ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ**
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)**

# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 3 Ιουλίου 2010

**Θέμα 1** (20 μονάδες)
Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^4$ και τον υποχώρο του $V$ που παράγεται από τα διανύσματα $u_1 = (2,-1,3,2)$, $u_2 = (-1,1,1,-3)$ και $u_3 = (1,1,9,-5)$.
α) (7 μον.) Να βρείτε μια βάση και τη διάσταση του $V$.
β) (7 μον.) βρείτε μια βάση και τη διάσταση του ορθογώνιου συμπληρώματος $V^{\perp}$.
γ) (6 μον.) Δίδεται η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ που ορίζεται από τις σχέσεις:

$$f(1,0,0) = u_1, \quad f(0,1,0) = u_2, \quad f(0,0,1) = u_3.$$

Αφού γράψετε τον πίνακα αναπαράστασης της $f$ ως προς την κανονική βάση, να βρείτε τις διαστάσεις της εικόνας *Imf* και του πυρήνα *Kerf* της *f*.

**Λύση.**
α)
Θεωρούμε τον πίνακα με γραμμές τα $u_1, u_2, u_3$ δηλαδή τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 9 & -5 \end{pmatrix}$. Εφαρμόζοντας σ'αυτόν διαδοχικά τις γραμμοπράξεις

$\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3, \Gamma_2 \to \Gamma_1 + \Gamma_2, \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1, \Gamma_2 \to \frac{1}{2}\Gamma_2, \Gamma_3 \to \frac{1}{3}\Gamma_3$ και $\Gamma_3 \to \Gamma_2 + \Gamma_3$,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 9 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 & -5 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 & -5 \\ 0 & 2 & 10 & -8 \\ 0 & -3 & -15 & 12 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & -5 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

καταλήγουμε στον γραμμοϊσοδύναμο πίνακα:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι οι μη μηδενικές γραμμές του τελευταίου πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Άρα μια βάση του $V$ είναι το σύνολο $\{(1,1,9,-5),(0,1,5,-4)\}$ οπότε $\dim V = 2$.

Εναλλακτικά:

Θεωρούμε τον πίνακα με στήλες τα $u_1, u_2, u_3$ και εφαρμόζουμε σ' αυτόν διαδοχικά τις γραμμοπράξεις:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 9 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 9 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 + 2\Gamma_1]{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 + 3\Gamma_1}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 + \Gamma_2]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 4\Gamma_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Επειδή η $1^η$ και η $2^η$ στήλη του τελικού πίνακα έχουν μη μηδενικά οδηγά στοιχεία η $1^η$ και η $2^η$ στήλη του αρχικού πίνακα δηλαδή τα $u_1, u_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα παράγουν τον χώρο. Συνεπώς αυτά αποτελούν βάση του $V$ και οπότε $\dim V = 2$.

β)

Το στοιχείο $(x, y, z, w) \in V^{\perp}$ αν και μόνο αν είναι κάθετο στα διανύσματα της βάσης του $V$, δηλαδή τα $u_1, u_2$. Οπότε η βάση του ορθογώνιου συμπληρώματος θα προκύψει από τη λύση του ομογενούς συστήματος με επαυξημένο πίνακα:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Από όπου έχουμε :

$$\begin{array}{l} x = -4z + w \\ y = -5z + 4w \end{array} \quad \text{και τελικά}$$

$$(x, y, z, w) = (-4z + w, -5z + 4w, z, w) = z(-4, -5, 1, 0) + w(1, 4, 0, 1)$$

Τα $(-4, -5, 1, 0), (1, 4, 0, 1)$ παράγουν το ορθογώνιο συμπλήρωμα $V^{\perp}$ και είναι εύκολο με τη χρήση του ορισμού να δούμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Οπότε αποτελούν βάση του ορθογώνιου συμπληρώματος $V^{\perp}$.

γ)

Ως πίνακας της απεικόνισης ως προς τις κανονικές βάσεις είναι ο πίνακας με στήλες τα $u_1 = (2, -1, 3, 2)$, $u_2 = (-1, 1, 1, -3)$ και $u_3 = (1, 1, 9, -5)$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 9 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 9 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 + 2\Gamma_1]{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 + 3\Gamma_1}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 + \Gamma_2]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 4\Gamma_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Επειδή η $1^η$ και η $2^η$ στήλη του τελικού πίνακα έχουν μη μηδενικά οδηγά στοιχεία η $1^η$ και η $2^η$ στήλη του αρχικού πίνακα δηλαδή τα $u_1 = (2,-1,3,2)$, $u_2 = (-1,1,1,-3)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα αποτελούν βάση του χώρου εικόνα της απεικόνισης, άρα $\dim \operatorname{Im} f = 2$. Οπότε $\dim Kerf = 3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$

**Θέμα 2** (20 μονάδες)

*Έστω* $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

α) (10 μον.) Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του $A$.

β) (5 μον.) Εξετάστε αν ο $A$ διαγωνοποιείται και εάν ναι βρείτε τον αντιστρέψιμο πίνακα $P$ και τον διαγώνιο $D$ έτσι ώστε $D = P^{-1}AP$.

γ) (5 μον.) Υπολογίστε τον πίνακα $A^{2011}$.

Λύση. α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $A$ είναι

$$\det(A - xI) = \det\begin{pmatrix} -1-x & 4 & -2 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & -6 & -x \end{pmatrix} = -(x+1)\det\begin{pmatrix} 1-x & 0 \\ -6 & 0-x \end{pmatrix} = -(x+1)(x(x-1)+0) =$$

$$= -x(x-1)(x+1)$$

Άρα οι ιδιοτιμές του $A$ είναι 0 και 1,-1. Τα ιδιοδιανύσματα του $A$ είναι οι λύσεις των εξισώσεων

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ (A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ και } (A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Για τη πρώτη εξίσωση έχουμε τις λύσεις

$z\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R}$ για τη δεύτερη εξίσωση οι λύσεις είναι $y\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ $y \in \mathbb{R}$ και για την τρίτη

$x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R}.$

Όλες αυτές οι λύσεις εκτός της μηδενικής είναι τα ιδιοδιανύσματα του $A$.

β) Επειδή ο πίνακας έχει 3 διακεκριμένες ιδιοτιμές (οπότε και 3 γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα) διαγνοποιείται με πίνακες διαγωνοποίησης:

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \end{pmatrix} \text{ και } D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

γ) Ισχύει:

$$A = PDP^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} \Leftrightarrow A^{2011} = PD^{2011}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{2011} P^{-1}$$

$$= P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^{2011} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{2011} \end{pmatrix}P^{-1} = PDP^{-1} = A$$

**Θέμα 3** (20 μονάδες)

α) (6 μον.) Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας $a_n = \left(\dfrac{n+4}{n-1}\right)^{n+3}$ $n = 2,3,\ldots.$ .

β) (7 μον.) Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n)+\sin(n)}{2^n}$.

Υπόδειξη: Εξετάστε την απόλυτη σύγκλιση της σειράς φράσσοντας τον γενικό όρο της σειράς από γενικό όρο γνωστής για τη σύγκλισή της σειράς.

γ) (7 μον.) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{x+5}}$. Καθορίστε το πεδίο ορισμού της $f(x)$ και να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$.

**Λύση**

i) Έχουμε $\displaystyle\lim a_n = \lim\frac{\left(1+\frac{4}{n}\right)^n\left(1+\frac{4}{n}\right)^3}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^3} = \frac{\lim\left(1+\frac{4}{n}\right)^n \lim\left(1+\frac{4}{n}\right)^3}{\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^3} = \frac{e^4.1}{e^{-1}.1} = e^5.$

ii) Για το γενικό όρο της σειράς έχουμε $|a_n| = \left|\dfrac{\cos(n)+sim(n)}{2^n}\right| = \dfrac{|coz(n)+\sin(n)|}{2^n} \le \dfrac{|\cos(n)|+|\sin(n)|}{2^n} \le \dfrac{1+1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}.$

Θεωρούμε τη σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ η οποία συγκλίνει, καθώς $\displaystyle\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = 2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ και η $\displaystyle\sum\frac{1}{2^n}$ συγκλίνει ως γεωμετρική με $|r| = \dfrac{1}{2} < 1.$ Από το κριτήριο σύγκρισης συμπεραίνουμε ότι και $\displaystyle\sum_{1}^{\infty}|a_n|$ συγκλίνει και άρα και η $\displaystyle\sum_{1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει.

iii) Για το πεδίο ορισμού της $f(x)$ έχουμε τους εξής περιορισμούς $x \ge 0,$ λόγω της ύπαρξης στον αριθμητή της ρίζας $\sqrt{x}), x \ge -5$ (λόγω της ύπαρξης στον παρανομαστή της ρίζας $\sqrt{x+5}$) *και* $\sqrt{x+5} \ne 3$ η ισοδύναμα $x+5 \ne 9,$ δηλαδή $x \ne 4$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού της $f(x)$ είναι το σύνολο $[0,4)\cup(4,+\infty)$. Για να βρούμε το $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ , επειδή η $f(x)$ για *x=4* δεν ορίζεται, πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρανομαστή επί την συζυγή παράσταση του παρανομαστή και έχουμε:

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4}\frac{(2-\sqrt{x})(3+\sqrt{x+5})}{4-x}$$
$$= \lim_{x\to 4}\frac{3+\sqrt{x+5}}{2+\sqrt{x}} = \frac{3+\sqrt{4+5}}{2+\sqrt{4}} = \frac{3}{2}.$$

Εναλλακτικά : Μπορούμε να εφαρμόσουμε και τον κανόνα του L΄Hospital αφού το πρώτο όριο δίνει την απροσδιόριστο μορφή

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{x+5}} \overset{0/0}{=} = \lim_{x\to 4}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{1}{2\sqrt{x+5}}} = \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x}} = \frac{3}{2}$$

**Θέμα 4** (20 μονάδες)

α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ax^3+\beta x^2-x-1$ Υποθέτουμε ότι η $f(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x=-1$ και $x={}^1\!/_3$.

i) (3 μον.) Να υπολογισθούν οι συντελεστές *α και β* .

ii) (7 μον.) Να προσδιορισθούν τα διαστήματα στα οποία η $f(x)$ είναι αύξουσα ή φθίνουσα, τα διαστήματα στα οποία η $f(x)$ στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, τα κοίλα προς τα κάτω καθώς και τα σημεία καμπής της.

β) (5 μον.) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{e^x-2}{e^x+1}dx$.

Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε μέθοδο αντικατάστασης και στη συνέχεια ανάλυση σε κλάσματα.

γ) (5 μον.) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos(3x)dx$.

Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε παραγοντική ολοκλήρωση.

**Λύση**

α) i) Ισχύει $f'(x)=3ax^2+2\beta x-1$. Για τα τοπικά ακρότατα θα πρέπει να ισχύει $f'(-1)=f'\left(\frac{1}{3}\right)=0,$ δηλαδή $3a-2\beta-1=0$ και $\alpha+2\beta-3=0$ που σημαίνει $a=1$ και $\beta=1$.

ii) Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα γνησίως φθίνουσα) σε ένα διάστημα *(c,d)* αν $f'(x)>0$ (αντίστοιχα $f'(x)<0$) για κάθε $x\in(c,d)$. Συνεπώς η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα για όλα τα $x$ που ικανοποιούν την $f'(x)=3x^2+2x-1=3(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)>0.$ δηλαδή για όλα τα $x$ με $x>\frac{1}{3}$ ή $x<-1$. Η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα αν $-1<x<\frac{1}{3}$. Η $f(x)$ στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω αν $f''(x)=6x+2>0$, δηλαδή για $x>-\frac{1}{3}$. Η $f(x)$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω αν $f''(x)=6x+2<0$, δηλαδή για $x<-\frac{1}{3}$. Προφανώς το σημείο καμπής είναι στο $x=-\frac{1}{3}$.

β) Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της αντικατάστασης, θέτοντας $u=e^x$ έχουμε $dx=\frac{du}{u}$, οπότε $\int\frac{e^x-2}{e^x+1}dx=\int\frac{u-2}{(u+1)u}du$. Αναλύοντας το υπό ολοκλήρωση κλάσμα έχουμε $\frac{u-2}{(u+1)u}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u+1}=\frac{(A+B)u+A}{(u+1)u}$, οπότε *A=-2* και *B=3*. Έτσι έχουμε

$$\int\frac{e^x-2}{e^x+1}dx=-2\int\frac{du}{u}+3\int\frac{du}{u+1}=-2\ln|u|+3\ln|u+1|+c=-2x+3\ln(e^x+1)+c$$

γ)

$$\int x\cos(3x)dx=\frac{1}{3}\int x(\sin(3x))'dx=\frac{1}{3}(x\sin(3x)-\int\sin(3x)dx)=$$

$$=\frac{1}{3}(x\sin(3x)-\int\left(-\cos(3x)\right)'dx)=\frac{1}{3}(x\sin(3x)+\frac{1}{3}\cos(3x))+c=$$

$$=\frac{1}{3}(x\sin(3x)+\frac{1}{3}\cos(3x))+c$$

Οπότε

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}x\cos(3x)dx=\frac{1}{3}(\frac{\pi}{3}\sin(3\frac{\pi}{3})+\frac{1}{3}\cos(3\frac{\pi}{3}))-\frac{1}{3}(0\sin(3\cdot 0)+\frac{1}{3}\cos(3\cdot 0))=-\frac{2}{9}$$

**Θέμα 5** (20 μονάδες)

α) Έρευνα έδειξε ότι η πιθανότητα αύξησης στην συνολική ζήτηση ενός προϊόντος κατά τον επόμενο χρόνο είναι 70%. Στην περίπτωση που πράγματι υπάρξει αύξηση, τότε η πιθανότητα να υπάρξει αύξηση των πωλήσεων ενός συγκεκριμένου εισαγωγέα κατά τον επόμενο χρόνο είναι 80%. Στην περίπτωση που δεν υπάρξει αύξηση στη συνολική ζήτηση του προϊόντος, τότε η πιθανότητα να υπάρξει αύξηση των πωλήσεων του συγκεκριμένου εισαγωγέα κατά τον επόμενο χρόνο είναι 50%.

i) (5 μον.) Να υπολογισθεί η πιθανότητα κατά τον επόμενο χρόνο οι πωλήσεις του συγκεκριμένου εισαγωγέα να αυξηθούν.

ii) (5 μον.) Να υπολογισθεί η πιθανότητα κατά τον επόμενο χρόνο η συνολική ζήτηση του προϊόντος και οι πωλήσεις του συγκεκριμένου εισαγωγέα να αυξηθούν.

ii) (5 μον.) Αν οι πωλήσεις του συγκεκριμένου εισαγωγέα παρουσιάσουν αύξηση κατά τον επόμενο χρόνο να υπολογισθεί η πιθανότητα ότι και η συνολική ζήτηση του προϊόντος θα παρουσιάσει αύξηση.

Υπόδειξη: Ορίστε τα ενδεχόμενα:

$\Sigma$ : το ενδεχόμενο να υπάρξει συνολική αύξηση της ζήτησης.

$A$: το ενδεχόμενο να υπάρξει αύξηση των πωλήσεων του εισαγωγέα.

β) (5 μον.) Τα μηνιαία έσοδα μιας επιχείρησης είναι τυχαία μεταβλητή $X$ που ακολουθεί την κανονική κατανομή $X\approx N(\mu,\sigma^2)$ με παραμέτρους $\mu$*=150000* και *σ=20000.* Ποια η πιθανότητα η επιχείρηση να ξεπεράσει τις *180000* σε έσοδα ένα συγκεκριμένο μήνα. (Δίδεται ότι $\Phi(1.5)=0.9332$)

*(Δεν είναι απαραίτητο να γίνουν οι διαιρέσεις των δεκαδικών τιμών που προκύπτουν στις αριθμητικές παραστάσεις της άσκησης αυτής.)*

Λύση α) Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

$\Sigma$ : το ενδεχόμενο να υπάρξει συνολική αύξηση της ζήτησης $P(\Sigma)=0.7$ και επομένως $P(\Sigma')=0.3$.

$A$: το ενδεχόμενο να υπάρξει αύξηση των πωλήσεων του εισαγωγέα

Για τις πιθανότητες δίδεται.

$P(A/\Sigma)$: η πιθανότητα να υπάρξει αύξηση των πωλήσεων του εισαγωγέα δεδομένου ότι υπήρξε συνολική αύξηση της ζήτησης. $P(A/\Sigma)=0.8.$

Επίσης

$P(A/\Sigma')$ η πιθανότητα να υπάρξει αύξηση των πωλήσεων του εισαγωγέα δεδομένου ότι δεν υπήρξε συνολική αύξηση της ζήτησης $P(A/\Sigma')=0.5.$

i) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $P(A)$ για την οποία ισχύει:

$$P(A)=P(A/\Sigma)P(\Sigma)+P(A/\Sigma')P(\Sigma')=0.8\cdot 0.7+0.5\cdot 0.3=0.71$$

ii) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $P(A\cap\Sigma)$ με

$$P(A\cap\Sigma)=P(A/\Sigma)P(\Sigma)=0.56.$$

iii) Η πιθανότητα που ζητείται είναι με

$$P(\Sigma/A)=\frac{P(A\cap\Sigma)}{P(A/\Sigma)P(\Sigma)+P(A/\Sigma')P(\Sigma')}=\frac{0.56}{0.8\cdot 0.7+0.5\cdot 0.3}=\frac{56}{71}.$$

β) Γνωρίζουμε ότι $X\approx N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\approx N(0,1).$ Επομένως

$$P(X>180000)=P\left(\frac{X-150000}{20000}>\frac{180000-150000}{20000}\right)=P(Z>1.5)=1-\Phi(1.5)=0.0668.$$