ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ I (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 13 Ιουνίου 2010

Θέμα 1 (20 μονάδες)
Έστω $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}^3$ *και* $V=\langle\alpha,\beta,\gamma,\delta\rangle$, *όπου*

$$\alpha=(1,2,0),\ \beta=(2,1,1),\ \gamma=(4,5,1),\ \delta=(5,4,2).$$

i) *(7 μον) Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του* V .
ii) *(7 μον) Βρείτε μια βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος* $V^\perp$ *του* V .
iii) *(6 μον) Έστω* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *η γραμμική απεικόνιση που ορίζεται από*

$$f(1,0,0)=\alpha,\ f(0,1,0)=\beta,\ f(0,0,1)=\gamma.$$

Βρείτε τη διάσταση του πυρήνα $\ker f$ *της* f .

Λύση
i) Εφαρμόζουμε τις ακόλουθες στοιχειώδεις πράξεις γραμμών στον πίνακα με γραμμές τα $\alpha,\beta,\gamma,\delta$:

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&1\\4&5&1\\5&4&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\Gamma_2-2\Gamma_1,\\ \Gamma_3-4\Gamma_1,\\ \Gamma_4-5\Gamma_1}}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-3&1\\0&-3&1\\0&-6&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\Gamma_3-\Gamma_2,\\ \Gamma_4-2\Gamma_2}}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-3&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι οι μη μηδενικές γραμμές του τελευταίου πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Άρα μια βάση του V είναι το σύνολο $\{(1,2,0),(0,-3,1)\}$ οπότε $\dim V=2$. (Σημειώνουμε ότι μια άλλη βάση του V είναι το $\{\alpha,\beta\}$ γιατί στο τμήμα της απαλοιφής Gauss που εφαρμόσαμε πριν δεν υπεισέρχονται εναλλαγές γραμμών).
Εναλλακτικά γράφουμε τα διανύσματα $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ως στήλες ενός πίνακα και κάνουμε γραμμοπράξεις:

$$\begin{pmatrix}1&2&4&5\\2&1&5&4\\0&1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_2-2\Gamma_1}\begin{pmatrix}1&2&4&5\\0&-3&-3&-6\\0&1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_3+3\Gamma_2}\begin{pmatrix}1&2&4&5\\0&-3&-3&-6\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Επειδή η $1^η$ και η $2^η$ στήλη του τελικού πίνακα έχουν μη μηδενικά οδηγά στοιχεία η $1^η$ και η $2^η$ στήλη του αρχικού πίνακα δηλαδή τα $\{\alpha,\beta\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα παράγουν τον χώρο.

ii) Επειδή το σύνολο $\{(1,2,0),(0,-3,1)\}$ παράγει το V , έχουμε ότι $(x,y,z)\in V^\perp$ αν και μόνο αν το (x,y,z) είναι κάθετο και στο $(1,2,0)$ και στο $(0,-3,1)$, δηλαδή αν και μόνον αν $x+2y=-3y+z=0$. Οι λύσεις του συστήματος αυτού είναι $(x,y,z)=(\frac{-2z}{3},\frac{z}{3},z),\ z\in\mathbb{R}$. Μια βάση του χώρου των λύσεων, και άρα του $V^\perp$, είναι το σύνολο $\{(-2,1,3)\}$.

iii) Επειδή τα $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ παράγουν το πεδίο ορισμού της f και η f είναι γραμμική απεικόνιση, οι εικόνες τους, δηλαδή τα α,β,γ παράγουν το $\operatorname{Im} f$. Από τη σημείωση στο ερώτημα i) έχουμε $\operatorname{Im} f = V$ και άρα $\dim \operatorname{Im} f = 2$, οπότε $\dim\ker f = 3 - \dim\operatorname{Im} f = 1$.

Ή εναλλακτικά ως πίνακας της απεικόνισης ως προς τις κανονικές βάσεις είναι ο πίνακας με στήλες τα α,β,γ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 + 3\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Επειδή η 1η και η 2η στήλη του τελικού πίνακα έχουν μη μηδενικά οδηγά στοιχεία η 1η και η 2η στήλη του αρχικού πίνακα δηλαδή τα $\{\alpha,\beta\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα παράγουν τον χώρο εικόνα της απεικόνισης, άρα $\dim\operatorname{Im} f = 2$, οπότε $\dim\ker f = 3 - \dim\operatorname{Im} f = 1$.

Θέμα 2 (20 μονάδες)

Έστω $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

i) *(4 μον) Χρησιμοποιώντας επαγωγή στο* n, *δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο* n *ισχύει* $A^{2n} = 4^n \begin{pmatrix} n+1 & n \\ -n & -n+1 \end{pmatrix}$.

ii) *(6 μον) Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του* A.

iii) *(5 μον) Εξετάστε αν ο* A *διαγωνοποιείται.*

iv) *(5 μον) Δικαιολογήστε γιατί υπάρχει ορθογώνιος πίνακας* P *έτσι ώστε ο* $P^T A A^T P$ *να είναι διαγώνιος χωρίς να υπολογίστε έναν τέτοιο* P.

Λύση

i) Για $n=1$ έχουμε $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Έστω ότι $A^{2n} = 4^n \begin{pmatrix} n+1 & n \\ -n & -n+1 \end{pmatrix}$ για κάποιο n. Τότε

$$A^{2(n+1)} = A^{2n}A^2 = 4^n \begin{pmatrix} n+1 & n \\ -n & -n+1 \end{pmatrix} 4 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 4^{n+1}\begin{pmatrix} (n+1)+1 & n+1 \\ -(n+1) & -(n+1)+1 \end{pmatrix}.$$

ii) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)+1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2$ και άρα οι ιδιοτιμές του A είναι οι $2,2$.(ή μπορούμε να πούμε ότι έχουμε μία διπλής αλγεβρικής πολλαπλότητας ιδιοτιμή). Λύνοντας το σύστημα $(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

βρίσκουμε $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{R}$, οπότε τα ιδιοδιανύσματα του A είναι τα

$\begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{R} - \{0\}$. Δηλαδή η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής είναι 1.

iii) Από τη μορφή των ιδιοδιανυσμάτων του A που υπολογίσαμε πριν, έπεται ότι κάθε δύο από αυτά είναι γραμμικά εξαρτημένα. Άρα δεν υπάρχει βάση του $\mathbb{R}^2$ αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του A, δηλαδή ο A δεν διαγωνοποιείται. Εναλλακτικά μπορούμε να πούμε (το ισοδύναμο) ότι A δεν διαγωνοποιείται διότι η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής του δεν ισούται με τη αλγεβρική πολλαπλότητά της.

iv) Επειδή $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$, ο AA^t είναι συμμετρικός και από το φασματικό θεώρημα έπεται η ύπαρξη ορθομοναδιαίου P με $P^T AA^T P$=διαγώνιος.

Εναλλακτικά, ο

$AA^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ είναι συμμετρικός και από το φασματικό θεώρημα έπεται η ύπαρξη ορθομοναδιαίου P με $P^T AA^T P$=διαγώνιος.

Θέμα 3 (20 μονάδες)

i) (4 μον) Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας $a_n = \dfrac{4^n + (-5)^n + 6^n}{6^n + 1}$, $n = 1, 2, ...$

(Υπόδειξη: διαιρέστε τόσο τον αριθμητή όσο και τον παρονομαστή του κλάσματος με n-οστή δύναμη κατάλληλου αριθμού.)

ii) (6 μον) Εξετάστε αν συγκλίνουν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n^2-1}{2n^4+1}$.

iii) (4μον) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int x\sqrt{x-2}\,dx$. *(Υπόδειξη: μέθοδος αντικατάστασης.)*

iv) (6 μον) Υπολογίστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} xe^{-3x}dx$. *(Υπόδειξη: παραγοντική ολοκλήρωση.)*

Λύση

i) Έχουμε

$$\lim a_n = \lim\frac{4^n + (-5)^n + 6^n}{6^n + 1} = \lim\frac{\frac{4^n}{6^n} + \frac{(-5)^n}{6^n} + \frac{6^n}{6^n}}{\frac{6^n}{6^n} + \frac{1}{6^n}} =$$

$$\lim\frac{\left(\frac{4}{6}\right)^n + \left(\frac{-5}{6}\right)^n + 1}{1 + \left(\frac{1}{6}\right)^n} = \frac{0+0+1}{1+0} = 1,$$

αφού $\left|\frac{4}{6}\right|, \left|\frac{-5}{6}\right|, \left|\frac{1}{6}\right| < 1$.

ii) Με το κριτήριο της ρίζας έχουμε $\lim \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n} = \lim \frac{n+1}{2n-1} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$,

οπότε η σειρά συγκλίνει. Για τη δεύτερη παρατηρούμε ότι οι όροι είναι θετικοί και $\frac{3n^2-1}{2n^4+1} \le \frac{3n^2}{2n^4} = \frac{3}{2}\frac{1}{n^2}$. Επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, η αρχική συγκλίνει.

iii) Θέτοντας $u = x-2$ έχουμε $du = dx$ και $x = u+2$, οπότε

$$\int x\sqrt{x-2}dx = \int (u+2)\sqrt{u}du = \int u^{\frac{3}{2}}du + 2\int u^{\frac{1}{2}}du =$$

$$\frac{1}{1+\frac{3}{2}}u^{1+\frac{3}{2}} + 2\frac{1}{1+\frac{1}{2}}u^{1+\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}} + c.$$

iv) Για το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$\int xe^{-3x}dx = -\frac{1}{3}\int xd(e^{-3x}) = -\frac{1}{3}(xe^{-3x} - \int e^{-3x}dx) = -\frac{1}{3}(xe^{-3x} + \frac{1}{3}e^{-3x}) + c$. Άρα

$$\int_0^{+\infty} xe^{-3x}dx = \lim_{a\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}(ae^{-3a} + \frac{1}{3}e^{-3a})\right) - \left(-\frac{1}{3}\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}\lim_{a\to+\infty} ae^{-3a} - \frac{1}{9}\lim_{a\to+\infty} e^{-3a} + \frac{1}{9} =$$

$$-\frac{1}{3}\lim_{a\to+\infty} ae^{-3a} - 0 + \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}\lim_{a\to+\infty}\frac{a}{e^{3a}} + \frac{1}{9}.$$

Υπολογίζουμε το $\lim_{a\to+\infty}\frac{a}{e^{3a}}$ με το κανόνα L'Hospital, $\lim_{a\to+\infty}\frac{a}{e^{3a}} = \lim_{a\to+\infty}\frac{1}{3e^{3a}} = 0$, οπότε

$$\int_0^{+\infty} xe^{-3x}dx = \frac{1}{9}.$$

Θέμα 4 (20 μονάδες)

i) (6 μον) Για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η ακόλουθη συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$;

$$f(x) = \begin{cases} a, & x = 0 \\ \frac{e^x \sin(2x)}{e^x - 1}, & x \ne 0. \end{cases}$$

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3$.

a. *(5 μον) Βρείτε τα διαστήματα όπου η g είναι αύξουσα ή φθίνουσα.*

b. *(5 μον) Βρείτε όλα τα $x \in \mathbb{R}$ στα οποία η g έχει τοπικό μέγιστο, τοπικό ελάχιστο ή σημείο καμπής και δείξτε ότι $g(x) \ge \frac{1}{2^8} - \frac{1}{3\cdot 2^6}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

c. *(4 μον) Καταγράψτε ένα ολοκλήρωμα (χωρίς να το υπολογίσετε) που δίνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα των x και τη γραφική παράσταση της $g(x)$.(Υπόδειξη: εξετάστε το πρόσημο της $g(x)$)*

Λύση

i) Ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, είναι σαφές ότι η $f(x)$ είναι συνεχής σε κάθε $x \neq 0$. Άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin(2x)}{e^x - 1} = a$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα L'Hospital έχουμε

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin(2x)}{e^x - 1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin(2x) + 2e^x \cos 2x}{e^x} = 2$. Άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $a = 2$.

ii) a και b. Η παράγωγος της $g(x)$ είναι $g'(x) = 4x^3 - x^2 = x^2(4x-1)$ οπότε

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \dfrac{1}{4}$. Επίσης, $g''(x) = 12x^2 - 2x = 2x(6x-1)$ οπότε

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \dfrac{1}{6}$.

Παρατηρούμε ότι στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, \dfrac{1}{4})$ η $g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα, αφού στα διαστήματα αυτά έχουμε $g'(x) < 0$. Με ανάλογο τρόπο η $g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(\dfrac{1}{4}, +\infty)$. Άρα υπάρχει τοπικό ελάχιστο στο $x = \dfrac{1}{4}$ (που είναι το μοναδικό τοπικό ακρότατο).

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ έχουμε $g''(x) > 0$ και άρα η $g(x)$ στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο διάστημα αυτό. Με ανάλογο τρόπο έχουμε ότι στο $(0, \dfrac{1}{6})$ η $g(x)$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω και στο $(\dfrac{1}{6}, +\infty)$ η $g(x)$ στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω. Άρα στα $x = 0$ και $x = \dfrac{1}{6}$ έχουμε σημεία καμπής.

Συνοπτικά η συμπεριφορά της συνάρτησης φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$		0		$1/6$		$1/4$		$1/3$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
					σ.κ		ο.ε.				

Είδαμε πριν ότι η $g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, \dfrac{1}{4})$ και γνησίως αύξουσα στο $(\dfrac{1}{4}, +\infty)$. Άρα στο $x = \dfrac{1}{4}$ η $g(x)$ εμφανίζει ολικό ελάχιστο, δηλαδή έχουμε $g(x) \geq g(\dfrac{1}{4}) = \dfrac{1}{4^4} - \dfrac{1}{3 \cdot 4^3} = \dfrac{1}{2^8} - \dfrac{1}{3 \cdot 2^6}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ που είναι το ζητούμενο.

c. Έχουμε $g(x)=0 \Leftrightarrow x=0,\frac{1}{3}$. Για κάθε $x\in[0,\frac{1}{3}]$ έχουμε $g(x)\le 0$ και άρα το εμβαδόν του χωρίου της άσκησης δίνεται από

$$\int_0^{\frac{1}{3}}|g(x)|dx=\int_0^{\frac{1}{3}}(-g(x))dx=\int_0^{\frac{1}{3}}(-x^4+\frac{1}{3}x^3)dx.$$

Θέμα 5 (20 μονάδες)

i) *Στο τυπογραφείο* Α *εκτυπώνεται το 70% του συνολικού αριθμού αντιτύπων ενός βιβλίου και στο τυπογραφείο* Β *εκτυπώνεται το 30% του συνολικού αριθμού αντιτύπων του βιβλίου αυτού. Είναι γνωστό ότι το 3% των αντιτύπων που προέρχονται από το* Α *είναι ελαττωματικά και το 5% των αντιτύπων που προέρχονται από το* Β *είναι ελαττωματικά.*

a. *Υπολογίστε την πιθανότητα ένα αντίτυπο του βιβλίου που επιλέγεται τυχαία να είναι ελαττωματικό.*

b. *Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ένα αντίτυπο του βιβλίου που είναι ελαττωματικό να έχει εκτυπωθεί στο* Α.

(Υπόδειξη: Θεωρείστε τα ενδεχόμενα
A={το αντίτυπο του βιβλίου εκτυπώθηκε στο τυπογραφείο A}
B={το αντίτυπο του βιβλίου εκτυπώθηκε στο τυπογραφείο B}
E={το αντίτυπο του βιβλίου είναι ελαττωματικό}.)

ii) *(10 μον) Ο χρόνος Τ (σε λεπτά) που ξοδεύουν κάθε μέρα οι μαθητές ενός Λυκείου στέλνοντας μηνύματα SMS μοντελοποιείται από μία κανονική κατανομή. Το 30% των μαθητών ξοδεύουν λιγότερο από 10 λεπτά την ημέρα με τα SMS, ενώ το 35% των μαθητών ξοδεύουν περισσότερο από 15 λεπτά την ημέρα με τα SMS. Βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του χρόνου Τ.*
Δίνεται ότι Φ(-0.5244)=0.30 και Φ(0.3853)=0.65. (Δεν είναι απαραίτητο να γίνουν οι διαιρέσεις των δεκαδικών τιμών που προκύπτουν στις αριθμητικές παραστάσεις των σ και μ.)

Λύση

i) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

A={το αντίτυπο του βιβλίου εκτυπώθηκε στο τυπογραφείο Α}
B={το αντίτυπο του βιβλίου εκτυπώθηκε στο τυπογραφείο Β}
E={το αντίτυπο του βιβλίου είναι ελαττωματικό}.

Έχουμε από την υπόθεση ότι

$$P(A)=\frac{7}{10},\ P(B)=\frac{3}{10},\ P(E\mid A)=\frac{3}{100},\ P(E\mid B)=\frac{5}{100}.$$

a. Επειδή τα A,B είναι διαμέριση του δειγματοχώρου $A\cup B$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας

$$P(E)=P(A)P(E\mid A)+P(B)P(E\mid B)=\frac{7}{10}\frac{3}{100}+\frac{3}{10}\frac{5}{100}=\frac{36}{1000}.$$

b. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα έχουμε

$$P(A\mid E)=\frac{P(E\mid A)P(A)}{P(E)}=\frac{\frac{3}{100}\frac{7}{10}}{\frac{36}{1000}}=\frac{21}{36}.$$

ii) Έχουμε $T \sim N(\mu, \sigma^2)$. Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε

$P(T < 10) = 0.30 \Rightarrow P(\frac{T-\mu}{\sigma} < \frac{10-\mu}{\sigma}) = 0.30 \Rightarrow P(\mathrm{Z} < \frac{10-\mu}{\sigma}) = 0.30$ οπότε

$$\frac{10-\mu}{\sigma} = -0.5244\,.$$

Επίσης από $P(\mathrm{T} > 15) = 0.35$ έπεται ότι

$1 - P(\mathrm{T} < 15) = 0.35 \Rightarrow P(\mathrm{T} < 15) = 0.65 \Rightarrow P(\mathrm{Z} < \frac{15-\mu}{\sigma}) = 0.65$ οπότε

$$\frac{15-\mu}{\sigma} = 0.3853\,.$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε

$$\left.\begin{aligned} \frac{10-\mu}{\sigma} = -0.5244 \Leftrightarrow \mu = 10 + 0.5244\sigma \\ \frac{15-\mu}{\sigma} = 0.3853 \Leftrightarrow \mu = 15 - 0.3853\sigma \end{aligned}\right\} \Rightarrow 10 + 0.5244\sigma = 15 - 0.3853\sigma \Rightarrow$$

$$0.9097\sigma = 5 \Rightarrow \sigma = \frac{5}{0.9097} = 5.4963$$

$$\mu = 15 - 0.3853\sigma = 15 - 0.3853\frac{5}{0.9097} = 15 - 0.3853 \cdot 5.4963 = 12.8823$$