Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης Γ.Ε.

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας» και αποστέλλει το έντυπο σε δύο μη συρραμμένα αντίγραφα (ή ηλεκτρονικά) στον Καθηγητή-Σύμβουλο. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος συμπληρώνει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας» και στα δύο αντίγραφα και επιστρέφει το ένα στο φοιτητή μαζί με τα σχόλια επί της Γ.Ε., ενώ κρατά το άλλο για το αρχείο του μαζί με το γραπτό σημείωμα του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

*Σε περίπτωση ηλεκτρονικής υποβολής του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου θα πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: Π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 6η Γ.Ε. του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στην ΠΛΗ12 πρέπει να γραφεί: «**ioannou_ge6_plh12.doc**».*

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ονοματεπώνυμο φοιτητή	

Κωδικός ΘΕ	ΠΛΗ 12	Ονοματεπώνυμο Καθηγητή - Σύμβουλου	
Κωδικός Τμήματος		Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής σύμφωνα με το ακ. ημερολόγιο (*ημέρα Τρίτη*)	01/06/2010
Ακ. Έτος	2009-2010	Ημερομηνία αποστολής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
α/α ΓΕ	6	Επισυνάπτεται (*σε περίπτωση που έχει ζητηθεί*) η άδεια παράτασης από τον Συντονιστή;	ΝΑΙ/ΟΧΙ

***<u>Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή</u>**: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα..*

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στον φοιτητή	
Βαθμολογία *(αριθμητικώς, ολογράφως)*	

Υπογραφή	**Υπογραφή**
Φοιτητή	**Καθηγητή-Συμβούλου**

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 6η

Ημερομηνία Αποστολής στους Φοιτητές: 26 Απριλίου 2010
Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 28 Μαΐου 2010

Προ της επίλυσης κάθε άσκησης, καλό είναι να μελετώνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις των υποδείξεων και παραπομπών στα συγγράμματα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της έκτης εργασίας αναφέρονται στις

Ενότητα 11 (Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων**)**
Ενότητα 12: 12.1 – 12.4 (Σειρές Fourier)

του συγγράμματος του Ε.Α.Π. «**Λογισμός Μίας Μεταβλητής**» του Γεωρ. Δάσιου

Για την κατανόηση της ύλης αυτής συμβουλευθείτε επίσης το βοηθητικό υλικό το οποίο υπάρχει στη http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm ως εξής:

Συνοδευτικό **Ε**κπαιδευτικό **Υ**λικό:

Λογισμός Ολοκληρώματα 1, Σειρές Fourier

Επί πλέον η εργασία αυτή βασίζεται σε μια επανάληψη των βασικών εννοιών του μαθήματος τις οποίες πρέπει να γνωρίζετε ώστε να προετοιμασθείτε για τις Γραπτές Εξετάσεις. Η τέταρτη άσκηση αναφέρεται στις εφαρμογές των ολοκληρωμάτων και στις σειρές Fourier. Με το κεφάλαιο αυτό καλύπτεται η ύλη της ΠΛΗ 12. Οι υπόλοιπες ασκήσεις είναι επαναληπτικές στην ύλη της Γραμμικής Άλγεβρας, του Λογισμού μίας μεταβλητής και των Πιθανοτήτων.

Άσκηση 1 (20 μον.)
α) Να προσδιορισθεί ο πραγματικός αριθμός μ ώστε το σύστημα

$$2x - y - 4 = 0$$
$$-3x + 2y + \mu = 0$$
$$2x - 6y - 2\mu = 0$$

να έχει τουλάχιστον μία λύση, δηλαδή να είναι συμβιβαστό, και στη συνέχεια να βρεθούν οι λύσεις αυτές.

Μονάδες 10

β) Δίνονται τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0, y - z = 0\} \text{ και } B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι τα A, B είναι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ και να βρείτε μία βάση σε κάθε έναν από αυτούς. Μονάδες 5

(ii) Να αποδείξετε ότι $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$. Μονάδες 5

Λύση
α) Εφαρμόζοντας την απαλοιφή Gauss στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος έχουμε

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -\mu \\ 2 & -6 & 2\mu \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 3/2\Gamma_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1/2 & 6-\mu \\ 0 & -5 & -4+2\mu \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 10\Gamma_2]{\Gamma_1 \to \Gamma_1/2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & 2 \\ 0 & 1/2 & 6-\mu \\ 0 & 0 & 56-8\mu \end{array}\right).$$

Από την τελευταία γραμμή του δεξιού πίνακα παρατηρούμε ότι το σύστημα είναι συμβιβαστό εάν $56 - 8\mu = 7$, δηλ. εάν $\mu = 7$. Ο πίνακας του συστήματος μας τότε γίνεται

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & 2 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Από όπου με προς τα πίσω αντικατάσταση παίρνουμε εύκολα τη λύση $x = 1$ και $y = -2$.

β) (i) Παρατηρούμε ότι $(0, 0, 0) \in A$, $(0, 0, 0) \in B$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0, y - z = 0\} = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3\} = \{(1, 1, 1)\, x \in \mathbb{R}^3\}$ και $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} = \{(x, y, -x - y) \in \mathbb{R}^3\} = \{(x, 0, -x) + (0, y, -y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{(1, 0, -1)\, x + (0, 1, -1)\, y : x, y \in \mathbb{R}\}$. Επομένως, $A = \langle(1, 1, 1)\rangle$, δηλ. το σύνολο A είναι ο παραγώμενος από το $(1, 1, 1)$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ (ως span στοιχείων του $\mathbb{R}^3$) και $B = \langle(1, 0, -1), (0, 1, -1)\rangle$, δηλ. το σύνολο B είναι ο παραγώμενος από τα $(1, 0, -1)$ και $(0, 1, -1)$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, επίσης ως span στοιχείων του $\mathbb{R}^3$.

Το διάνυσμα $(1, 1, 1)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Τα διανύσματα $(1, 0, -1)$ και $(0, 1, -1)$ είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητα, διότι εάν θεωρήσουμε έναν γραμμικό τους συνδυασμό $\lambda(1, 0, -1) + \mu(0, 1, -1) = (0, 0, 0)$, τότε $\lambda = \mu = 0$. Επομένως, το διάνυσμα $(1, 1, 1)$ αποτελεί βάση του A, ενώ τα διανύσματα $\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ αποτελούν βάση του B.

(ii) Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $\dim(A) = 1$ και $\dim(B) = 2$. Επίσης, $A \cap B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z \text{ και } x + y + z = 0\} = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3 : x + x + x = 0\} = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\} = \{(0, 0, 0)\}$, δηλ. $\dim(A \cap B) = \mathbf{0}$. Άρα, $\dim(A + B) = \dim(A) + \dim(B) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ και ως υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ διάστασης 3 ισχύει $A + B = \mathbb{R}^3$. Επομένως, $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$.

Άσκηση 2 (20 μον.)

α) Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ έτσι, ώστε

$$T(1, 1, 1) = T(1, 1, -1) = (0, 0, 0) \text{ και } T(-1, 0, 1) = (2, 0, -2).$$

(i) Προσδιορίστε τον τύπο του γραμμικού μετασχηματισμού T. Μονάδες 4

(ii) Να βρεθεί μία βάση της εικόνας και μία βάση του πυρήνα του T. Μονάδες 6

β) Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός

$$f(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z).$$

Να βρεθούν ο πίνακάς του ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματά του. Είναι ο πίνακας αυτός διαγωνιοποιήσιμος; Μονάδες 10

Λύση

α) (i) Έστω τυχόν διάνυσμα $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Ο γραμμικός συνδυασμός του ως προς τα (1, 1, 1), (1, 1, –1) και (–1, 0, 1) είναι

$(x, y, z) = \kappa(1, 1, 1) + \lambda(1, 1, -1) + \mu(-1, 0, 1) \Leftrightarrow \kappa = (z + x)/2, \lambda = (2y - z - x)/2, \mu = y - x$.

Δηλαδή ισχύει:

$(x, y, z) = (z + x)/2\ \ (1, 1, 1) + (2y - z - x)/2\ \ (1, 1, -1) + (y - x)\ \ (-1, 0, 1)$

Επειδή ο μετασχηματισμός είναι γραμμικός, έχουμε

$T(x, y, z) = T((z + x)/2\ \ (1, 1, 1) + (2y - z - x)/2\ \ (1, 1, -1) + (y - x)\ \ (-1, 0, 1)) =$

$=(z + x)/2\ \ T(1, 1, 1) + (2y - z - x)/2\ \ T(1, 1, -1) + (y - x)\ \ T(-1, 0, 1)=$

$=(z + x)/2\ \ (0, 0, 0) + (2y - z - x)/2\ \ (0, 0, 0) + (y - x)\ \ (2, 0, -2) =$

$= (y - x)\ (2, 0, -2) = (2\ (y - x), 0, -2\ (y - x)) = (-2, 0, 2)x + (2, 0, -2)y.$

(ii) Επειδή T(1, 0, 0) = (–2, 0, 2), T(0, 1, 0) = (2, 0, –2) και T(0, 0, 1) = (0, 0, 0), ο πίνακάς του ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι ο

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Έπειτα από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών βρίσκουμε ότι η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα των συντελεστών του συστήματος είναι

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma3 \to \Gamma3+\Gamma1} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma1 \to \Gamma1/2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι rank(**A**) = 1 = rank(T). Επομένως, $(x, y, z) \in \text{Ker(T)} \Leftrightarrow x = y$, δηλ.

$$\text{Ker(T)} = \{(x, x, z) : x, z \in \mathbb{R})\} = \{(1, 1, 0)\ x + (0, 0, 1)\ z : x, z \in \mathbb{R})\}$$

με βάση το {(1, 1, 0), (0, 0, 1)} (αφού τον παράγουν και είναι φανερά γραμμικά ανεξάρτητα). Άρα dim(Ker(T)) = 2.

Η εικόνα Im(T) παράγεται από το διάνυσμα το οποίο αντιστοιχεί στην πρώτη στήλη του πίνακα του T και είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Επομένως, αποτελεί και βάση της, άρα

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{span}\langle(-2, 0, 2)\rangle$$

και dim(Im(T)) = 1.

β) Επειδή $f(1, 0, 0) = (2, 0, 0)$, $f(0, 1, 0) = (1, 1, 2)$ και $f(0, 0, 1) = (0, -1, 4)$, ο πίνακάς του ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι ο

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχουμε

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda)+2] = (2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6)$$
$$= (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

με ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = 2$ (διπλής αλγεβρικής πολλαπλότητος) και $\lambda_3 = 3$ (μονής αλγεβρικής πολλαπλότητος).

Για την (διπλή) ιδιοτιμή 2 τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ από όπου συνάγουμε $y = z = 0$. Άρα τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι τα $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}x,\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ με γεωμετρική πολλαπλότητα του ιδιοχώρου της ιδιοτιμής 1. Για την ιδιοτιμή 3 τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος $(\mathbf{A}-3\mathbf{I})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ από όπου συνάγουμε $x = y$ και $z = -2y$. Άρα τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι τα $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}y,\ y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ο πίνακας **A** δεν διαγωνιοποιείται, διότι στην διπλή ιδιοτιμή $\lambda_{1,2} = 2$ αντιστοιχεί μόνον ένα ιδιοδιάνυσμα.

Άσκηση 3 (20 μον.)

α) Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία (a_n) με

$$a_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{(n+1)^2},$$

όπου $n \in \mathbb{N}$. Μονάδες 5

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι η η εξέταση του ορίου της ακολουθίας ανάγεται στην εξέταση της σύγκλισης μίας σειράς. Εξετάστε τη σύγκλιση της σειράς με τη χρήση του γενικευμένου κριτηρίου σύγκρισης σειρών (δείτε ΣΕΥ Λογισμός Σειρές παράγραφος 3.2.2).

β) Να βρεθεί η παράμετρος $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x - 3\lambda x^2}{x^2}, & \text{αν} \quad x < 0 \\ 2x^2 - 6\lambda + 7, & \text{αν} \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

Μονάδες 5

γ) Δίδεται η ακολουθία

$$I_n = \int_1^e x(\ln x)^n \, dx, \qquad n \in \mathbb{N}$$

(i) Να υπολογίσετε τα I_0 και I_1. Μονάδες 5

(ii) Να δείξετε την ισότητα $2I_n + nI_{n-1} = e^2$ για $n \geq 1$, και στη συνέχεια να υπολογίσετε το I_2.
Μονάδες 5

Λύση

α) Η ακολουθία (a_n) δύναται να γραφεί ως

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)^2}.$$

όπου $n \in \mathbb{N}$. Άρα

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)^2},$$

δηλ. η εξέταση του ορίου της ακολουθίας ανάγεται στην εξέταση της σύγκλισης μίας σειράς. Εάν συγκριθεί μέσω του γενικευμένου κριτηρίου σύγκρισης σειρών με την

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

έχουμε

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\dfrac{k}{(k+1)^2}}{\dfrac{1}{k}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k^2}{(k+1)^2} \right| = 1 > 0$$

το οποίο σημαίνει ότι οι υπό εξέταση σειρές συμπεριφέρονται αναλόγως ως προς την σύγκλιση. Αφού η αρμονική σειρά δεν συγκλίνει, το ίδιο ισχύει και για την αρχική μας σειρά.

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής για $x < 0$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και συνεχής για $x > 0$ ως πολυωνυμική. Για να είναι η συνάρτηση συνεχής στο 0 πρέπει

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0).$$

Βρίσκουμε τα πλευρικά όρια στο 0 και έχουμε

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2 x - 3\lambda x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0^-}\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 - 3\lambda\right] = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 - 3\lambda = 1^2 - 3\lambda = 1 - 3\lambda,$$ επειδή $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$, και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(2x^2 - 6\lambda + 7\right) = -6\lambda + 7.$

Επίσης έχουμε $f(0) = -6\lambda + 7$. Επομένως η συνάρτηση είναι συνεχής στο 0 τότε και μόνον, εάν

$$1 - 3\lambda = -6\lambda + 7 \Leftrightarrow 3\lambda = 6 \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

γ) (i) Για το I_0 έχουμε:

$$I_0 = \int_1^e x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \boxed{\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}}.$$

Για το I_1 έχουμε:

$$I_1 = \int_1^e x \ln x\,dx = \frac{1}{2}\int_1^e \left(x^2\right)' \ln x\,dx = \frac{1}{2}\left[x^2 \ln x\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x^2 \frac{1}{x}\,dx =$$
$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}\left(e^2 - 1\right) = \boxed{\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}}.$$

(ii)

$$2I_n = \int_1^e \left(x^2\right)'\left(\ln x\right)^n dx = \left[x^2\left(\ln x\right)^n\right]_1^e - \int_1^e x^2\left[\left(\ln x\right)^n\right]' dx =$$
$$= e^2 - \int_1^e x^2 n\left(\ln x\right)^{n-1}\frac{1}{x}\,dx = e^2 - n\int_1^e x\left(\ln x\right)^{n-1} dx = e^2 - nI_{n-1} \Leftrightarrow \boxed{2I_n + nI_{n-1} = e^2}.$$

Σύμφωνα με την ισότητα την οποία αποδείξαμε προηγουμένως έχουμε:

$$2I_2 = e^2 - 2I_1 \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{2}e^2 - I_1 = \frac{1}{2}e^2 - \left(\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}}.$$

Άσκηση 4 (20 μον.)

α) Έστω ο κλάδος της υπερβολής $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ για τον οποίο $y > 0$. Εάν περιστρέψουμε τον κλάδο περί τον άξονα των y δημιουργούμε ένα κωνικό κέλυφος που μοιάζει με ποτήρι. Πόσος όγκος νερού χρειάζεται για να γεμίσουμε το ποτήρι μέχρι το ύψος $y = A$; Εννοείται πως $A > a$.

Υπόδειξη: Μελετήστε την παράγραφο 11.2 του βιβλίου και χρησιμοποιήστε τη σχέση (11.3).

Μονάδες 5

β) Έστω η περιοδική συνάρτηση παλμού $f = f\left(x\right)$ όπου

$$f(x)=\begin{cases}0, & -3\le x<-1\\ 1, & -1\le x<1\\ 0, & 1\le x<3\end{cases}$$

αν $-3\le x <3$ και $f(x+6)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$. Παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση και εξετάστε εάν είναι άρτια ή περιττή. Υπολογίστε τους συντελεστές Fourier που αντιστοιχούν σε αυτή και γράψτε την αντίστοιχη σειρά Fourier.

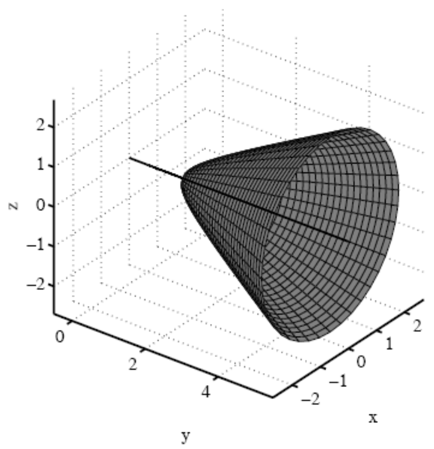
Μονάδες 15

Λύση

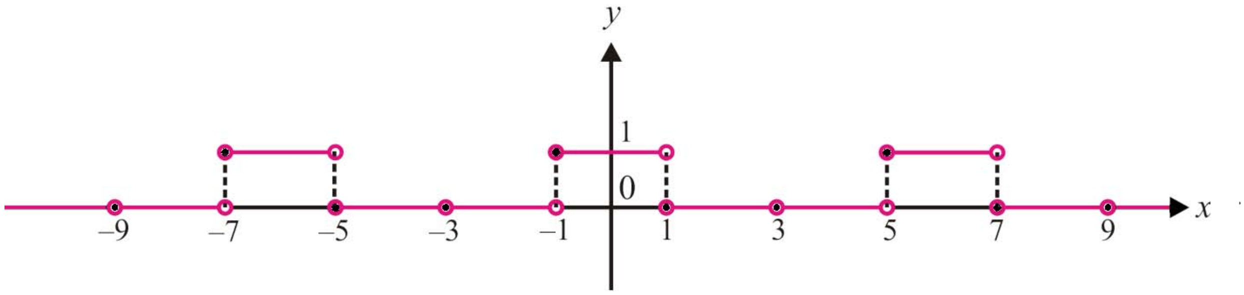
α) Σε ύψος $y > a$, η ακτίνα του ποτηριού είναι $x=b\sqrt{\dfrac{y^2}{a^2}-1}$, άρα ο όγκος του ύδατος μέχρι τη θέση A είναι:

$$\int_a^A \pi x^2 dy=\int_a^A \pi b^2\left(\frac{y^2}{a^2}-1\right)dy=\pi b^2\int_a^A\left(\frac{y^3}{3a^2}-y\right)' dy=\pi b^2\left[\left(\frac{y^3}{3a^2}-y\right)\right]_a^A=\pi b^2\left[\frac{A^3}{3a^2}-A-\frac{a^3}{3a^2}+a\right]$$

$$=\pi b^2\left[\frac{A^3}{3a^2}-A+\frac{2a}{3}\right].$$



β) Η συνάρτηση είναι φανερά άρτια (συμμετρική ως προς τον άξονα yy’) και η γραφική παράσταση της δίδεται στο ακόλουθο σχήμα.



Η περίοδος είναι T=2L = 6 ⇔ L = 3. Με διάστημα ολοκληρώσεως το –3 έως 3, έχουμε

$$a_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx = \frac{1}{3}\left(\int_{-3}^{1} 0dx + \int_{-1}^{1} 1\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx + \int_{1}^{3} 0dx\right) = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{3}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{n\pi}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{n\pi}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right] = \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

για $n \neq 0$. Για $n = 0$, $a_0 = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)dx = \frac{1}{3}\left(\int_{-3}^{1} 0dx + \int_{-1}^{1} 1dx + \int_{1}^{3} 0dx\right) = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} dx = \frac{1}{3}[x]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}(1+1) = \frac{2}{3}$.
Επίσης, ισχύει ότι $b_n = 0$ διότι η συνάρτηση είναι άρτια.

Η αντίστοιχη σειρά Fourier είναι

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right).$$

Άσκηση 5 (20 μον.)

α) Η είσοδος ενός δυαδικού συστήματος επικοινωνίας η οποία δηλώνεται με την τυχαία μεταβλητή X, λαμβάνει μία από τις τιμές 0 ή 1 με πιθανότητες ¾ και ¼, αντίστοιχα. Λόγω των σφαλμάτων που προκαλούνται από τον θόρυβο του συστήματος, η έξοδος Y διαφέρει μερικές φορές από την είσοδο X. Ένα υπόδειγμα του τρόπου συμπεριφοράς του συστήματος αυτού επικοινωνίας μπορεί να δοθεί με τις δεσμευμένες πιθανότητες

$$P(Y = 1 \mid X = 1) = 3/4 \text{ και } P(Y = 0 \mid X = 0) = 7/8.$$

(i) Να βρείτε την $P(Y = 1)$ και την $P(Y = 0)$. Μονάδες 5

(ii) Να βρείτε την $P(X = 1 \mid Y = 1)$. Μονάδες 5

β) Το μήκος ράβδων από σίδηρο που κατασκευάζονται σε ένα εργοστάσιο ακολουθεί ικανοποιητικά την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 3m$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 0.2m$. Ως ελαττωματικές ράβδοι θεωρούνται εκείνες οι οποίες έχουν μήκος μικρότερο από $2.8m$ ή μεγαλύτερο από $3.2m$. Να βρεθεί η πιθανότητα ώστε να ληφθεί από την παραγωγή ελαττωματική ράβδος. Μονάδες 5

γ) Σε δείγμα 5 ράβδων του ερωτήματος (β), υπολογίστε την πιθανότητα τουλάχιστον 2 να είναι ελαττωματικές.

Μονάδες 5

Παρατήρηση: Τα αποτελέσματα των πράξεων στη συγκεκριμένη άσκηση να γίνουν με 4 δεκαδικά ψηφία ακρίβειας τουλάχιστον.

Λύση

α) Από την εκφώνηση έχουμε $P(X = 0) = 3/4$ και $P(X = 1) = 1/4$.

(i) Χρησιμοποιώντας το Θ.Ο.Π. έχουμε

$$P(Y = 1) = P(X = 1)\, P(Y = 1 \mid X = 1) + P(X = 0)\, P(Y = 1 \mid X = 0) \text{ και}$$
$$P(Y = 0) = P(X = 1)\, P(Y = 0 \mid X = 1) + P(X = 0)\, P(Y = 0 \mid X = 0).$$

Παρατηρούμε, όμως, ότι

$$P(Y = 0 \mid X = 0) + P(Y = 1 \mid X = 0) = 1 \text{ και}$$
$$P(Y = 0 \mid X = 1) + P(Y = 1 \mid X = 1) = 1,$$

δηλ. $P(Y = 1 \mid X = 0) = 1/8=0.125$ και $P(Y = 0 \mid X = 1) = 1/4=0.25$.

Επομένως, $P(Y = 1) = 1/4 \;\; 3/4 + 3/4 \;\; 1/8 = 9/32=0.28125$ και

$P(Y = 0) = 1/4 \; 1/4 + 3/4 \; 7/8 = 23/32=0.71875$.

(ii) Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Bayes

$$P(X=1 \mid Y=1) = \frac{P(Y=1 \mid X=1)P(X=1)}{P(Y=1 \mid X=0)P(X=0)+P(Y=1 \mid X=1)P(X=1)} = \frac{\frac{3}{4}\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

β) Εάν X η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει το μήκος της ράβδου, τότε $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ και $Z = (X - \mu) / \sigma \sim N(0, 1)$. Επομένως, αναζητούμε την $P(X < 2.8$ ή $X > 3.2) = P(X < 2.8) + P(X > 3.2) =$ $P\left(\frac{X-3}{0.2} < \frac{2.8-3}{0.2}\right) + P\left(\frac{X-3}{0.2} > \frac{3.2-3}{0.2}\right) = P(Z < -1) + P(Z > 1) = \Phi(-1)+1-\Phi(1)=1-\Phi(1)+1-\Phi(1)=2\,(1 - \Phi(1))=2(1-0.8413)=2\; 0.1587=0.3174$.

γ) Αν θεωρήσουμε σαν «επιτυχία» να επιλέξουμε μία ράβδο που είναι ελαττωματική, δηλαδή μία ράβδο που έχει μήκος λιγότερο από $2.8m$ ή περισσότερο από $3.2m$ και W είναι ο αριθμός των επιτυχιών στις ν επαναλήψεις του πειράματος «μέτρηση μήκους ράβδου» τότε το W είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους ν=5 και p = 0.3174. Άρα η πιθανότητα τουλάχιστον 2 ράβδοι, από το δείγμα των 5 ράβδων, να είναι ελαττωματικές ισούται με :

$$P(W \geq 2) = 1 - P(W < 2) = 1 - \left(P(W = 0) + P(W = 1) \right) =$$

$$= 1 - \left(\binom{5}{0} (0.3174)^0 (0.6826)^5 + \binom{5}{1} (0.3174)^1 (0.6826)^4 \right) =$$

$$= 1 - \left(0.1482 + 5 \times 0.3174 \times 0.2171 \right) = 1 - 0.1482 - 0.3445 = 0.5073$$