Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης ΓΕ

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας» και αποστέλλει το έντυπο σε δύο μη συρραμμένα αντίγραφα (ή ηλεκτρονικά) στον Καθηγητή-Σύμβουλο. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος συμπληρώνει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας» και στα δύο αντίγραφα και επιστρέφει το ένα στο φοιτητή μαζί με τα σχόλια επί της ΓΕ, ενώ κρατά το άλλο για το αρχείο του μαζί με το γραπτό σημείωμα του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

*Σε περίπτωση ηλεκτρονικής υποβολής του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου θα πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: Π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 5η ΓΕ του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στη ΠΛΗ12 θα πρέπει να γραφεί: «**ioannou_ge5_plh12.doc**».*

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στοιχεία Φοιτητή: Ονομ/νυμο, διευθ/ση, τηλ., -ηλεκτρονική διεύθυνση	<…………………………………………………………> <…………………………………………………………> <…………………………………………………………> <…………………………………………………………>

ΚωδικόςΘΕ	**ΠΛΗ12**	Ονοματεπώνυμο Καθηγητή - Σύμβουλου	………………..
Κωδικός Τμήματος	**<…. >**	Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής σύμφωνα με το ακ. ημερολόγιο (***ημέρα Τρίτη***)	**27/4/2010**
Ακ. Έτος	**2009-010**	Ημερομηνία αποστολής ΓΕ από το φοιτητή	
α/α ΓΕ	**5η**	Επισυνάπτεται (*σε περίπτωση που έχει ζητηθεί*) η άδεια παράτασης από το Συντονιστή;	ΝΑΙ / ΟΧΙ

Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή: *Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα..*

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής ΓΕ από το φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στο φοιτητή	
Βαθμολογία *(αριθμητικά, ολογράφως)*	

Υπογραφή Φοιτητή	**Υπογραφή Καθηγητή-Συμβούλου**

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ I (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 5η

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: 22 Μαρτίου 2010
Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 23 Απριλίου 2010

Πριν από την λύση κάθε άσκησης καλό είναι να μελετώνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις των υποδείξεων και παραπομπών στα συγγράμματα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της πέμπτης εργασίας αναφέρονται στα:

Ενότητα 10 (Γενικευμένη Ολοκλήρωση)
του συγγράμματος του ΕΑΠ «**Λογισμός Μιας Μεταβλητής**» του Γ. Δάσιου

Ενότητα 2 (2.1 – 2.5**)** (Βασική Πιθανοθεωρία)
Ενότητα 3 (3.1, 3.3.1, 4.1, 4.4-4.6**)** (Τυχαίες μεταβλητές και χαρακτηριστικά των κατανομών τους – Χρήσιμα πρότυπα κατανομών)
του συγγράμματος του ΕΑΠ «**Βασικά Εργαλεία και Μέθοδοι για τον Έλεγχο της Ποιότητας**» του κ. Ι. Κουτρουβέλη

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα συμβουλευθείτε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στη http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm ως εξής:

Συνοδευτικό **Ε**κπαιδευτικό **Υ**λικό :
Λογισμός Ολοκληρώματα 1 (για άσκηση 2), Ολοκληρώματα 2 (για άσκηση 1)
Πιθανότητες Πιθανότητες Ι και Πιθανότητες ΙΙ (για ασκήσεις 3-6)

Στόχοι:

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι :
α) η κατανόηση τεχνικών ολοκλήρωσης καθώς και ο υπολογισμός γενικευμένων ολοκληρωμάτων,
β) η κατανόηση της έννοιας της πιθανότητας καθώς και ο υπολογισμός της πιθανότητας ενδεχομένων βάσει προτάσεων από την αξιωματική θεωρία των πιθανοτήτων,
γ) η κατανόηση της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής και ο υπολογισμός βάσει κατάλληλων συναρτήσεων της πιθανοτικής συμπεριφοράς τυχαίων μεταβλητών που περιγράφουν τα αποτελέσματα ενός πειράματος.

Θέμα 1. (15 μονάδες)

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int \frac{x^2+3}{x^3-x^2-x+1}dx \qquad I_2 = \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \qquad I_3 = \int_1^2 x^2 a^x dx, a>0$$

Υπόδειξη: Στο (I_1) εφόσον παραγοντοποιήσετε τον παρονομαστή να αναλύσετε το κλάσμα σε επιμέρους κλάσματα (κεφ.7 –ΣΕΥ Ολοκληρώματα 2). Στο (I_2) να γίνει ολοκλήρωση με αντικατάσταση (κεφ. 3, 11 - ΣΕΥ Ολοκληρώματα 2). Στο (I_3) προσπαθήστε να εφαρμόσετε παραγοντική ολοκλήρωση (κεφ.5 - ΣΕΥ Ολοκληρώματα 2) λαμβάνοντας υπόψη ότι $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$ (παράγραφος 6.6 - ΣΕΥ Παράγωγος).

Λύση

(α) Είναι ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης.
Πρώτα παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή

$$x^3-x^2-x+1 = x^2(x-1)-(x-1) = (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1) = (x-1)^2(x+1)$$

Στη συνέχεια αναλύουμε την ρητή παράσταση σε απλά κλάσματα

$$\frac{x^2+3}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1} = \frac{A\left(x+1\right)+B\left(x-1\right)\left(x+1\right)+C(x-1)^2}{(x-1)^2\left(x+1\right)} =$$

$$= \frac{\left(B+C\right)x^2+\left(A-2C\right)x+\left(A-B+C\right)}{(x-1)^2\left(x+1\right)}$$

και εξισώνουμε τους συντελεστές των δυνάμεων του x στους αριθμητές

$$B+C=1$$

$$A-2C=0$$

$$A-B+C=3$$

Υπολογίζουμε τα *A*, *B* και *C* από την επίλυση του παραπάνω συστήματος

$$A=2, B=0, C=1$$

και συνεπώς

$$\frac{x^2+3}{x^3-x^2-x+1} = \frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}$$

ή ισοδύναμα

$$\int \frac{x^2+3}{x^3-x^2-x+1}dx = \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{2}{(x-1)^2}dx = \ln\left|x+1\right| - \frac{2}{x-1}+c$$

αφού

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}dx = \int (x-1)^{-2}d(x-1) = \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}+c = -\frac{1}{(x-1)}+c$$

(β) Θέτουμε $u=\sqrt{x}$. Συνεπώς $u^2=x$ και άρα $2udu=dx$.

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \underset{dx=2udu}{\overset{u=\sqrt{x}}{=}} \int \frac{e^u}{u}2udu = 2\int e^u du = 2e^u + c \overset{u=\sqrt{x}}{=} 2e^{\sqrt{x}} + c$$

Συνεπώς

$$I_2 = \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \left[2e^{\sqrt{x}}\right]_1^4 = \left[2e^{\sqrt{4}} - 2e^{\sqrt{1}}\right] = 2e^2 - 2e = 2e(e-1)$$

(γ) Ισχύει $\left(a^x\right)' = a^x \ln a \Leftrightarrow a^x = \left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right)'$

$$\int x^2 a^x dx = \int x^2 \left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' dx =$$

$$= x^2\left(\frac{a^x}{\ln a}\right) - \int \frac{a^x}{\ln a}\left(x^2\right)' dx = \frac{x^2}{\ln a}a^x - \frac{2}{\ln a}\int x a^x dx =$$

$$= \frac{x^2}{\ln a}a^x - \frac{2}{\ln a}\int x\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' dx =$$

$$= \frac{x^2}{\ln a}a^x - \frac{2}{\ln a}\left[x\left(\frac{a^x}{\ln a}\right) - \int \frac{a^x}{\ln a}(x)' dx\right] =$$

$$= \frac{x^2}{\ln a}a^x - \frac{2x}{\ln^2 a}a^x + \frac{2}{\ln^2 a}\int a^x dx = \frac{x^2}{\ln a}a^x - \frac{2x}{\ln^2 a}a^x + \frac{2}{\ln^2 a}\int\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' dx =$$

$$= \frac{x^2}{\ln a}a^x - \frac{2x}{\ln^2 a}a^x + \frac{2}{\ln^3 a}a^x = a^x\left(\frac{x^2}{\ln a} - \frac{2x}{\ln^2 a} + \frac{2}{\ln^3 a}\right) =$$

$$= a^x \frac{x^2\ln^2 a - 2x\ln a + 2}{\ln^3 a}$$

Συνεπώς

$$I_3 = \int_1^2 x^2 a^x dx = \left[a^x \frac{x^2\ln^2 a - 2x\ln a + 2}{\ln^3 a}\right]_1^2 =$$

$$= \left[a^2 \frac{2^2\ln^2 a - 2\times 2\times \ln a + 2}{\ln^3 a} - a^1 \frac{1^2\ln^2 a - 2\times 1\times \ln a + 2}{\ln^3 a}\right] =$$

$$= \frac{a}{\ln^3 a}\left[(4a-1)\ln^2 a - (4a-2)\ln a + 2a - 2\right]$$

Θέμα 2. (15 μονάδες)
Να υπολογισθούν τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx \qquad I_2 = \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} \qquad I_3 = \int_{-1}^{8} \frac{dx}{x^{1/3}}$$

Υπόδειξη: Τα παραπάνω γενικευμένα ολοκληρώματα μελετάει το Κεφ. 10 του βιβλίου (Κεφ. 10.1 και 10.2) (δες επίσης ΣΕΥ Ολοκληρώματα 1, σελ. 19). Στο (I_1) μπορείτε να χρησιμοποιήσετε παραγοντική ολοκλήρωση (κεφ.5, ΣΕΥ Ολοκληρώματα 2). Στο I_2 να γίνει ολοκλήρωση με αντικατάσταση (κεφ.3 από ΣΕΥ Ολοκληρώματα 2).

Λύση
(α) Το I_1 είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα α' είδους και έχουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^{A} e^{-x}\sin x dx$$

Υπολογίζουμε πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}\int e^{-x}\sin x dx &= \int(-e^{-x})'\sin x dx = -e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x dx = \\ &= -e^{-x}\sin x + \int(-e^{-x})'\cos x dx = \\ &= -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x dx \Rightarrow \\ 2\int e^{-x}\sin x dx &= -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x \Rightarrow \\ \int e^{-x}\sin x dx &= -\frac{1}{2}\left(e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x\right)\end{aligned}$$

Συνεπώς το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι

$$\begin{aligned}\int_0^{A} e^{-x}\sin x dx &= -\frac{1}{2}\left[e^{-x}\left(\sin x+\cos x\right)\right]_0^{A} = \\ &= -\frac{1}{2}\left(e^{-A}\left(\sin A+\cos A\right) - e^{0}\left(\sin 0+\cos 0\right)\right) = \\ &= -\frac{1}{2}e^{-A}\left(\sin A+\cos A\right)+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Τέλος

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A} e^{-x}\sin x dx = -\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty} e^{-A}\left(\sin A+\cos A\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

γιατί η συνάρτηση $e^{-A}\left(\sin A+\cos A\right)$ συγκλίνει στο μηδέν ως γινόμενο φραγμένης συνάρτησης ($\left|\sin A+\cos A\right|\le 2$) και συνάρτησης που συγκλίνει στο μηδέν ($\lim_{A\to+\infty} e^{-A}=0$).

(β) Το I_1 είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα β' είδους επειδή η τιμή x=4 αποτελεί ιδιόμορφο σημείο της συνάρτησης (μηδενίζει τον παρονομαστή). Συνεπώς :

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \lim_{A\to 4-}\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$$

Για να υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα θέτουμε $u=\sqrt{4-x}$. Συνεπώς $u^2 = 4-x \Rightarrow x = 4-u^2$ και $dx=-2udu$. Άρα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x}} \underset{dx=-2udu}{\overset{u=\sqrt{4-x}}{=}} \int \frac{-2\cancel{u}du}{\cancel{u}} = \int -2du = -2u+c \overset{u=\sqrt{4-x}}{=} -2\sqrt{4-x}+c$$

Συνεπώς

$$I_2 = \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \lim_{A\to 4-}\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \lim_{A\to 4-}\left[-2\sqrt{4-x}\right]_0^A =$$
$$= \lim_{A\to 4-}\left[-2\sqrt{4-A}+2\sqrt{4-0}\right] = -2\sqrt{4-4}+2\sqrt{4} = 4$$

(γ) Το $x=0$ είναι ένα ιδιόμορφο σημείο (μηδενίζεται ο παρονομαστής) που βρίσκεται μέσα στο διάστημα ολοκλήρωσης (-1,8). Συνεπώς το ολοκλήρωμα θα σπάσει σε άθροισμα δύο γενικευμένων ολοκληρωμάτων β' είδους :

$$I_3 = \int_{-1}^8 \frac{dx}{x^{1/3}} = \underbrace{\lim_{u\to 0-}\int_{-1}^u \frac{dx}{x^{1/3}}}_{I_{31}} + \underbrace{\lim_{u\to 0+}\int_u^8 \frac{dx}{x^{1/3}}}_{I_{32}}$$

Ισχύει

$$\int \frac{dx}{x^{1/3}} = \int x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+c = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+c$$

Υπολογίζουμε τα ορισμένα ολοκληρώματα

$$\int_{-1}^u \frac{dx}{x^{1/3}} = \frac{3}{2}\left[x^{\frac{2}{3}}\right]_{-1}^u = \frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}$$
$$\int_u^8 \frac{dx}{x^{1/3}} = \frac{3}{2}\left[x^{\frac{2}{3}}\right]_u^8 = \frac{3}{2}8^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}} = 6-\frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}}$$

κατόπιν τα αντίστοιχα όρια

$$I_{31} = \lim_{u\to 0-}\int_{-1}^u \frac{dx}{x^{1/3}} = \frac{3}{2}\lim_{u\to 0-}u^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$
$$I_{32} = \lim_{u\to 0+}\int_u^8 \frac{dx}{x^{1/3}} = 6-\frac{3}{2}\lim_{u\to 0+}u^{\frac{2}{3}} = 6$$

Τέλος, το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι

$$I_3 = I_{31}+I_{32} = -\frac{3}{2}+6 = \frac{9}{2}$$

Θέμα 3. (20 μονάδες)

Τέσσερεις κάρτες με τους αριθμούς 1,2,3 και 4 ανακατεύονται και τοποθετούνται στη σειρά. Θεωρούμε τα εξής ενδεχόμενα:

Α: η πρώτη κάρτα έχει αριθμό μεγαλύτερο από αυτόν της δεύτερης κάρτας.

Β: η τρίτη κάρτα έχει αριθμό μικρότερο από αυτόν της τέταρτης κάρτας.

Γ: ο αριθμός στην πρώτη κάρτα είναι το 3.

α) Να βρείτε το δειγματικό χώρο Ω και το πλήθος των στοιχείων του.

β) Να βρείτε τα ενδεχόμενα Α, Β, και Γ ως υποσύνολα του Ω και στη συνέχεια να υπολογίσετε τις πιθανότητές τους.

γ) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A \cup \Gamma), P(B \cap \Gamma), P(A|\Gamma), P(\Gamma|A \cap B)$.

δ) Είναι τα ενδεχόμενα Α και Β ανεξάρτητα; Με βάση τους παραπάνω ορισμούς ενδεχομένων, μπορείτε να αιτιολογήσετε γιατί είναι αναμενόμενο να ισχύει ότι $P(A|\Gamma) > P(A)$;

Υπόδειξη. Η έννοια του δειγματικού χώρου ορίζεται στο Κεφ. 2.2 του βιβλίου, ενώ βασικές προτάσεις και η αξιωματική θεμελίωση της πιθανότητας αναφέρονται στο Κεφ. 2.3 του βιβλίου (δες επίσης ΣΕΥ, Κεφ. 1.1 από Πιθανότητες Ι). Θα χρειαστεί επίσης να μελετήσετε το Κεφ. 2.5 του βιβλίου που αναφέρεται στην δεσμευμένη πιθανότητα (δες επίσης ΣΕΥ, Κεφ. 1.2 και Κεφ. 1.3 από Πιθανότητες Ι).

Λύση. **α)** Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από όλες τις αναδιατάξεις (μεταθέσεις) του συνόλου {1,2,3,4} και άρα έχει 4!=24 στοιχεία, συγκεκριμένα τα εξής:
Ω={(1,2,3,4), (1,2,4,3), (1,3,2,4), (1,3,4,2), (1,4,3,2), (1,4,2,3), (2,1,3,4), (2,1,4,3), (2,3,1,4), (2,3,4,1), (2,4,3,1), (2,4,1,3), (3,2,1,4), (3,2,4,1), (3,1,2,4), (3,1,4,2), (3,4,1,2), (3,4,2,1), (4,2,3,1), (4,2,1,3), (4,3,2,1), (4,3,1,2), (4,1,3,2), (4,1,2,3)}.

β) Για να βρούμε το Α, από το παραπάνω σύνολο κρατάμε μόνο αυτά τα στοιχεία των οποίων η πρώτη συντεταγμένη είναι μεγαλύτερη της δεύτερης και έχουμε άρα:
Α={(2,1,3,4), (2,1,4,3), (3,2,1,4), (3,2,4,1), (3,1,2,4), (3,1,4,2), (4,2,3,1), (4,2,1,3), (4,3,2,1), (4,3,1,2), (4,1,3,2), (4,1,2,3)}.

Αφού το Α έχει 12 στοιχεία συμπεραίνουμε ότι $P(A) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.

Ομοίως έχουμε:
Β={(1,2,3,4), (1,3,2,4), (1,4,2,3), (2,1,3,4), (2,3,1,4), (2,4,1,3), (3,2,1,4), (3,1,2,4), (3,4,1,2), (4,2,1,3), (4,3,1,2), (4,1,2,3)} και $P(B) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.

Επίσης για το Γ κρατάμε μόνο αυτά τα στοιχεία του Ω των οποίων η πρώτη συντεταγμένη είναι 3 άρα

Γ={(3,2,1,4), (3,2,4,1), (3,1,2,4), (3,1,4,2), (3,4,1,2), (3,4,2,1)} και $P(\Gamma) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

γ) Αφού το $A \cap \Gamma = \{(3,2,1,4),(3,2,4,1),(3,1,2,4),(3,1,4,2)\}$ έχουμε

$P(A \cap \Gamma) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$ και άρα $P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$

(μπορούμε να βρούμε απευθείας την ένωση των Α και Γ αλλά η τομή είναι πιο εύκολη).

Επίσης $B \cap \Gamma = \{(3,2,1,4),(3,1,2,4),(3,4,1,2)\}$ άρα $P(B \cap \Gamma) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ και

$P(A|\Gamma) = \frac{P(A \cap \Gamma)}{P(\Gamma)} = \frac{1/6}{1/4} = \frac{2}{3}$.

Τώρα το $A \cap B = \{(2,1,3,4),(3,2,1,4),(3,1,2,4),(4,2,1,3),(4,3,1,2),(4,1,2,3)\}$ και

$A \cap B \cap \Gamma = \{(3,2,1,4),(3,1,2,4)\}$ άρα $P(\Gamma|A \cap B) = \frac{P(A \cap B \cap \Gamma)}{P(A \cap B)} = \frac{2/24}{6/24} = \frac{1}{3}$.

δ) Έχουμε $P(A \cap B) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = P(A).P(B)$ άρα τα ενδεχόμενα αυτά είναι ανεξάρτητα.

Η ανισότητα $P(A|\Gamma) > P(A)$ είναι αναμενόμενη καθώς η πληροφορία ότι η πρώτη κάρτα είναι 3 αυξάνει την πιθανότητα η δεύτερη κάρτα να είναι μικρότερη της πρώτης αφού η μόνη πλέον δυνατότητα να μην ισχύει αυτό είναι η δεύτερη κάρτα να είναι 4.

Θέμα 4. (15 μονάδες)

Μια κληρωτίδα περιέχει 45 μπάλες. 15 απ' αυτές είναι κόκκινες, 12 είναι μπλε και οι υπόλοιπες 18 είναι άσπρες. Επιλέγουμε στη τύχη μια μπάλα. Αν είναι κόκκινη τότε την βάζουμε πίσω στην κληρωτίδα μαζί με 15 επιπλέον μπλε μπάλες, αν είναι μπλε την βάζουμε στην κληρωτίδα μαζί με 15 επιπλέον άσπρες μπάλες ενώ αν είναι άσπρη τη βάζουμε στη κληρωτίδα μαζί με επιπλέον 8 κόκκινες και 7 μπλε μπάλες. Στη συνέχεια επιλέγουμε στη τύχη μια μπάλα από την κληρωτίδα.

α) Να βρείτε την πιθανότητα η δεύτερη μπάλα που επιλέχθηκε να είναι άσπρη.

β) Να βρείτε την πιθανότητα η πρώτη μπάλα να είναι άσπρη και η δεύτερη μπάλα να είναι μπλε.

γ) Αν ξέρουμε ότι η δεύτερη μπάλα που επιλέχθηκε ήταν άσπρη να βρείτε τη πιθανότητα η πρώτη μπάλα να ήταν κόκκινη.

Υπόδειξη. Να ορίσετε τα γεγονότα Π_α={η πρώτη μπάλα είναι άσπρη}, Π_μ={η πρώτη μπάλα είναι μπλε}, Π_κ={η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη} καθώς και τα ενδεχόμενα Δ_α={η δεύτερη μπάλα είναι άσπρη}, Δ_μ={η δεύτερη μπάλα είναι μπλε}, Δ_κ={η δεύτερη μπάλα είναι κόκκινη}. Θα σας βοηθήσει ιδιαίτερα το κεφάλαιο 2.5 του βιβλίου (Δεσμευμένη Πιθανότητα) καθώς και το κεφάλαιο 1.3 από το ΣΕΥ Πιθανότητες Ι που αναφέρεται στο ίδιο αντικείμενο.

Λύση. Η πρώτη μπάλα μπορεί να είναι είτε κόκκινη είτε μπλε είτε άσπρη και έτσι αν Π_κ είναι το ενδεχόμενο η πρώτη μπάλα να είναι κόκκινη, Π_μ είναι το ενδεχόμενο η πρώτη μπάλα να είναι μπλε και Π_α είναι το ενδεχόμενο η πρώτη μπάλα να είναι άσπρη, τότε τα Π_κ, Π_μ και Π_α είναι ανά δύο ασυμβίβαστα και η ένωση τους είναι όλος ο δειγματικός χώρος. Επίσης εύκολα προκύπτει ότι

$$P(\Pi_\kappa)=\frac{15}{45}, P(\Pi_\mu)=\frac{12}{45}, P(\Pi_\alpha)=\frac{18}{45}$$

Έστω τώρα Δ_κ το ενδεχόμενο η δεύτερη μπάλα να είναι κόκκινη, Δ_μ το ενδεχόμενο η δεύτερη μπάλα να είναι μπλε και Δ_α το ενδεχόμενο η δεύτερη μπάλα να είναι άσπρη. Από τις πληροφορίες που μας δίνονται μπορούμε να υπολογίσουμε τις δεσμευμένες πιθανότητες των Δ_κ, Δ_μ και Δ_α δοθέντος οποιουδήποτε από τα Π_κ, Π_μ και Π_α. Έτσι αν η πρώτη μπάλα βγει κόκκινη τότε πριν από την επιλογή της δεύτερης μπάλας στην κληρωτίδα θα υπάρχουν 45+15=60 μπάλες εκ των οποίων οι 15 είναι κόκκινες (η κόκκινη που βγήκε επεστράφη), οι 12+15=27 είναι μπλε (οι 12 που υπήρχαν συν τις επιπλέον 15) και οι υπόλοιπες 18 είναι άσπρες.

Συνεπώς: $$P\left(\Delta_\kappa \middle| \Pi_\kappa\right)=\frac{15}{60}, P\left(\Delta_\mu \middle| \Pi_\kappa\right)=\frac{27}{60}, P\left(\Delta_\alpha \middle| \Pi_\kappa\right)=\frac{18}{60}.$$

Ομοίως: $$P\left(\Delta_\kappa \middle| \Pi_\mu\right)=\frac{15}{60}, P\left(\Delta_\mu \middle| \Pi_\mu\right)=\frac{12}{60}, P\left(\Delta_\alpha \middle| \Pi_\mu\right)=\frac{33}{60}$$

και $$P\left(\Delta_\kappa \middle| \Pi_\alpha\right)=\frac{23}{60}, P\left(\Delta_\mu \middle| \Pi_\alpha\right)=\frac{19}{60}, P\left(\Delta_\alpha \middle| \Pi_\alpha\right)=\frac{18}{60}.$$

Έχουμε τώρα:

α) Από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:

$$P(\Delta_\alpha) = P(\Delta_\alpha|\Pi_\kappa)P(\Pi_\kappa) + P(\Delta_\alpha|\Pi_\mu)P(\Pi_\mu) + P(\Delta_\alpha|\Pi_\alpha)P(\Pi_\alpha) =$$
$$= \frac{18}{60}.\frac{15}{45} + \frac{33}{60}.\frac{12}{45} + \frac{18}{60}.\frac{18}{45} = \frac{11}{30} = 0,3666...$$

β) Εδώ ζητείται το $P(\Delta_\mu \cap \Pi_\alpha)$. Έχουμε

$$P(\Delta_\mu \cap \Pi_\alpha) = P(\Delta_\mu / \Pi_\alpha)P(\Pi_\alpha) = \frac{19}{60}.\frac{18}{45} = \frac{19}{150} = 0,1266....$$

γ) Εδώ ζητείται το $P(\Pi_\kappa|\Delta_\alpha)$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Bayes και το (α) παίρνουμε

$$P(\Pi_\kappa|\Delta_\alpha) = \frac{P(\Delta_\alpha|\Pi_\kappa)P(\Pi_\kappa)}{P(\Delta_\alpha)} = \frac{(18/60).(15/45)}{11/30} = \frac{3}{11} = 0,2727....$$

Θέμα 5. (20 μονάδες)

Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x)=\begin{cases} a-|x| & |x|\le a \\ 0 & |x|>a \end{cases}$$

1) Να προσδιοριστεί η θετική σταθερά a για την οποία η $f(x)$ είναι πράγματι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

2) Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(X>0)$ και $P\left(X>0 \middle| |X|<\frac{1}{2}\right)$.

3) Να εξετάσετε αν τα γεγονότα: $A=\{X>0\}$ και $B=\left\{|X|<\frac{1}{2}\right\}$ είναι ανεξάρτητα.

4) Να υπολογιστεί η μέση τιμή $E(X)$ και η διασπορά $Var(X)$.

Υπόδειξη. Θα χρειαστεί να μελετήσετε την έννοια της συνάρτησης πιθανότητας και πυκνότητας πιθανότητας (Κεφ. 3.1 του βιβλίου) και πιο συγκεκριμένα τον ορισμό στη σελ. 59. Η ανεξαρτησία ενδεχομένων έχει οριστεί στο Κεφ.2.5 του βιβλίου. Επίσης θα χρειαστείτε τον ορισμό της μέσης τιμής και της διασποράς (σελ. 78, 82). Μπορείτε επίσης να μελετήσετε από το Σ.Ε.Υ. , Πιθανότητες 2- Λυμένες ασκήσεις.

Λύση

1) Πρέπει $f(x)\ge 0$ (που ισχύει) και $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$. Έχουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-a}^{0}(a+x)dx+\int_{0}^{a}(a-x)dx=1 \Leftrightarrow \left[ax+\frac{x^2}{2}\right]_{-a}^{0}+\left[ax-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{a}=1 \Leftrightarrow a^2=1 \overset{a>0}{\Rightarrow} a=1.$$

2)

$$P(X>0)=\int_0^1(1-x)dx=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

και

$$P(-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2})=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(1+x)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}(1-x)dx=\left[x+\frac{x^2}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}+\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$$

Έχουμε ότι

$$P\left(X>0 \middle| |X|<\frac{1}{2}\right)=\frac{P\left(\{X>0\}\cap\left\{|X|<\frac{1}{2}\right\}\right)}{P\left(-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\right)}=\frac{P\left(0<X<\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{4}}=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x)dx}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$$

3) Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι τα Α και Β είναι ανεξάρτητα, αφού

$P(A|B)=P(A)=\frac{1}{2}$ ή $P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{3}{8}$

4) Για τη μέση τιμή και τη διασπορά:

$$E\left(X\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{-1}^{0} x\left(1+x\right)dx+\int_{0}^{1} x\left(1-x\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}=0$$

και

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_{-1}^{0} x^2\left(1+x\right)dx+\int_{0}^{1} x^2\left(1-x\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}=\frac{1}{6}$$

Για τη διασπορά ισχύει $Var\left(X\right)=E\left(X^2\right)-\left(E\left(X\right)\right)^2=\frac{1}{6}$.

Θέμα 6. (15 μονάδες)

Η ποσότητα καφέ που περιέχεται σε πακέτα 500 gr., είναι τυχαία μεταβλητή Χ που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 500 gr και διασπορά 25 .

1) Ποια η πιθανότητα ένα πακέτο να περιέχει τουλάχιστον 490 gr καφέ;
2) Ποια η πιθανότητα ένα πακέτο να περιέχει ποσότητα καφέ μεταξύ 490gr και 505 gr
3) Αγοράζουμε τρία πακέτα. Ποια η πιθανότητα τα δύο από τα τρία πακέτα να περιέχουν το πολύ 490 gr και το άλλο να περιέχει τουλάχιστο 490 gr καφέ;

Υπόδειξη. Δείτε τα Κεφ. 4.1 και 4.5 από το βιβλίο και τις ασκήσεις στο ΣΕΥ Πιθανότητες 2, σελ.36-38, καθώς και τον Πίνακα ΙΙ.1 για την τυπική κανονική κατανομή στο Παράρτημα του βιβλίου.

Λύση

1) Γνωρίζουμε ότι: $X \sim N(500,5^2) \Rightarrow Z = \frac{X-500}{5} \sim N(0,1)$. Επομένως

$$P(X \geq 490) = P\left(\frac{X-500}{5} \geq \frac{490-500}{5}\right) = P(Z \geq -2) = P(Z \leq 2) = \Phi(2) = 0,9772$$

2)

$$P(490 \leq X \leq 505) = P\left(\frac{490-500}{5} \leq \frac{X-500}{5} \leq \frac{505-500}{5}\right) =$$
$$= P(-2 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -2)$$
$$= \Phi(1) - [1-\Phi(2)] = \Phi(1) + \Phi(2) - 1$$
$$= 0.8413 + 0.9772 - 1 = 0.8185$$

3) Αν θεωρήσουμε σαν «επιτυχία» το να περιέχει ένα μπουκάλι τουλάχιστον 490 gr καφέ και W είναι ο αριθμός των επιτυχιών στις ν επαναλήψεις του πειράματος « μέτρηση περιεχομένου καφέ» τότε το W είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους ν=3 και p = 0,9772.

Άρα $P(W=1) = \binom{3}{1}(0,9772)(0,0228)^2 = 0,001524$.