Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης ΓΕ

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας» και αποστέλλει το έντυπο σε δύο μη συρραμμένα αντίγραφα (ή ηλεκτρονικά) στον Καθηγητή-Σύμβουλο. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος συμπληρώνει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας» και στα δύο αντίγραφα και επιστρέφει το ένα στο φοιτητή μαζί με τα σχόλια επί της ΓΕ, ενώ κρατά το άλλο για το αρχείο του μαζί με το γραπτό σημείωμα του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

*Σε περίπτωση ηλεκτρονικής υποβολής του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου θα πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: Π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 4η ΓΕ του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στη ΠΛΗ12 θα πρέπει να γραφεί: «**ioannou_ge4_plh12.doc**».*

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στοιχεία Φοιτητή: Ονομ/νυμο, διευθ/ση, τηλ., -ηλεκτρονική διεύθυνση	<…………………………………………………………> <…………………………………………………………> <…………………………………………………………> <…………………………………………………………>

ΚωδικόςΘΕ	**ΠΛΗ12**	Ονοματεπώνυμο Καθηγητή - Σύμβουλου	………………..
Κωδικός Τμήματος	**<…. >**	Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής σύμφωνα με το ακ. ημερολόγιο (***ημέρα Τρίτη***)	**23/3/2010**
Ακ. Έτος	**2009-10**	Ημερομηνία αποστολής ΓΕ από το φοιτητή	
α/α ΓΕ	**4η**	Επισυνάπτεται (*σε περίπτωση που έχει ζητηθεί*) η άδεια παράτασης από το Συντονιστή;	ΝΑΙ / ΟΧΙ

***Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή**: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα..*

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής ΓΕ από το φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στο φοιτητή	
Βαθμολογία *(αριθμητικά, ολογράφως)*	

Υπογραφή Φοιτητή

Υπογραφή Καθηγητή-Συμβούλου

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 4η

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: 15 Φεβρουαρίου 2010
Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 19 Μαρτίου 2010

Πριν από την λύση κάθε άσκησης καλό είναι να μελετώνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις των υποδείξεων και παραπομπών στα συγγράμματα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της τέταρτης εργασίας αναφέρονται στα:

Ενότητα 5 (Παράγωγος)
Ενότητα 6 (Βασικά Θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού)
Ενότητα 7 (Ακρότατα)
Ενότητα 8 (Το ανάπτυγμα Taylor)
Ενότητα 9 (Το ολοκλήρωμα)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «**Λογισμός Μιας Μεταβλητής**» του Γ. Δάσιου

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα συμβουλευθείτε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στη http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm ως εξής:

Συνοδευτικό **Ε**κπαιδευτικό **Υ**λικό :

Λογισμός Παράγωγοι, Βασικά Θεωρήματα Διαφορικού Λογισμού, Σειρές Taylor, Ολοκληρώματα 1

Στόχοι:

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η κατανόηση της έννοιας της παραγώγου και των εφαρμογών της στον υπολογισμό ορίων, εύρεσης ακρότατων και μελέτης συνάρτησης. Επίσης σκοπός είναι η κατανόηση ανάπτυξης και εφαρμογής των σειρών Taylor, και βασικών τεχνικών ολοκλήρωσης.

Άσκηση 1. (25 μονάδες)

i) (7 μονάδες) Να προσδιοριστούν τα α, $\beta \in R$, ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{αν x} \le 1 \\ \alpha x+\beta, & \text{αν x}>1 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

ii) (9 μονάδες) Υπολογίστε την παράγωγο για κάθε μία από τις επόμενες συναρτήσεις:

a) $f(x) = x^2 + 2x\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x)$

b) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+\ln(\sin(x))}$

c) $f(x) = 2^{\sqrt{x}} + e^{x^2+1} + \ln^2(3x), \ \ x > 0$

iii) (9 μονάδες) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού αποδείξτε ότι: $1-\dfrac{1}{x} \le \ln(x) \le x-1$ για κάθε $x > 0$.

Υπόδειξη: Στο ερώτημα ii c) θα χρειαστείτε τον ακόλουθο τύπο παραγώγισης $\left(a^{f(x)}\right)' = a^{f(x)} f'(x)\ln(a)$. Στο ερώτημα iii) χρησιμοποιήστε το θεώρημα σε κατάλληλη συνάρτηση στο διάστημα $\left[x, y\right]$ δείτε και την άσκηση 1β σελ 103 βιβλίου.

Λύση

i) Θέλουμε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Καταρχήν η f πρέπει να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, δηλαδή

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \text{ ή } \alpha \cdot 1 + \beta = 1^3 \text{ ή } \beta = 1-\alpha \qquad (1)$$

Έτσι η f γράφεται $f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{αν } x \le 1 \\ \alpha x + (1-a), & \text{αν x} > 1 \end{cases}$, οπότε

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}(x^2+x+1) = 3 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\alpha x+(1-a)-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{a(x-1)}{x-1} = \alpha$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 αν α = 3, οπότε λόγω της (1) έχουμε β = -2

ii)

a) $f'(x) = 2x + 2\sin(x)\cos(x) + 2x\cos^2(x) - 2x\sin^2(x) - 2\cos(x)\sin(x) =$

$= 2x(1+\cos^2(x) - \sin^2(x)) = 2x \cdot 2\cos^2(x) = 4x\cos^2(x)$

b)

$$f'(x)=\frac{\cos(x)\cdot(1+\ln\left(\sin(x)\right))-\sin(x)\cdot\dfrac{1}{\sin(x)}\cdot\cos(x)}{(1+\ln\left(\sin(x)\right))^2}=\frac{\ln\left(\sin(x)\right)\cdot\cos x}{(1+\ln\left(\sin(x)\right))^2}$$

c)

$f(x)=2^{\sqrt{x}}+e^{x^2+1}+\ln^2(3x),\ \ x>0$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$f'(x)=\left(2^{\sqrt{x}}+e^{x^2+1}+\ln^2\left(3x\right)\right)'=2^{\sqrt{x}}\cdot\ln\left(2\right)\cdot\left(\sqrt{x}\right)'+e^{x^2+1}\cdot\left(x^2+1\right)'+2\cdot\ln\left(3x\right)\cdot\left(\ln\left(3x\right)\right)'=$$

$$=2^{\sqrt{x}}\cdot\ln\left(2\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+e^{x^2+1}\cdot\left(2x\right)+2\cdot\ln\left(3x\right)\cdot\frac{1}{3x}\left(3x\right)'=\frac{2^{\sqrt{x}}\cdot\ln\left(2\right)}{2\sqrt{x}}+2x\cdot e^{x^2+1}+\frac{2\cdot\ln\left(3x\right)}{x}$$

iii) Θα ξεχωρίσουμε τρεις περιπτώσεις:

α) όταν $x=1$ τότε φανερά ισχύει η σχέση **ως ισότητα**.

β) όταν $x>1$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ισχύει

$$1-\frac{1}{x}\le\ln(x)\le x-1\Leftrightarrow\frac{x-1}{x}\le\ln(x)\le x-1\overset{x-1>0,\ln(1)=0}{\Leftrightarrow}\frac{1}{x}\le\frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}\le 1$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t)=\ln(t)$ στο διάστημα $\left[1,x\right]$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(t)=\dfrac{1}{t}$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού θα υπάρχει $\xi\in\left(1,x\right)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(\xi)\Leftrightarrow\frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}=\frac{1}{\xi}$$

Εφόσον ότι $\xi\in\left(1,x\right)$ έχουμε $\xi>1\Leftrightarrow\dfrac{1}{\xi}<1$ και $\xi<x\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{\xi}$ από όπου συμπεραίνουμε ότι $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{\xi}<1$ δηλαδή ότι $\dfrac{1}{x}<\dfrac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}<1$ το οποίο είναι αυτό που ζητάμε.

γ) όταν $0<x<1$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ισχύει

$$1-\frac{1}{x}\le\ln(x)\le x-1\Leftrightarrow\frac{x-1}{x}\le\ln(x)\le x-1\overset{x-1<0,\ln(1)=0}{\Leftrightarrow}\frac{1}{x}\ge\frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}\ge 1\Leftrightarrow\frac{1}{x}\ge\frac{\ln(1)-\ln(x)}{1-x}\ge 1$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t)=\ln(t)$ στο διάστημα $\left[x,1\right]$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(t)=\dfrac{1}{t}$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού θα υπάρχει $\xi\in\left(x,1\right)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(1)-f(x)}{1-x}=f'(\xi)\Leftrightarrow\frac{\ln(1)-\ln(x)}{1-x}=\frac{1}{\xi}$$

Εφόσον ότι $\xi \in (x,1)$ έχουμε $\xi < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\xi} > 1$ και $x < \xi \Leftrightarrow \dfrac{1}{\xi} < \dfrac{1}{x}$ από όπου συμπεραίνουμε ότι $1 < \dfrac{1}{\xi} < \dfrac{1}{x}$ δηλαδή ότι $\dfrac{1}{x} > \dfrac{\ln(1)-\ln(x)}{1-x} > 1$ το οποίο είναι αυτό που ζητάμε.

Άσκηση 2. (**25 μονάδες**)

i) (12 μονάδες) Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hospital, να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9x+\ln(3x)}{3x+\ln\left(x^2\right)}$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x - x^2\right)$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x + x}{e^x - x^2}$

δ) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\dfrac{1}{1-\cos(2x)} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

Υπόδειξη: Για τη (γ) δείτε το παράδειγμα στη σελίδα 27 στο κεφάλαιο Βασικά Θεωρήματα Διαφορικού Λογισμού του Συνοδευτικού Εκπαιδευτικού Υλικού.

ii) (13 μονάδες) Αν για κάθε πραγματικό αριθμό $x > -4$ ισχύει

$$\eta\mu x + x \le f(x) \le 8\sqrt{x+4} - 16$$

να βρεθεί η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 0$.

Υπόδειξη: Στο ερώτημα (ii) εξετάζεται η σχέση μεταξύ της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο και της κλίσης της εφαπτόμενης ευθείας στη γραφική παράσταση της συνάρτησης στο ίδιο σημείο. Για τον υπολογισμό της παραγώγου της f στο 0, θα χρειαστεί να βρείτε την τιμή της f στο 0, τον λόγο μεταβολής της f στο 0 και στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο του λόγου μεταβολής χρησιμοποιώντας το κριτήριο παρεμβολής (Πρόταση 5.1.12 Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό) .

Λύση

i)

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9x+\ln(3x)}{3x+\ln\left(x^2\right)} \underset{D.L.H.}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(9x+\ln(3x)\right)'}{\left(3x+\ln\left(x^2\right)\right)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9+\dfrac{1}{x}}{3+\dfrac{2}{x}} = \dfrac{9+0}{3+0} = 3$

β)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(e^x - x^2\right) = \lim_{x\to+\infty} e^x \left(1 - \frac{x^2}{e^x}\right) = (+\infty)\cdot(1-0) = +\infty$$

γιατί

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}\underset{D.L.H.}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}\underset{D.L.H.}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{\left(e^x\right)'}\underset{D.L.H.}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{+\infty}=0$$

γ)

Υπολογίζουμε χωριστά το όριο του αριθμητή και του παρονομαστή. Το όριο του αριθμητή είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^x+x\right)=(+\infty)+(+\infty)=+\infty$$

Το όριο του παρονομαστή το έχουμε υπολογίσει στο προηγούμενο ερώτημα και ισχύει:
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x^2\right)=+\infty$
Συνεπώς για το ζητούμενο όριο έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+x}{e^x-x^2}\underset{D.L.H.}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x+x\right)'}{\left(e^x-x^2\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^x-2x}\underset{D.L.H.}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x-2x\right)'}$$

$$\underset{D.L.H.}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-2}\underset{D.L.H.}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(e^x-2\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

Εδώ παρόμοια με ότι έχουμε κάνει στο ερώτημα β) έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}e^x\left(1-\frac{2x}{e^x}\right)=(+\infty)\cdot(1-0)=+\infty$$

γιατί

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}\underset{D.L.H.}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{+\infty}=0$$

δ)

$$\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{1-\cos(2x)}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0+}\frac{x^2-1+\cos(2x)}{x^2\left(1-\cos(2x)\right)}\underset{D.L.H.}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to0+}\frac{\left(x^2-1+\cos(2x)\right)'}{\left(x^2-x^2\cos(2x)\right)'}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{2x-2\sin(2x)}{2x-2x\cos(2x)+2x^2\sin(2x)}\underset{D.L.H.}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to0+}\frac{\left(2x-2\sin(2x)\right)'}{\left(2x-2x\cos(2x)+2x^2\sin(2x)\right)'}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{2-4\cos(2x)}{2-2\cos(2x)+4x\sin(2x)+4x\sin(2x)+4x^2\cos(2x)}=\frac{-2}{0(+)}=-\infty$$

Το όριο του τελευταίου παρονομαστή είναι ίσο με

$$\lim_{x\to0+}\left(2-2\cos(2x)+4x\sin(2x)+4x\sin(2x)+4x^2\cos(2x)\right)=\lim_{x\to0+}2(1-\cos(2x))=0$$

προσεγγίζοντας το 0 από θετικές τιμές διότι όταν το $x \to 0+$ το $\cos(2x)$ προσεγγίζει το 1 από τιμές μικρότερες της μονάδας.

ii) Η δοσμένη σχέση για $x=0$ δίνει $0 \le f(0) \le 0$ άρα $f(0)=0$.

i) *Για* $x>0$ λόγω της υπόθεσης έχουμε $\frac{\eta\mu x}{x}+1 \le \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \le 8\cdot\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$, και επειδή

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+1\right)=2 \text{ και } \lim_{x\to 0^+}\left(8\cdot\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(8\cdot\frac{\left(\sqrt{x+4}\right)^2-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}\right)=2,$$

σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής λαμβάνουμε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2, \quad (2)$$

ii) *Για* $x<0$ λόγω της υπόθεσης έχουμε $\frac{\eta\mu x}{x}+1 \ge \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \ge 8\cdot\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$, και επειδή

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+1\right)=2 \text{ και } \lim_{x\to 0^-}\left(8\cdot\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(8\cdot\frac{\left(\sqrt{x+4}\right)^2-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}\right)=2,$$

σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής λαμβάνουμε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2, \quad (3)$$

Άρα λόγω των (2) και (3) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, οπότε η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_0=0$, είναι $f'(0)=2$.

Άσκηση 3. (20 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$, με $x\in(-\infty,+\infty)$. Να προσδιορίσετε:

- **i)** Τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της στα οποία είναι **α)** αύξουσα, **β)** φθίνουσα
- **ii)** Τα ακρότατά της (μέγιστα και ελάχιστα).
- **iii)** Τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της στα οποία
  - a. στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω
  - b. στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.
- **iv)** Τα σημεία καμπής.
- **v)** Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy.
- **vi)** Τις ασύμπτωτες της f.

vii) Συνοψίστε σε ένα πίνακα τα παραπάνω στοιχεία και δώστε μία γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Λύση

i)

Παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R

$$f(x)=\frac{x}{x^2+4},\quad f'(x)=\frac{\left(x^2+4\right)-2x^2}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{4-x^2}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{(2-x)(2+x)}{\left(x^2+4\right)^2}\quad \text{και}$$

$$f''(x)=\left(\frac{4-x^2}{\left(x^2+4\right)^2}\right)'=\frac{-2x\left(x^2+4\right)^2-4x\left(4-x^2\right)\left(x^2+4\right)}{\left(x^2+4\right)^4}=\frac{-2x\left(x^2+4\right)-4x\left(4-x^2\right)}{\left(x^2+4\right)^3}$$

$$=\frac{2x^3-24x}{\left(x^2+4\right)^3}=\frac{2x\left(x^2-12\right)}{\left(x^2+4\right)^3}=\frac{2x\left(x-\sqrt{12}\right)\left(x+\sqrt{12}\right)}{\left(x^2+4\right)^3}$$

$$f'''(x)=\left(\frac{2x^3-24x}{\left(x^2+4\right)^3}\right)'=\frac{\left(6x^2-24\right)\left(x^2+4\right)^3-6x\left(2x^3-24x\right)\left(x^2+4\right)^2}{\left(x^2+4\right)^6}=$$

$$=\frac{\left(6x^2-24\right)\left(x^2+4\right)-6x\left(2x^3-24x\right)}{\left(x^2+4\right)^4}=\frac{-6x^4+144x^2-96}{\left(x^2+4\right)^4}$$

Άρα, η $f'(x)<0$ αν $x<-2$ ή $x>2$ και $f'(x)>0$ αν $-2<x<2$. Επομένως, η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-2,2)$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2)$ και $(2,+\infty)$.

ii) Για τα ακρότατα :

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x=2$.

Για $x=-2$ η $f''(-2)=\frac{1}{16}>0$ άρα το σημείο $\left(-2,-1/4\right)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

Για $x=2$ η $f''(2)=-\frac{1}{16}<0$ άρα το σημείο $\left(2,1/4\right)$ είναι τοπικό μέγιστο.

iii) - iv)

Στα σημεία καμπής πρέπει να ισχύει ότι $f''(x)=0$ και $f'''(x)\neq 0$.

Επομένως, $f''(x)=0 \Rightarrow x=0$ ή $x=\sqrt{12}$ ή $x=-\sqrt{12}$,

στα οποία η $f'''(x)\neq 0$ δεν μηδενίζεται. διότι $f'''(\sqrt{12})=f'''(-\sqrt{12})=\frac{3}{256}$ και άρα τα σημεία $(0,0),\left(-\sqrt{12},-\frac{\sqrt{3}}{8}\right),\left(\sqrt{12},\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$ είναι σημεία καμπής.

Η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στα διαστήματα $\left(-\infty,-\sqrt{12}\right),\left(0,\sqrt{12}\right)$, όπου $f''<0$, και τα κοίλα προς τα πάνω στο διάστημα$\left(-\sqrt{12},0\right),\left(\sqrt{12},+\infty\right)$, όπου $f''>0$.

v) Η συνάρτηση τέμνει τόσο τον άξονα των *x* όσο και τον άξονα των *y* στο σημείο (0,0).

vi) Η συνάρτηση δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτο αφού για κάθε $a\in\mathbb{R}$ είναι

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \neq \pm\infty$.

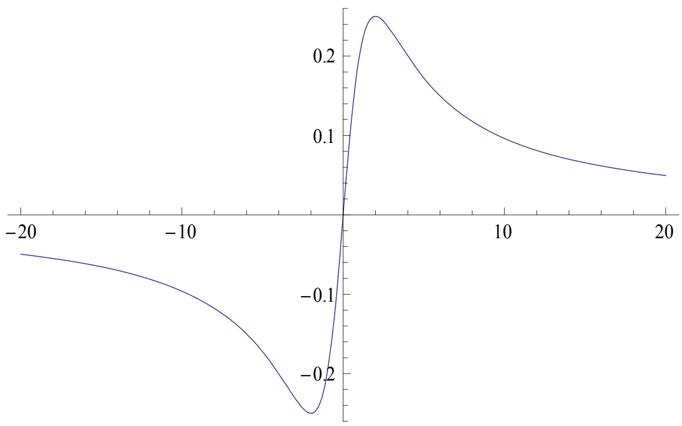
Έχει οριζόντια ασύμπτωτο όταν $x \to +\infty$ τον άξονα των x αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2+4} = 0$ και δεν έχει πλάγια ασύμπτωτο.

Έχει οριζόντια ασύμπτωτο όταν $x \to -\infty$ τον άξονα των x αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2+4} = 0$ και δεν έχει πλάγια ασύμπτωτο.

vii) Τα παραπάνω συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

	$-\infty$		$-\sqrt{12}$		**-2**		**0**		**2**		$\sqrt{12}$		$+\infty$
f '		**-**		**-**	**0**	**+**		**+**	**0**	**-**		**-**	
f "		**-**	**0**	**+**		**+**	**0**	**-**		**-**	**0**	**+**	
f							**0**						
			σ.κ		**τ. min**		**σ.κ.**		**τ. max**		**σ.κ.**		

Από την παραπάνω μελέτη προκύπτει η ακόλουθη μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης :



Άσκηση 4. (15 **μονάδες**)

i) (5 μονάδες) Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor της $f(x) = e^x$ κέντρου 0 υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2 e^x}$

ii) (5 μονάδες) Να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor κέντρου 0 η συνάρτηση $f(x) = 1 - e^{-2x^2}$

iii) (5 μονάδες) Χρησιμοποιώντας το παραπάνω ανάπτυγμα, υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \left(1 - e^{-2x^2}\right) dx$ σε μορφή σειράς. Πόσους όρους πρέπει να κρατήσουμε ώστε το σφάλμα να είναι μικρότερο του 10^{-3};

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι: *Αν σε μία εναλλάσσουσα σειρά,* $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$, $a_n > 0$, *χρησιμοποιήσουμε το μερικό άθροισμα* $\sum_{n=0}^{k}(-1)^n a_n$, *το σφάλμα που προκύπτει δεν υπερβαίνει (κατ' απόλυτη τιμή) τον πρώτο όρο που αγνοούμε, δηλαδή τον όρο* a_{k+1}.
Δείτε επίσης το παράδειγμα της σελίδας 10 και την άσκηση 5 της σελίδα 13 στο κεφάλαιο Σειρές Taylor στο Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό.

Λύση

i) Το ανάπτυγμα Taylor της $f(x) = e^x$ είναι: $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$.

Συνεπώς,

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^x - x - 1}{x^2 e^x} = \lim_{x\to 0+}\frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\right) - x - 1}{x^2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\right)} = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots}{x^2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0+}\frac{x^2\left(\frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-2}}{n!} + \ldots\right)}{x^2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\right)} = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-2}}{n!} + \ldots}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots} = \frac{\frac{1}{2} + 0 + \ldots + 0 + \ldots}{1 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots} = \frac{1}{2}$$

ii) Χρησιμοποιώντας και πάλι το ανάπτυγμα Taylor της εκθετικής συνάρτησης έχουμε:

$$f(x) = 1 - e^{-2x^2} = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-2x^2\right)^n}{n!} = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1\right)^n\frac{2^n}{n!}x^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{2^n}{n!}x^{2n} = 2x^2 - 2x^4 + \frac{4}{3}x^6 - \ldots..$$

iii)

$$\int_0^1\left(1 - e^{-2x^2}\right)dx = \int_0^1\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{2^n}{n!}x^{2n}\right)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{2^n}{n!}\int_0^1 x^{2n}dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{2^n}{n!}\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{2^n}{n!(2n+1)}$$

Σύμφωνα με την υπόδειξη, αν κρατήσουμε n-όρους σε αυτό το ανάπτυγμα θα έχουμε σφάλμα κατ' απόλυτη τιμή μικρότερο του $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!(2n+3)}$. Αν λοιπόν θέλουμε ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων θα πρέπει $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!(2n+3)} < 10^{-3}$ το οποίο επιτυγχάνεται για $n \geq 7$.

Κρατώντας έτσι 7 όρους έχουμε:

$$\frac{2^1}{1!\cdot 3} - \frac{2^2}{2!\cdot 5} + \frac{2^3}{3!\cdot 7} - \frac{2^4}{4!\cdot 9} + \frac{2^5}{5!\cdot 11} - \frac{2^6}{6!\cdot 13} + \frac{2^7}{7!\cdot 15} \cong 0.40217$$

Άσκηση 5. (15 μονάδες)

a) (9 μονάδες) Υπολογίστε τα επόμενα ολοκληρώματα :

i) $\int x\sin(2x)dx$

ii) $\int x^2\cos(2x)dx$

iii) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

b) (6 μονάδες) Έστω η συνάρτηση f που είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο ℝ, με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Αν η f στα $x_1=0$ *και* $x_2=1$ παρουσιάζει ακρότατα με τιμές 2 και 3 αντίστοιχα και ισχύει: $\int_0^1 e^x f(x)dx=5e$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I=\int_0^1 e^x f''(x)dx$

Υπόδειξη: Στο ερώτημα α iii) κάντε την αντικατάσταση $x=y^6$ και στη συνέχεια διαίρεση πολυωνύμων. Επίσης, στο ερώτημα β) θα χρειαστείτε το θεώρημα του διαφορικού λογισμού, του FERMAT, σύμφωνα με το οποίο: Αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό του Δ, τότε αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, θα ισχύει: $f'(x_0)=0$. (Προσοχή το αντίστροφο δεν ισχύει). Χρησιμοποιείστε την εκφώνηση του ανωτέρω θεωρήματος για να υπολογίσετε την τιμή της παραγώγου της f στα σημεία 0 και 1. Στη συνέχεια να υπολογιστεί με τον κανόνα της παραγοντικής ολοκλήρωσης το ζητούμενο ολοκλήρωμα.

Λύση

a)

i)

$$\int x\sin(2x)dx=\int x\left(\frac{-\cos(2x)}{2}\right)'dx=-\frac{x\cos(2x)}{2}+\int x'\frac{\cos(2x)}{2}dx$$

$$=-\frac{x\cos(2x)}{2}+\frac{1}{2}\int\cos(2x)dx=-\frac{x\cos(2x)}{2}+\frac{\sin(2x)}{4}+c$$

ii)

$$\int x^2\cos(2x)dx=\int x^2\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)'dx=\frac{x^2\sin(2x)}{2}-\int\left(x^2\right)'\frac{\sin(2x)}{2}dx$$

$$=\frac{x^2\sin(2x)}{2}-\int x\sin(2x)dx=\frac{x^2\sin(2x)}{2}+\frac{x\cos(2x)}{2}-\frac{\sin(2x)}{4}+c$$

iii)

Αντικαθιστούμε $x=y^6$

$$\int\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}+1}dx=\int\frac{y^3+1}{y^2+1}6y^5dy=6\int\frac{y^8+y^5}{y^2+1}dy$$

Διαιρούμε στη συνέχεια τον αριθμητή $y^8 + y^5$ δια του παρονομαστή $y^2 + 1$:

$$\frac{y^8 + y^5}{y^2 + 1} = \left(y^6 - y^4 + y^3 + y^2 - y - 1\right) + \frac{y+1}{y^2+1}$$

και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}+1}dx = 6\int \frac{y^8 + y^5}{y^2+1}dy$$

$$= 6\int y^6 dy - 6\int y^4 dy + 6\int y^3 dy + 6\int y^2 dy - 6\int y dy - 6\int dy + 6\int \frac{y+1}{y^2+1}dy$$

$$= \frac{6y^7}{7} - \frac{6y^5}{5} + \frac{6y^4}{4} + \frac{6y^3}{3} - \frac{6y^2}{2} - 6y + 3\int \frac{2y}{y^2+1}dy + 6\int \frac{1}{y^2+1}dy$$

$$= \frac{6y^7}{7} - \frac{6y^5}{5} + \frac{3y^4}{2} + 2y^3 - 3y^2 - 6y + 3\ln(y^2+1) + 6\arctan(y) + c$$

$$= \frac{6\sqrt[6]{x}^7}{7} - \frac{6\sqrt[6]{x}^5}{5} + \frac{3\sqrt[6]{x}^4}{2} + 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 3\ln(\sqrt[3]{x}+1) + 6\arctan(\sqrt[6]{x}) + c$$

b)

Λόγω της υπόθεσης και σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα ισχύει $f'(0) = f'(1) = 0$, καθώς και $f(0) = 2 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; f(1) = 3$. Εφαρμόζοντας διαδοχικά παραγοντική ολοκλήρωση λαμβάνουμε:

$$I = \int_0^1 e^x f''(x)dx = \left[e^x f'(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(e^x\right)' f'(x)dx = \left(e^1 f'(1) - e^0 f'(0)\right) - \int_0^1 e^x f'(x)dx$$

$$= \left(e\cdot 0 - 1\cdot 0\right) - \left\{\left[e^x f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(e^x\right)' f(x)dx\right\} = -\left(e^1 f(1) - e^0 f(0)\right) + \int_0^1 e^x f(x)dx = -3e + 2 + 5e = 2e + 2$$