ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ I (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 3η

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: 11 Ιανουαρίου 2010

Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 12 Φεβρουαρίου 2010.

Πριν από την λύση κάθε άσκησης καλό είναι να μελετούνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις από τις παραπομπές στα συγγράμματα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της 3ης εργασίας αναφέρονται στα:

Ενότητα 1 (Τα βασικά σύνολα αριθμών)
Ενότητα 2 (Συναρτήσεις – Ακολουθίες – Όρια)
Ενότητα 3 (Σειρές) και
Ενότητα 4 (Όριο και συνέχεια συνάρτησης)
του συγγράμματος του ΕΑΠ «Γενικά Μαθηματικά Ι – Τόμος Α' - Λογισμός μιας Μεταβλητής» του Γ. Δάσιου.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής να συμβουλευθείτε επίσης το **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στο http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm ως εξής:

Υλικό Εισαγωγικών και Προαπαιτούμενων Μαθηματικών: Εισαγωγικές Ασκήσεις για τη ΘΕ. Οι λύσεις τους. Εισαγωγικές Έννοιες της ΘΕ, Σύνολα Αριθμών.

Συνοδευτικό **Ε**κπαιδευτικό **Υ**λικό: **Λογισμός**
Σύνολα Αριθμών, Ακολουθίες, Συναρτήσεις, Σειρές, Όρια και Συνέχεια.

Στόχοι:

Κατανόηση και εμπέδωση των παρακάτω εννοιών:
Πραγματικοί και μιγαδικοί αριθμοί (έμφαση στην τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών καθώς και στην εύρεση των δυνάμεων και των ριζών αυτών).
Συναρτήσεις (έμφαση στην εύρεση των πεδίων ορισμού και τιμών, τη σύνθεση συναρτήσεων, την εύρεση της αντίστροφης και στις ιδιότητες 1-1 και επί).
Ακολουθίες (έμφαση στην έννοια της ακολουθίας, στο όριο και τα κριτήρια σύγκλισης ακολουθίας, στις φραγμένες, μονότονες και απειριζόμενες ακολουθίες).
Σειρές (έμφαση στην έννοια της σειράς, στις ειδικές κατηγορίες σειρών και στα κριτήρια σύγκλισης σειρών)
Όριο και συνέχεια συνάρτησης, πλευρικό όριο και πλευρική συνέχεια, μονοτονία συναρτήσεων.

Η πρώτη άσκηση αναφέρεται στα βασικά σύνολα αριθμών **(Ενότητα 1 του βιβλίου, Υλικό Εισαγωγικών και Προαπαιτούμενων Μαθηματικών** Εισαγωγικές Ασκήσεις για τη ΘΕ και Εισαγωγικές Έννοιες της ΘΕ Παράγραφος 1.4 καθώς επίσης και **ΣΕΥ Λογισμός** Σύνολα Αριθμών).

Άσκηση 1. (10 μονάδες)
Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.
α) (3 μον.) Να υπολογιστεί η τριγωνομετρική του μορφή και ο αντίστροφός του.
β) (3 μον.) Να υπολογιστεί η 5^{η} δύναμή του.
γ) (4 μον.) Να λυθεί η εξίσωση $w^5=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$. Παραστήστε τις λύσεις στο μιγαδικό επίπεδο. Τι παρατηρείτε;
Βλέπε ΣΕΥ Λογισμός, Σύνολα αριθμών, Θεώρημα 1.15.3, Παραδείγματα 1.14.3, 1.15.5 και 1.16.2.
Λύση:
α) Η τριγωνομετρική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού $z=x+iy$ είναι η $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$, όπου $\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ είναι το μέτρο του z και θ είναι το πρωτεύον όρισμά του, δηλαδή η γωνία θ, $0\le\theta<2\pi$, που υπολογίζεται από τις σχέσεις $\cos\theta=\dfrac{x}{\rho}$ και $\sin\theta=\dfrac{y}{\rho}$.
Στην άσκησή μας έχουμε ότι

$$\rho=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{4}=2.$$

Το θ ορίζεται από τις σχέσεις

$$\cos\theta=\frac{x}{\rho}=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ και } \sin\theta=\frac{y}{\rho}=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ οπότε } \theta=\frac{7\pi}{4}.$$

Άρα η τριγωνομετρική μορφή του z είναι η $z=2\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$.

Αν $z=x+iy$ είναι ένας μιγαδικός και $\bar{z}=x-iy$ είναι ο συζυγής του, τότε $z\bar{z}=|z|^2$.
Αν υποθέσουμε ότι $z\neq 0$, τότε

$$z\bar{z}=|z|^2 \Leftrightarrow \bar{z}=|z|^2 z^{-1} \Leftrightarrow z^{-1}=\frac{\bar{z}}{|z|^2},$$

οπότε, στην άσκησή μας,

$$z^{-1}=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

β) Σύμφωνα με το θεώρημα De Moivre (βλέπε Θεώρημα 1.15.3 στο ΣΕΥ Λογισμός, Σύνολα αριθμών), $z^n=\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$.
Έτσι η πέμπτη δύναμη του μιγαδικού αριθμού z της άσκησης είναι:

$$z^5=\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^5=2^5\left(\cos 5\frac{7\pi}{4}+i\sin 5\frac{7\pi}{4}\right)=2^5\left(\cos\frac{35\pi}{4}+i\sin\frac{35\pi}{4}\right)=$$

$$=2^5\left(\cos\left(4\cdot 2\pi+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(4\cdot 2\pi+\frac{3\pi}{4}\right)\right)=2^5\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=2^5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$

$$=-2^4\sqrt{2}+i2^4\sqrt{2}.$$

γ) Οι λύσεις της εξίσωσης $w^n=z$, όπου $z\in\mathbb{C}$, $z\neq 0$, είναι οι $n-$οστές ρίζες του z, δηλαδή $w=\sqrt[n]{z}$.. Οι ρίζες αυτές είναι διακεκριμένες και δίνονται από τον τύπο:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),$$

όπου ρ είναι το μέτρο του z και θ είναι το πρωτεύον όρισμά του
(βλέπε Ενότητα 1 σελ. 6 του βιβλίου και την Παράγραφο 1.16 του ΣΕΥ Λογισμός, Σύνολα αριθμών). Στην άσκησή μας, οι λύσεις της $w^5 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ θα είναι οι $5^{\varepsilon\varsigma}$ ρίζες του z:

$$w_k = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{2k\pi + \frac{7\pi}{4}}{5} + i\sin\frac{2k\pi + \frac{7\pi}{4}}{5}\right), \quad k = 0,1,\ldots,4.$$

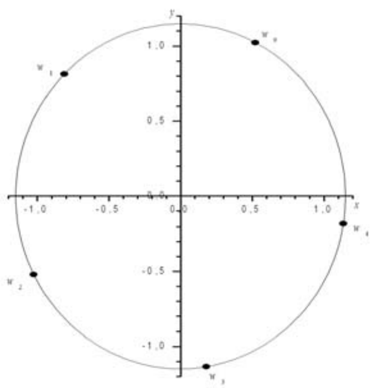
Οπότε, για $k = 0,1,2,3,4,$ παίρνουμε διαδοχικά:

$$w_0 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{20} + i\sin\frac{7\pi}{20}\right), \qquad w_1 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{20} + i\sin\frac{15\pi}{20}\right),$$

$$w_2 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{20} + i\sin\frac{23\pi}{20}\right), \qquad w_3 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{31\pi}{20} + i\sin\frac{31\pi}{20}\right)$$

$$w_4 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{39\pi}{20} + i\sin\frac{39\pi}{20}\right).$$

Παριστάνοντας στο μιγαδικό επίπεδο αυτές τις λύσεις, παρατηρούμε ότι αποτελούν κορυφές ενός κανονικού πενταγώνου που είναι εγγεγραμμένο σε έναν κύκλο με κέντρο (0,0) και ακτίνα $\sqrt[5]{2}$:



Η δεύτερη άσκηση αναφέρεται στις συναρτήσεις (βλέπε βιβλίο Γ. Δάσιου, Λογισμός μιας Μεταβλητής, Ενότητα 2**,** Παράγραφος 2.1, Υλικό Εισαγωγικών και Προαπαιτούμενων Μαθηματικών Εισαγωγικές Ασκήσεις για τη ΘΕ και Εισαγωγικές Έννοιες της ΘΕ, Παράγραφος 1.2 καθώς επίσης και ΣΕΥ Λογισμός, Συναρτήσεις.

Άσκηση 2. (15 μονάδες)

Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$. Να βρεθούν το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης. Να εξετασθεί εάν είναι 1-1 και να ορισθεί η αντίστροφη συνάρτησή της, όπου αυτή ορίζεται.

Λύση:

Πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$ είναι το σύνολο $D_f=\{x\in\mathbb{R}:\ x^2-1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-1,1\}=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

Οπότε $\forall x\in D_f$ ισχύει $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{(x-2)}{(x+1)}$

Πεδίο τιμών της συνάρτησης $f(x)$ είναι το σύνολο

$$R_f=\left\{y\in\mathbb{R}:\ \text{για τα οποία η εξίσωση ως προς } x,\ y=\frac{(x-2)}{(x+1)} \text{ έχει μία τουλάχιστον λύση στο } D_f\ \right\}$$

Οπότε έχουμε

$$\left.\begin{array}{c} y=\dfrac{(x-2)}{(x+1)} \\ x\in D_f \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} (x+1)y=(x-2) \\ x\in D_f \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} (y-1)x=-y-2 \\ x\in D_f \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} x=-\dfrac{(y+2)}{(y-1)},\quad y\neq 1 \\ x\in D_f \end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} x=-\dfrac{(y+2)}{(y-1)},\quad y\neq 1 \\ -\dfrac{(y+2)}{(y-1)}\neq 1,\ \ -\dfrac{(y+2)}{(y-1)}\neq -1 \end{array}\right\}\Leftrightarrow \begin{array}{c} x=-\dfrac{(y+2)}{(y-1)},\quad y\neq 1 \\ y\neq 1,\ y\neq -\dfrac{1}{2} \end{array}$$

διότι

$$\left.\begin{array}{c} y\neq 1 \\ -\dfrac{(y+2)}{(y-1)}\neq 1 \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} y\neq 1 \\ -(y+2)\neq (y-1) \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} y\neq 1 \\ y\neq -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$$

και

$$\left.\begin{array}{c} y\neq 1 \\ -\dfrac{(y+2)}{(y-1)}\neq -1 \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} y\neq 1 \\ -(y+2)\neq -(y-1) \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} y\neq 1 \\ -2\neq 1 \end{array}\right\}\Leftrightarrow y\neq 1$$

Οπότε, η εξίσωση ως προς x, $y=\dfrac{(x-2)}{(x+1)}$ έχει μοναδική λύση στο D_f τη $x=-\dfrac{(y+2)}{(y-1)}$ όταν και μόνο $y\neq 1$ και $y\neq -\dfrac{1}{2}$ οπότε το πεδίο τιμών της συνάρτησης είναι

$$R_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2},1\right\}=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$$

Η συνάρτηση είναι 1-1 διότι για κάθε $x_1,x_2\in D_f=\mathbb{R}-\{1,2\}$ τέτοια ώστε

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\frac{(x_1-2)}{(x_1+1)}=\frac{(x_2-2)}{(x_2+1)}\Rightarrow(x_1-2)(x_2+1)=(x_2-2)(x_1+1)\Rightarrow.$$

$$x_1x_2-2x_2+x_1-2=x_1x_2+x_2-2x_1-2\Rightarrow x_1=x_2$$

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε την αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}:R_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2},1\right\}\to D_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$ με τύπο $f^{-1}(x)=-\dfrac{(x+2)}{(x-1)}$.

Η τρίτη και η τέταρτη άσκηση αναφέρονται στις ακολουθίες (βλέπε βιβλίο Γ. Δάσιου, Λογισμός μιας Μεταβλητής, Ενότητα 2, Παράγραφοι 2.2-2.4 καθώς επίσης και ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες).

Άσκηση 3 (15 μονάδες)

α) (5 μον.) Να εξετασθεί αν η ακολουθία με γενικό όρο:

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

είναι i) φραγμένη ii) συγκλίνουσα.

β) (10 μον.) Δίνεται η αναδρομική ακολουθία:

$$\alpha_{n+1} = 2 - \frac{1}{\alpha_n}, \text{ με } \alpha_1 = 2$$

Να εξετασθεί αν είναι μονότονη, φραγμένη και συγκλίνουσα. Σε περίπτωση που συγκλίνει να προσδιορισθεί το όριο.

Βλέπε ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες, Παράγραφοι 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.8.6, 2.8.7

Λύση

α) i) Ισχύει $|\alpha_n| = \left|\frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right| \le \frac{1}{n} \le 1$, άρα είναι φραγμένη (βλέπε ΣΕΥ, Ακολουθίες, Παράγραφος 2.3).

ii) Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ είναι φραγμένη αφού $\left|\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right| \le 1$.

Επίσης γνωρίζουμε ότι η ακολουθία $\frac{1}{n}$ είναι μηδενική. Επειδή η α_n είναι γινόμενο μιας φραγμένης επί μια μηδενική ακολουθία, θα είναι και αυτή μηδενική (βλέπε ΣΕΥ, Ακολουθίες, Λήμμα 2.4.3).

β) Σε πρώτη φάση αποδεικνύουμε ότι ο αναδρομικός τύπος έχει έννοια για όλες τις τιμές του n, δηλαδή $\alpha_n \neq 0$, για $n = 1,2,3,...$ Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά. Ισχύει $\alpha_1 = 2 > 1$. Υποθέτουμε ότι ισχύει $\alpha_j > 1$. Τότε $\frac{1}{\alpha_j} < 1$, άρα $\alpha_{j+1} = 2 - \frac{1}{\alpha_j} > 2 - 1 = 1$ και ο τύπος έχει έννοια αφού όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι > 1.

Όσον αφορά την μονοτονία, επαγωγικά αποδεικνύουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα (βλέπε ΣΕΥ, Ακολουθίες, Παράγραφος 2.6).

Ισχύει $\alpha_2 = 2 - \frac{1}{\alpha_1} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} < 2 = \alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_2 < \alpha_1$.

Έστω, ότι για $n = j$ ισχύει $\alpha_{j+1} < \alpha_j$.

Τότε $\frac{1}{\alpha_{j+1}} > \frac{1}{\alpha_j}$, άρα $\alpha_{j+2} = 2 - \frac{1}{\alpha_{j+1}} < 2 - \frac{1}{\alpha_j} = \alpha_{j+1}$. Συνεπώς ισχύει και για $n = j+1$.

Επομένως, η ακολουθία α_n είναι γνησίως φθίνουσα.

Θα εξετάσουμε αν είναι και φραγμένη (βλέπε ΣΕΥ, Ακολουθίες, Παράγραφος 2.3).

Η α_n είναι φθίνουσα, συνεπώς $\alpha_n \le \alpha_1 = 2$, για κάθε $n = 1,2,3,\ldots$, άρα είναι άνω φραγμένη. Όπως είδαμε, ισχύει $\alpha_n > 1$, για κάθε $n = 1,2,3,\ldots$, άρα η ακολουθία μας είναι και κάτω φραγμένη. Συνεπώς (βλέπε ΣΕΥ, Ακολουθίες, Πρόταση 2.8.6), αφού είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, συγκλίνει.

Για τον προσδιορισμό του ορίου χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των ορίων (βλέπε ΣΕΥ, Ακολουθίες, Παράγραφοι 2.4.1-2.4.4). Έστω $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = x$. Τότε

$x = \lim_{n\to\infty} \alpha_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{\alpha_n}\right) = 2 - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}\right) = 2 - \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\alpha_n} = 2 - \frac{1}{x}$. Λύνουμε την εξίσωση $x = 2 - \frac{1}{x}$. Έχουμε $x - 2 + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{x} = 0$, άρα $x = 1$. Δηλαδή $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 1$.

Άσκηση 4 (15 μονάδες)
Να υπολογισθεί το όριο των ακολουθιών

i) (5 μον.) $a_n = n\sqrt{n+4} - n\sqrt{n+1}$

ii) (5 μον.) $a_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^2}$

iii) (5 μον.) $a_n = n^{2/3}\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)$

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την γνωστή ταυτότητα $x^3 - y^3 = (x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right)$)

Βλέπε βιβλίο Γ. Δάσιου, Λογισμός μιας Μεταβλητής, Ενότητα 2, Παράγραφοι 2.2-2.4, σελ. 19, 21, 24 και ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες, Παράγραφοι 2.4, 2.7.1-2.7.3, 2.9.1, 2.9.2

Λύση:

i) Αν προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε άμεσα το όριο χρησιμοποιώντας τους συνήθεις κανόνες υπολογισμού ορίων (βλέπε ΣΕΥ, Ακολουθίες, Παράγραφος 2.4) έχουμε ότι
$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n\sqrt{n+4} - \lim_{n\to\infty} n\sqrt{n+1} = +\infty - \infty$, που είναι απροσδιόριστο. Μπορούμε όμως να πολλαπλασιάσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση του αριθμητή οπότε έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(n\sqrt{n+4} - n\sqrt{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\frac{\left(\sqrt{n+4}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+1}\right)}{\left(\sqrt{n+4}+\sqrt{n+1}\right)} = \lim_{n\to\infty} n\frac{\left(\sqrt{n+4}\right)^2 - \left(\sqrt{n+1}\right)^2}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\frac{(n+4)-(n+1)}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} n\frac{3}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} n^{1/2}\frac{3}{\sqrt{\frac{n+4}{n}}+\sqrt{\frac{n+1}{n}}} =$$

$$= 3\lim_{n\to\infty} n^{1/2}\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{4}{n}} + \lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 3\lim_{n\to\infty} n^{1/2}\frac{1}{1+1} = +\infty.$$

ii) Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με $\left(n^2\right)^{n^2}$ και έχουμε:

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}$. Η ακολουθία $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ είναι υπακολουθία της $\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k}$ (βλέπε ΣΕΥ, Ακολουθίες, Παράγραφοι 2.7.1, 2.7.3) και ισχύει

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}=\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k}=e^{-1}$$ (βλέπε ΣΕΥ Παράγραφοι 2.9.1, 2.9.2).

Επίσης, η ακολουθία $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ είναι υπακολουθία της $\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}$ και ισχύει

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}=e$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^2}=\frac{e^{-1}}{e}=e^{-2}$

iii) Σύμφωνα με την υπόδειξη έχουμε

$$\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^3-\left(\sqrt[3]{n}\right)^3=\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)\left(\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^2+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\left(\sqrt[3]{n}\right)^2\right)\Leftrightarrow$$

$$n+1-n=\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)\left(\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^2+\sqrt[3]{(n+1)n}+\left(\sqrt[3]{n}\right)^2\right)\Leftrightarrow$$

$$1=\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)\left(\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^2+\sqrt[3]{(n+1)n}+\left(\sqrt[3]{n}\right)^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^2+\sqrt[3]{(n+1)n}+\left(\sqrt[3]{n}\right)^2}$$

Συνεπώς

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(n^{2/3}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}=\left(n^{2/3}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^2+\sqrt[3]{(n+1)n}+\left(\sqrt[3]{n}\right)^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}=\left(\frac{n^{2/3}}{(n+1)^{2/3}+n^{1/3}(n+1)^{1/3}+n^{2/3}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2/3}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/3}+1}=$$

$$=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2/3}+\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/3}+1}=\frac{1}{(1+0)^{2/3}+(1+0)^{1/3}+1}=\frac{1}{3}.$$

Η πέμπτη άσκηση αναφέρεται στις σειρές (βλέπε βιβλίο Γ. Δάσιου, Λογισμός μιας Μεταβλητής, Ενότητα 3 καθώς επίσης και ΣΕΥ Λογισμός, Σειρές).

Άσκηση 5 (25 μονάδες)

α) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

i) (5 μον.) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2^n}\right)$

ii) (5 μον.) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n2^n}$

iii) (5 μον.) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

β) (10 μον.) Να αποδείξετε ότι $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}=1$

Βλέπε βιβλίο Γ. Δάσιου, Λογισμός μιας Μεταβλητής, Παράγραφοι 3.1, 3.2, 3.3, ΣΕΥ Λογισμός, Σειρές, Παράγραφοι 1,2.1, 2.2,2. 3,3.3, 3.4.

Λύση:

α)

i) Λόγω της γραμμικής ιδιότητας συγκλινουσών σειρών έχουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$. Έτσι, η σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2^n}\right)$ εξαρτάται από τη σύγκλιση των σειρών $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ και $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ είναι p-σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ με $p=\frac{1}{2}<1$, άρα αποκλίνει. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ είναι γεωμετρική σειρά της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$ με $r=\frac{1}{2}$, οπότε, επειδή $|r|=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1$, αυτή συγκλίνει.

Επομένως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2^n}\right)$ αποκλίνει ως άθροισμα μιας συγκλίνουσας και μιας αποκλίνουσας σειράς.

ii) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του λόγου, σύμφωνα με το οποίο μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ με $a_n\geq 0$ συγκλίνει αν $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda<1$, αποκλίνει αν $\lambda>1$ ενώ δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν $\lambda=1$. Θέτουμε $a_n=\frac{(n+1)!}{n2^n}$, οπότε $a_n>0$ και εξετάζουμε το όριο $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+2)!}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{(n+1)!}{n2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!n2^n}{(n+1)!(n+1)2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(n+2)n2^n}{(n+1)!(n+1)2^n2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)}{2(n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)}{2n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)}{2n+\frac{2n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)}{2n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}=+\infty$$

Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n2^n}$ αποκλίνει.

iii) Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο της ρίζας σύμφωνα με το οποίο μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ με $a_n\geq 0$ συγκλίνει αν $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=r<1$, αποκλίνει αν $r>1$ ενώ δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν $r=1$. Για $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ έχουμε ότι $a_n\geq 0$ και

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2}{n}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e>1$. Άρα η σειρά αποκλίνει.

β) Αν $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$ για $n=1,2,3,...$ τότε θα έχουμε:

$$0<a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Αν θέσουμε $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ για $n=1,2,3,...$ τότε η a_n γράφεται ως $a_n = b_n - b_{n+1}$. Συνεπώς, η σειρά είναι τηλεσκοπική με μερικό άθροισμα:

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1},$$

και επομένως:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 1-0 = 1.$$

Η έκτη άσκηση αναφέρεται στα όρια και τη συνέχεια συναρτήσεων (βλέπε βιβλίο Γ. Δάσιου, Λογισμός μιας Μεταβλητής, Ενότητα 4 καθώς επίσης και ΣΕΥ Λογισμός, Όρια και Συνέχεια)

Άσκηση 6. (20 μονάδες)

α) (5 μον.) Υπολογίστε το παρακάτω όριο

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}$$

β) (7 μον.) Να εξετασθεί αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης

$$f(x) = (x+3)\sqrt{\frac{-2x}{x^2+6x+9}}, \text{ όταν } x\to -3.$$

γ) (8 μον.) Να βρεθούν οι τιμές των a, b ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+b\sin(2x)}{x}, & x<0 \\ a-1, & x=0 \\ \dfrac{2-\sqrt{4+x}}{bx}, & x>0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο σημείο $x=0$.

Βλέπε βιβλίο Γ. Δάσιου, Λογισμός μιας Μεταβλητής, παραδείγματα στην Παράγραφο 4.1, Ορισμός συνέχειας στην Παράγραφο 4.2 και ΣΕΥ Λογισμός, Όρια και Συνέχεια, Θεώρημα 5.1.6, Προτάσεις 5.1.9, 5.1.13, Παραδείγματα 5.1.7, 5.1.10, 5.1.18.

Λύση:

α) Αν προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε αυτό το όριο χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.1.6 του ΣΕΥ, βλέπουμε ότι

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to-1}x^2+3}+2\lim\limits_{x\to-1}x}{\lim\limits_{x\to-1}x+1}=\frac{\sqrt{(-1)^2+3}+2(-1)}{-1+1}=\frac{0}{0}$$

που είναι απροσδιόριστο. Όμως, μπορούμε να κάνουμε το εξής:

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)\left(\sqrt{x^2+3}-2x\right)}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}-2x\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-(2x)^2}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}-2x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+3-4x^2}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}-2x\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{-3x^2+3}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}-2x\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{-3\left(x^2-1\right)}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}-2x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{-3(x+1)(x-1)}{(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}-2x\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{-3(x-1)}{\sqrt{x^2+3}-2x}=\frac{-3\left(\lim\limits_{x\to-1}x-1\right)}{\sqrt{\lim\limits_{x\to-1}x^2+3}-2\lim\limits_{x\to-1}x}=$$

$$=\frac{-3(-1-1)}{\sqrt{1+3}-2(-1)}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

β) Μπορούμε να δούμε ότι: $\lim\limits_{x\to-3}(x+3)=0$, $\lim\limits_{x\to-3}\sqrt{-2x}=\sqrt{6}$ και $\lim\limits_{x\to-3}\left(x^2+6x+9\right)=0$. Συνεπώς, αν επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε απ' ευθείας το όριο της $f(x)$ χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.1.6 του ΣΕΥ, βλέπουμε ότι έχουμε $\lim\limits_{x\to-3}(x+3)\sqrt{\dfrac{-2x}{x^2+6x+9}}=0\dfrac{\sqrt{6}}{0}=\dfrac{0}{0}$, το οποίο είναι απροσδιόριστο. Παρατηρώντας ότι $x^2+6x+9=(x+3)^2$, η συνάρτησή μας μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$f(x)=(x+3)\sqrt{\frac{-2x}{(x+3)^2}}=\frac{(x+3)\sqrt{-2x}}{|x+3|}.$$

Ακολουθώντας την Πρόταση 5.1.9 του ΣΕΥ, υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια της $f(x)$ στο $x=-3$:

$$\lim_{x\to-3^-}f(x)=\lim_{x\to-3^-}\frac{(x+3)\sqrt{-2x}}{|x+3|}=\lim_{x\to-3^-}\frac{(x+3)\sqrt{-2x}}{-(x+3)}=$$
$$=-\lim_{x\to-3^-}\sqrt{-2x}=-\sqrt{-2\lim_{x\to-3^-}x}=-\sqrt{-2\cdot(-3)}=-\sqrt{6}$$

$$\lim_{x\to-3^+}f(x)=\lim_{x\to-3^+}\frac{(x+3)\sqrt{-2x}}{|x+3|}=\lim_{x\to-3^+}\frac{(x+3)\sqrt{-2x}}{(x+3)}=$$
$$=\lim_{x\to-3^+}\sqrt{-2x}=\sqrt{-2\lim_{x\to-3^+}x}=\sqrt{-2\cdot(-3)}=\sqrt{6}.$$

Αφού τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά δεν υπάρχει το όριο της $f(x)$ όταν $x\to-3$.

γ) Σύμφωνα με τον ορισμό της συνέχειας συνάρτησης, όπως αυτός δίνεται στην Παράγραφο 4.2 του βιβλίου, για να είναι η $f(x)$ συνεχής στο $x=0$ θα πρέπει

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=f(0)=\lim_{x\to0^+}f(x).$$

Για τη δοθείσα συνάρτηση έχουμε $f(0)=a-1$. Επίσης, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{ax + b\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{ax}{x} + \lim_{x\to 0^-} \frac{b\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} a + 2b \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(2x)}{2x} =$$
$$= a + 2b\cdot 1 = a + 2b$$

και

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2-\sqrt{4+x}}{bx} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(2-\sqrt{4+x}\right)\left(2+\sqrt{4+x}\right)}{bx\left(2+\sqrt{4+x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{4-\left(\sqrt{4+x}\right)^2}{bx\left(2+\sqrt{4+x}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{4-4-x}{bx\left(2+\sqrt{4+x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{bx\left(2+\sqrt{4+x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{b\left(2+\sqrt{4+x}\right)} =$$
$$= \frac{-1}{b\left(2+\sqrt{4+0}\right)} = -\frac{1}{4b}.$$

Για να είναι επομένως συνεχής η $f(x)$ στο $x=0$ θα πρέπει

$$a + 2b = a - 1 \Rightarrow 2b = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2},$$
$$-\frac{1}{4b} = a - 1 \Rightarrow -\frac{1}{4\left(-\frac{1}{2}\right)} = a - 1 \Rightarrow \frac{2}{4} = a - 1 \Rightarrow a = \frac{3}{2}.$$

(Για τον υπολογισμό του πρώτου ορίου, δείτε την Παράγραφο 5.1.6 του ΣΕΥ και το 1ο παράδειγμα της Παραγράφου 4.1 του βιβλίου).