$

άρα $ker\, f = \{\mathbf{0}\}$.

Β΄ τρόπος:

Για να βρούμε την βάση του $\ker f$, πρέπει να λύσουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{aligned} x + 3y - 4z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Κάνοντας γραμμοπράξεις έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} r_2 \to r_1 - r_2 \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} r_3 \to (-2)r_3 + r_2 \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Από όπου είναι φανερό ότι η μοναδική λύση του συστήματος είναι η μηδενική, δηλαδή , $\ker f = \{\mathbf{0}\}$, άρα $\dim(\ker f) = 0$.

v) Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.3.1 (σελ. 219 βιβλίου) και το αποτέλεσμα του ερωτήματος (iii) συμπεραίνουμε ότι ο μετασχηματισμός f είναι μη ιδιάζων και από την ισοδυναμία (β)-(δ) που παρουσιάζεται στο θεώρημα 4.3.7 (σελ. 221 βιβλίου) είναι φανερό ότι η απεικόνιση είναι αντιστρέψιμη. Άρα υπάρχει η απεικόνιση f^{-1}, για την οποία μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τον τύπο της f^{-1} αν γνωρίζουμε τον αντίστροφο πίνακα του πίνακα αναπαράστασης της f,

Χρησιμοποιώντας έναν από τους γνωστούς τρόπους υπολογισμού αντιστρόφου υπολογίζουμε

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, η f^{-1} δίνεται από τον τύπο

$$f^{-1}(x,y,z) = A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(2x - y - 5z,\ -x + y + 3z,\ -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + z\right)^T.$$

Οι υπόλοιπες ασκήσεις της εργασίας αναφέρονται σε ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα, διαγωνοποίηση πινάκων και τετραγωνικές μορφές (Βιβλίο: Κεφ 5, ΕΔΥ: Κεφ 9-11, ΣΕΥ: Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα, Διαγωνοποίηση, Τετραγωνικές Μορφές).

3. (Μονάδες 15)

Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

i) (8 μον) Να βρεθούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

ii) (2 μον) Είναι ο πίνακας A αντιστρέψιμος;

iii) (2 μον) Διαγωνοποιείται ο πίνακας A;

iv) (3 μον) Με τη χρήση του θεωρήματος Cayley-Hamilton να υπολογισθεί ο πίνακας $B = A^6 - 16A^2 + A - I$.

Μπορείτε να συμβουλευθείτε τα Παραδείγματα 9,10 σελ 274 - 278 του βιβλίου. Επίσης από το ΕΔΥ τις Ασκήσεις 4,7,13 του Κεφ 9, και από το κεφάλαιο 9- Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα ΣΕΥ τα Παραδείγματα 9.1.13, 9.1.14, 9.2.3, 9.3.1.2.1, 9.3.1.2.2.

Λύση :

i) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A δίνεται από τη σχέση $x(\lambda)=\det(\lambda I - A)$ και είναι

$$x(\lambda)=\det(\lambda I - A)=\det\begin{bmatrix}\lambda-1 & 2 & -1\\ 1 & \lambda & 1\\ -1 & -2 & \lambda-1\end{bmatrix}=\lambda^3-2\lambda^2=\lambda^2(\lambda-2).$$

Επομένως οι ιδιοτιμές είναι η λύση της εξίσωσης $x(\lambda)=0$, άρα

$$\lambda_{1,2}=0\,(\text{διπλή ιδιοτιμή}) \text{ και } \lambda_3=2.$$

Για $\lambda_{1,2}=0$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα προκύπτει από τη λύση του ομογενούς συστήματος:

$$\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

από όπου, μετά από γραμμοπράξεις, καταλήγουμε

$$\begin{cases}x-2y+z=0\\ y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=-x\\ y=0\end{cases}$$

Άρα το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην διπλής αλγεβρικής πολλαπλότητας ιδιοτιμή $\lambda_{1,2}=0$ είναι της μορφής:

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ 0\\ -x\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix},\ x\neq 0$$

Δηλαδή, η ιδιοτιμή έχει γεωμετρική πολλαπλότητα 1.

Για $\lambda_3=2$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα προκύπτει από τη λύση του ομογενούς συστήματος:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

από όπου, μετά από γραμμοπράξεις, καταλήγουμε

$$\begin{cases}x+2y-z=0\\ z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2y\\ z=0\end{cases}$$

Άρα το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην μονής αλγεβρικής πολλαπλότητας ιδιοτιμή $\lambda_3=2$ είναι της μορφής:

$$\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2y\\ y\\ 0\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\ y\neq 0$$

Δηλαδή η ιδιοτιμή έχει γεωμετρική πολλαπλότητα 1.

ii) Επειδή ο πίνακας A έχει διπλή ιδιοτιμή $\lambda_{1,2}=0$, δεν αντιστρέφεται ($\det A=0$).

iii) Ο πίνακας A δεν διαγωνοποιείται διότι η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_{1,2}=0$ δεν είναι ίση με τη γεωμετρική της.

iv) Από το θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε $A^3=2A^2$. Συνεπώς

$$A^6=(A^3)^2=(2A^2)^2=4A^4=4(2A^3)=8(2A^2)=16A^2$$

και

$$B=A^6-16A^2+A-I=16A^2-16A^2+A-I=A-I.$$

4. (Μονάδες 20)

Έστω M ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και τα διανύσματα $\boldsymbol{x}_1=[1\ 1\ 1]^T$ $\boldsymbol{x}_2=[1\ -1\ 0]^T$ είναι ορθογώνια βάση του M και B ο πίνακας

$$B=\frac{\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1^T}{\|\boldsymbol{x}_1\|^2}+\frac{\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_2^T}{\|\boldsymbol{x}_2\|^2}.$$

i) (5 μον) Δείξτε ότι $B^2=B$ και με τη χρήση αυτής της σχέσης ότι $(I-B)^2=I-B$.

ii) (10 μον) Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα B.

iii) (5 μον) Να δειχθεί ότι ο πίνακας B είναι διαγωνοποιήσιμος και να βρεθεί ένας πίνακας P τέτοιος ώστε ο $P^{-1}BP$ να είναι διαγώνιος.

Λύση :

i) Χρησιμοποιώντας τα δοθέντα διανύσματα $\boldsymbol{x}_1=[1\ 1\ 1]^T$ και $\boldsymbol{x}_2=[1\ -1\ 0]^T$ εύκολα υπολογίζουμε ότι $\|\boldsymbol{x}_1\|^2=\boldsymbol{x}_1^T\boldsymbol{x}_1=3$ και $\|\boldsymbol{x}_2\|^2=\boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{x}_2=2$ και

$$B=\frac{\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1^T}{\|\boldsymbol{x}_1\|^2}+\frac{\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_2^T}{\|\boldsymbol{x}_2\|^2}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}5&-1&2\\-1&5&2\\2&2&2\end{bmatrix}.$$

Επειδή

$$B^2=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}5&-1&2\\-1&5&2\\2&2&2\end{bmatrix}\frac{1}{6}\begin{bmatrix}5&-1&2\\-1&5&2\\2&2&2\end{bmatrix}=\frac{1}{6\cdot 6}\begin{bmatrix}30&-6&12\\-6&30&12\\12&12&12\end{bmatrix}=B$$

με αντικατάσταση της $B^2=B$ αποδεικνύεται και η ταυτότητα

$$(I-B)^2=I^2-2B+B^2=I-2B+B=I-B.$$

ii) Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο **<u>του πίνακα B</u>** από τη σχέση $x(\lambda)=\det(\lambda I-B)$ και έχουμε

$$x(\lambda)=\det(\lambda I-B)=\det\begin{bmatrix}\lambda-5/6 & 1/6 & -2/6\\ 1/6 & \lambda-5/6 & -2/6\\ -2/6 & -2/6 & \lambda-2/6\end{bmatrix}=\lambda^3-2\lambda^2+\lambda=\lambda(\lambda-1)^2.$$

Από την εξίσωση $x(\lambda)=0$ προκύπτει ότι ο πίνακας B έχει ιδιοτιμές

$$\lambda_1=0 \text{ και } \lambda_{2,3}=1 \text{ (διπλή ιδιοτιμή).}$$

Για τη μονής αλγεβρικής πολλαπλότητας ιδιοτιμή $\lambda_1=0$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα προκύπτει από τη λύση του ομογενούς συστήματος:

$$\begin{bmatrix}-5 & 1 & -2\\ 1 & -5 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

από όπου μετά από γραμμοπράξεις καταλήγουμε

$$\begin{bmatrix}-5 & 1 & -2\\ 1 & -5 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{bmatrix} r_1\to r_2 \begin{bmatrix}1 & -5 & -2\\ -5 & 1 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{bmatrix} \begin{matrix}r_2\to 5r_1+r_2\\ r_3\to 2r_1+r_3\end{matrix} \begin{bmatrix}1 & -5 & -2\\ 0 & -24 & -12\\ 0 & -12 & -6\end{bmatrix} r_3\to(-2)r_3+r_2 \begin{bmatrix}1 & -5 & -2\\ 0 & -24 & -12\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-5y-2z=0\\ 2y+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ z=-2y\end{cases}$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1=0$ είναι της μορφής:

$$\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\ y\\ -2y\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -2\end{bmatrix},\ y\neq 0$$

Δηλαδή, η ιδιοτιμή έχει γεωμετρική πολλαπλότητα 1.

Για τη διπλής αλγεβρικής πολλαπλότητας ιδιοτιμή $\lambda=1$ θεωρούμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

από όπου μετά από γραμμοπράξεις καταλήγουμε

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{bmatrix} \begin{matrix}r_2\to r_1-r_2\\ r_3\to 2r_1+r_3\end{matrix} \begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow x+y-2z=0\Leftrightarrow x=-y+2z.$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στη διπλή ιδιοτιμή $\lambda_{2,3}=1$ είναι της μορφής:

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y+2z\\y\\z\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}=y\boldsymbol{u}_2+z\boldsymbol{u}_3,$$

με τις τιμές των y,z όχι και τις δύο μηδέν.

Δηλαδή, η ιδιοτιμή έχει γεωμετρική πολλαπλότητα 2.
iii) Ο πίνακας B διαγωνοποιείται διότι η αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής είναι ίση με τη γεωμετρική της. Και για τους παρακάτω πίνακες

$$P=\begin{pmatrix}-1&2&1\\1&0&1\\0&1&-2\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Ισχύει $B=PDP^{-1}\Leftrightarrow D=P^{-1}BP$

5. (Μονάδες 20)

i) (8 μον) Δίνεται ο πίνακας

$$A=\begin{bmatrix}3&-1\\-1&3\end{bmatrix}.$$

Βρείτε ορθογώνιο πίνακα U, τέτοιος ώστε το γινόμενο $U^T AU$ να είναι διαγώνιος πίνακας.

ii) (7 μον) Υπολογίστε τους πίνακες

$$B=A^{100},\ C=\left(\frac{1}{2}A-I\right)^{100}$$

iii) (5 μον) Δίνεται η τετραγωνική μορφή $q=3x^2+3y^2-2xy$. Μετασχηματίστε την σε διαγώνια (κανονική) μορφή και εξετάσετε το πρόσημό της.

Μπορείτε να συμβουλευθείτε τα Παραδείγματα 17,18, 25, σελ 294-296 και σελ 314 του βιβλίου. Επίσης από το ΕΔΥ τις Ασκήσεις 8,9,12, του Κεφ 10 καθώς και την Άσκηση 7 του Κεφ 11. Από ΣΕΥ από το κεφάλαιο 9- Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα προτείνεται η μελέτη της παραγράφου 9.3.1.2 καθώς και τα Παραδείγματα 9.3.1.2.2, 9.3.1.2.5, από το Κεφάλαιο 10-Διαγωνοποίηση τις σελίδες 36-37 καθώς και το Παράδειγμα 10.2.4.1 και τέλος από το Κεφάλαιο 11-Τετραγωνικές μορφές, τα θεωρήματα 11.1.5 και 11.2.1, τον ορισμό 11.1.4 και τα παραδείγματα 11.1.1, 11.2.2.

Λύση :

i) Ο ορθογώνιος πίνακας U θα υπολογισθεί ακολουθώντας τη «μεθοδολογία διαγωνοποίησης ερμιτιανών πινάκων» (σελ. 294, βιβλίου). Από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$x(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\det\begin{bmatrix}\lambda-3&1\\1&\lambda-3\end{bmatrix}=(\lambda-3)^2-1=(\lambda-2)(\lambda-4),$$

υπολογίζονται οι ιδιοτιμές $\lambda_1=2$ και $\lambda_2=4$.

Στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ ιδιοδιάνυσμα είναι $\boldsymbol{x}_1 = [1 \quad 1]^T$ και στη $\lambda_2 = 4$ είναι $\boldsymbol{x}_2 = [1 \quad -1]^T$. Επειδή ο πίνακας A είναι συμμετρικός, σύμφωνα με το θεώρημα 5.3.2 του βιβλίου, τα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ είναι κάθετα, επομένως, μετά την κανονικοποίησή τους, συμπεραίνουμε ότι ο ορθογώνιος πίνακας είναι

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

ii) Επειδή $A = UDU^T$, όπου $D = diag(2,4)$ και ισχύει $UU^T = U^T U = I$ έχουμε :

$$B = A^{100} = UD^{100}U^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^{100}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 2^{200} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2^{100} & 2^{200} \\ 2^{100} & -2^{200} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2^{100} + 2^{200} & 2^{100} - 2^{200} \\ 2^{100} - 2^{200} & 2^{100} + 2^{200} \end{bmatrix}$$

$$C = \left(\frac{1}{2}A - I\right)^{100} = \left(\frac{1}{2}UDU^T - UU^T\right)^{100} = \left(U\left(\frac{1}{2}D^T - I\right)U^T\right)^{100} = U\left(\frac{1}{2}D - I\right)^{100} U^T =$$

$$= U\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{100} U^T = U\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}U^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

iii) Έχουμε

$$q = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}U\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}U^T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Αφού για τον $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ισχύει $A = UDU^T$, όπου $D = diag(2,4)$ και $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (Από το 1ο υποερώτημα).

Αν $U^T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, τότε

$$q = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 2u^2 + 4v^2$$

είναι η διαγώνια (κανονική) τετραγωνική μορφή της q. Επειδή ο πίνακας A έχει θετικές ιδιοτιμές, η q είναι θετικά ορισμένη.