**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)**

# ΕΡΓΑΣΙΑ 1η

**Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: 18/10/2010**

**Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 26/11/2010**

Οι Ασκήσεις της πρώτης εργασίας αναφέρονται στην ακόλουθη ύλη:
**Κεφάλαιο 1** (Πίνακες, Ορίζουσες, Γραμμικά Συστήματα) και
**Κεφάλαιο 2** (Διανυσματικοί Χώροι), Παράγραφοι 2.1 - 2.7
του συγγράμματος του ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα» των Γρ. Καμβύσα και Μ. Χατζηνικολάου.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής μπορείτε να συμβουλευθείτε επίσης το βοηθητικό υλικό που υπάρχει στη διεύθυνση http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm ως εξής:

**Ε**ναλλακτικό **Δ**ιδακτικό **Υ**λικό:
Κεφ1 Εισαγωγικές Έννοιες, Κεφ2 Γραμμικά Συστήματα, Κεφ3 Πίνακες και Γραμμικά Συστήματα, Κεφ4 Ορίζουσες, Κεφ5 Οι χώροιR^n , Κεφ6 Διανυσματικοί χώροι και Κεφ7 Βάση και Διάσταση.
**Σ**υνοδευτικό **Ε**κπαιδευτικό **Υ**λικό:
Σύνολα Αριθμών, Πίνακες, Οι Χώροι R^n, Διανυσματικοί Χώροι.

Στις ασκήσεις που ακολουθούν, υπάρχουν βοηθητικές παραπομπές σε σχετικά σημεία του διδακτικού υλικού.

Συμβολισμός: Στα παρακάτω, $M_n(\mathbb{R})$ συμβολίζει το σύνολο των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{R}$.

*Οι παρακάτω λύσεις είναι ενδεικτικές καθώς πολλά ερωτήματα αντιμετωπίζονται με διάφορους τρόπους. Κάθε σωστή λύση που έχει τεκμηριωθεί πλήρως θεωρείται αποδεκτή.*

**Άσκηση 1** (10 μον)

*Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό* $z=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**α)** (5 μον) *Βρείτε την τριγωνομετρική μορφή του* $z$.

**β)** (5 μον) *Δείξτε ότι* $z^8=1$ *και υπολογίστε την τιμή της παράστασης* $1+z+z^2+...+z^{79}$. (Βλ. ΕΔΥ, Κεφ1, άσκηση9).

**Λύση**

α) Παρατηρούμε ότι το μέτρο του $z=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ είναι

$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}}=1$. Αν $\theta$ είναι το πρωτεύον όρισμα του $z$, τότε

έχουμε $0\le\theta<2\pi$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Άρα $\theta=\frac{7\pi}{4}$ και η

τριγωνομετρική μορφή του $z$ είναι $z=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}$.

β) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του De Moivre, έχουμε

$z^8=\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)^8=\cos\left(8\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(8\frac{7\pi}{4}\right)=\cos(14\pi)+i\sin(14\pi)=1.$

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα και τον τύπο που δίνει το άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου, έχουμε

$$1+z+z^2+...+z^{79}=\frac{z^{80}-1}{z-1}=\frac{{z^8}^{10}-1}{z-1}=\frac{1^{10}-1}{z-1}=0.$$

**Άσκηση 2** (10 μον)

*Έστω* $a\in\mathbb{R}$. *Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα*

$$\begin{aligned} x+y+z+w&=1\\ 2x-y+z-w&=a\\ 4x+y+3z+w&=5. \end{aligned}$$

*Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss για να βρείτε όλες τις τιμές του* $a$, *τέτοιες ώστε το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις, μοναδική λύση ή καμιά λύση. Στην περίπτωση που το σύστημα είναι συμβιβαστό, βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα του συστήματος και τις λύσεις του συστήματος.* (Βλ. ΕΔΥ, Κεφ.2 , σελ 15-16, και ΣΕΥ, Πίνακες, σελ 36-39).

**Λύση**

Εφαρμόζοντας την απαλοιφή Gauss στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος έχουμε

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & a \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & a-2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 4\Gamma_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & a-2 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3-a \end{array}\right).$$

Από την τελευταία γραμμή του τελευταίου πίνακα παρατηρούμε ότι το σύστημα είναι ασυμβίβαστο αν $3-a \neq 0$, δηλαδή αν $a \neq 3$.

Έστω ότι $a=3$. Συνεχίζοντας την απαλοιφή Gauss έχουμε

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to (-\frac{1}{3})\Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή (σημειώνονται οι οδηγοί). Τα σύστημα που αντιστοιχεί σε αυτόν είναι

$$x + \frac{2}{3}z = \frac{4}{3}$$

$$y + \frac{1}{3}z + w = -\frac{1}{3}.$$

Αυτό έχει τις λύσεις

$$(x,y,z,w) = (-\frac{2}{3}z + \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}z - w - \frac{1}{3}, z, w), \text{ όπου } z, w \in \mathbb{R}.$$

Τελικά το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν $a=3$. Στην περίπτωση αυτή έχει άπειρες λύσεις που δίνονται από τον παραπάνω τύπο. Δεν υπάρχει $a$ για το οποίο να έχουμε μοναδική λύση.

**Άσκηση 3** (25 μον)

**α)** (5 μον) *Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, δείξτε ότι*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} -2^n + 2 & -2^n + 1 \\ 2^{n+1} - 2 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$$

*για κάθε θετικό ακέραιο* $n$. (Για τη μαθηματική επαγωγή, βλ. ΣΕΥ, Σύνολα Αριθμών, εδάφιο 1.8).

**β)** (10 μον) *Βρείτε όλες τις τιμές του* $a \in \mathbb{R}$, *έτσι ώστε ο πίνακας* $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *να είναι αντιστρέψιμος. Για τις τιμές αυτές, υπολογίστε τον* $A^{-1}$. (Βλ. ΕΔΥ, Κεφ4, άσκηση5).

**γ)** (5 μον) *Χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις πράξεις γραμμών ή στηλών, υπολογίστε την ορίζουσα*

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 11 \\ 9 & 11 & 13 & 15 \\ a & b & c & d \\ 17 & 19 & 21 & 23 \end{pmatrix},$$

*όπου* $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. (Βλ. ΕΔΥ, Κεφ4, άσκηση2).

**δ)** (5 μον) Έστω $A=(a_{ij}) \in M_4(\mathbb{R})$. Υπολογίστε τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα $AA^T$ (δηλαδή τα στοιχεία του $AA^T$ στις θέσεις $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)$). Στη συνέχεια, δείξτε ότι αν $AA^T=0$, τότε $A=0$.

**Λύση**

α) Η αποδεικτέα σχέση ισχύει για $n=1$ καθώς $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^1+2 & -2^1+1 \\ 2^2-2 & 2^2-1 \end{pmatrix}$.

Έστω ότι ισχύει

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} -2^n+2 & -2^n+1 \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}$$

για κάποιο θετικό ακέραιο $n$. Τότε ισχύει και για τον επόμενο διότι,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^n+2 & -2^n+1 \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2(-2^n+1) & -(-2^n+2)+3(-2^n+1) \\ 2(2^{n+1}-1) & -(2^{n+1}-2)+3(2^{n+1}-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^{n+1}+2 & -2^{n+1}+1 \\ 2^{n+2}-2 & 2^{n+2}-1 \end{pmatrix}.$$

Άρα το ζητούμενο αποδείχθηκε επαγωγικά και η σχέση

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} -2^n+2 & -2^n+1 \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}$$

ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο $n$.

β) Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς την πρώτη στήλη, έχουμε

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 2 & a \end{vmatrix} = -2-a+a^2.$$

Παρατηρούμε ότι

$$a^2-a-2=0 \Leftrightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2-4(-2)}}{2} \Leftrightarrow a = 2,-1.$$

Άρα ο $A$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $a \in \mathbb{R}-\{2,-1\}$.

Έστω ότι $a \in \mathbb{R}-\{2,-1\}$. Οι ελάσσονες ορίζουσες του είναι:

$$M_{11}=\begin{vmatrix}2 & a\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2-a, M_{12}=\begin{vmatrix}0 & a\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-a, M_{13}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix}a & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-a, M_{22}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1, M_{23}=\begin{vmatrix}1 & a\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1-a$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}a & 0\\ 2 & a\end{vmatrix}=a^2, M_{32}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & a\end{vmatrix}=a, M_{33}=\begin{vmatrix}1 & a\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2.$$

Υπολογίζουμε τον πίνακα των αλγεβρικών συμπληρωμάτων του πίνακα A που έχει ως $ij$-στοιχείο την ελάσσονα ορίζουσα του $ij$-στοιχείου του πίνακα A πολλαπλασιασμένη επί $(-1)^{i+j}$ δηλαδή

$$C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a-2 & a & -2\\ a & -1 & a-1\\ a^2 & -a & 2\end{pmatrix}$$

όπου $c_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Ο ανάστροφος του πίνακα των αλγεβρικών συμπληρωμάτων ονομάζεται προσαρτημένος πίνακας του A και συμβολίζεται ως $adj(A)$.

$$adj(A)=C^T=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{21} & c_{31}\\ c_{12} & c_{22} & c_{32}\\ c_{13} & c_{23} & c_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a-2 & a & a^2\\ a & -1 & -a\\ -2 & a-1 & 2\end{pmatrix}.$$

Ο αντίστροφος δίνεται από τον τύπο:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}adj(A)$$

Αντικαθιστώντας και υπολογίζοντας τις παραστάσεις $(-1)^{i+j}M_{ij}$ βρίσκουμε

$$A^{-1}=\frac{1}{a^2-a-2}\begin{pmatrix}-a-2 & a & a^2\\ a & -1 & -a\\ -2 & a-1 & 2\end{pmatrix}.$$

γ) Έχουμε διαδοχικά

$$\det\begin{pmatrix}5 & 7 & 9 & 11\\ 9 & 11 & 13 & 15\\ a & b & c & d\\ 17 & 19 & 21 & 23\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 7 & 9 & 11\\ 9 & 11 & 13 & 15\\ a & b & c & d\\ 17 & 19 & 21 & 23\end{vmatrix}\overset{\Gamma_2=\Gamma_2-\Gamma_1}{=}\begin{vmatrix}5 & 7 & 9 & 11\\ 4 & 4 & 4 & 4\\ a & b & c & d\\ 17 & 19 & 21 & 23\end{vmatrix}\overset{\Gamma_4=\Gamma_4-\Gamma_1}{=}$$

$$=\begin{vmatrix}5 & 7 & 9 & 11\\ 4 & 4 & 4 & 4\\ a & b & c & d\\ 12 & 12 & 12 & 12\end{vmatrix}\overset{\Gamma_4=\Gamma_4-3\Gamma_2}{=}\begin{vmatrix}5 & 7 & 9 & 11\\ 4 & 4 & 4 & 4\\ a & b & c & d\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}.$$

Άρα

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 9 & 11 \\ 9 & 11 & 13 & 15 \\ a & b & c & d \\ 17 & 19 & 21 & 23 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 9 & 11 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

γιατί μια γραμμή του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 11 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι μηδενική.

δ) Από τον ορισμό του ανάστροφου πίνακα έχουμε $A^T = (b_{ij})$ , όπου $b_{ij} = a_{ji}$ για κάθε $i, j = 1,...,4$. Η $i$-γραμμή του $A$ είναι η

$$a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3} \quad a_{i4}$$

και η $i$-στήλη του $A^T$ είναι η

$$\begin{matrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ a_{i4} \end{matrix}.$$

Από τον ορισμό του γινομένου πινάκων έχουμε ότι για κάθε $i = 1,...,4$, το στοιχείο του $AA^T$ στη θέση $(i,i)$ είναι το

$$c_{ii} = a_{i1}a_{i1} + a_{i2}a_{i2} + a_{i3}a_{i3} + a_{i4}a_{i4} = a_{i1}{}^2 + a_{i2}{}^2 + a_{i3}{}^2 + a_{i4}{}^2.$$

Έστω ότι $AA^T = 0$. Τότε κάθε στοιχείο του $AA^T$ είναι 0 και ειδικά κάθε διαγώνιο στοιχείο είναι 0. Δηλαδή, για κάθε $i = 1,...,4$ έχουμε

$$a_{i1}{}^2 + a_{i2}{}^2 + a_{i3}{}^2 + a_{i4}{}^2 = 0.$$

Επειδή οι $a_{i1}, a_{l2}, a_{i3}, a_{i4}$ είναι πραγματικοί αριθμοί, παίρνουμε $a_{i1} = a_{i2} = a_{i3} = a_{i4} = 0$ για κάθε $i = 1,...,4$, δηλαδή $A = 0$.

**Άσκηση 4** (20 μον)

**α)** (10 μον) *Εξετάστε ποια από τα σύνολα*

$$\left\{\left(x, 2y, |x|\right) \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}, \quad \left\{(x, 2y, 3x+4y) \middle| x, y \in \mathbb{R}\right\}$$

*είναι υπόχωροι του* $\mathbb{R}^3$. *Σε περίπτωση που κάποιο σύνολο είναι υπόχωρος του* $\mathbb{R}^3$, *βρείτε μια βάση και τη διάστασή του.*

**β)** (10 μον) *Εξετάστε ποια από τα σύνολα*

$$\{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 2\}, \quad \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a + d = 2b + 3c \right\}$$

*είναι υπόχωροι του* $M_2(\mathbb{R})$. *Σε περίπτωση που κάποιο σύνολο είναι υπόχωρος του* $M_2(\mathbb{R})$, *βρείτε μια βάση και τη διάστασή του.*

**Λύση**

α) Το σύνολο $\left\{\left(x, 2y, |x|\right) \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}$ δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Για παράδειγμα, ενώ $(1,2,1) \in \quad x, 2y, |x| \ \mid x, y \in \mathbb{R}$ , έχουμε

$$-(1,2,1)=(-1,-2,-1)\notin \{(x,2y,|x|)\mid x,y\in\mathbb{R}\}.$$

Για το δεύτερο σύνολο παρατηρούμε ότι

$$(x,2y,3x+4y)=(x,0,3x)+(0,2y,4y)=x(1,0,3)+y(0,2,4).$$

Συνεπώς το σύνολο αυτό είναι η γραμμική θήκη στο $\mathbb{R}^3$ των διανυσμάτων $(1,0,3),(0,2,4)$, οπότε είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Τα $(1,0,3),(0,2,4)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, γιατί αν

$$\lambda(1,0,3)+\mu(0,2,4)=(0,0,0),\text{ όπου } \lambda,\mu\in\mathbb{R},$$

τότε $(\lambda,2\mu,3\lambda+4\mu)=(0,0,0)\Rightarrow \lambda=2\mu=3\lambda+4\mu=0\Rightarrow \lambda=\mu=0.$ Τα $(1,0,3),(0,2,4)$ παράγουν το διανυσματικό χώρο $\{(x,2y,3x+4y)|x,y\in\mathbb{R}\}$ και είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα αποτελούν βάση του $\{(x,2y,3x+4y)|x,y\in\mathbb{R}\}$ και η διάστασή του είναι 2.

β) Το σύνολο $\{A\in M_2(\mathbb{R})\,|\det A=2\}$ δεν είναι υπόχωρος του $M_2(\mathbb{R})$ αφού δεν περιέχει το μηδενικό πίνακα.

Έστω $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$ με $a+d=2b+3c$. Τότε $d=-a+2b+3c$ και

$$A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & -a+2b+3c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & -a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & b\\ 0 & 2b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0\\ c & 3c\end{pmatrix}=$$

$$=a\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Δηλαδή το σύνολο

$$V=\left\{A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})\,|\,a+d=2b+3c\right\}$$

είναι η γραμμική θήκη στο $M_2(\mathbb{R})$ των στοιχείων

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

και άρα είναι διανυσματικός υπόχωρος του $M_2(\mathbb{R})$. Τα στοιχεία αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα, γιατί αν

$$\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\text{ όπου } \lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R},$$

τότε

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0\\ 0 & -\lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \mu\\ 0 & 2\mu\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0\\ \nu & 3\nu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} \lambda & \mu\\ \nu & -\lambda+2\mu+3\nu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\lambda=\mu=\nu=0.$$

Τα στοιχεία $\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ παράγουν το διανυσματικό χώρο $V$ και είναι γραμμικά ανεξάρτητα, δηλαδή αποτελούν μια βάση του $V$. Άρα $\dim V=3$.

**Άσκηση 5** (20 μον)

**α)** (10 μον) *Αφού δικαιολογήσετε γιατί τα διανύσματα*

$$(1,2,0,3),(0,3,-1,2),(0,0,1,0),(0,0,0,1)$$

*αποτελούν μια βάση του* $\mathbb{R}^4$*, παραστήστε το* $(1,2,3,4)$ *ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων αυτών.*

**β)** (10 μον) *Έστω U ο διανυσματικός υπόχωρος του* $\mathbb{R}^4$ *που παράγεται από τα διανύσματα (1,2,0,3), (-2,5,1,0), (5,1,-5,9) και (0,3,-1,2). Βρείτε τη διάσταση και μια βάση* $B$ *του* $U$ . (Βλ. ΕΔΥ, Κεφ7, άσκηση 6).

**Λύση**

α) Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα $(1,2,0,3),(0,3,-1,2),(0,0,1,0),(0,0,0,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αφού ο πίνακας που έχει γραμμές αυτά,

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{3} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix},$$

είναι σε κλιμακωτή μορφή (σημειώνονται οι οδηγοί). Επειδή το πλήθος τους είναι $4=\dim\mathbb{R}^4$, τα διανύσματα αυτά αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^4$.

Η γραμμική ανεξαρτησία μπορεί να αποδειχθεί και με τη χρήση του ορισμού:

Έστω ότι $\lambda,\mu,\nu,\xi\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$\lambda(1,2,0,3)+\mu(0,3,-1,2)+\nu(0,0,1,0)+\xi(0,0,0,1)=(0,0,0,0)$$

Η τελευταία ισότητα δίνει

$$(\lambda,2\lambda+3\mu,-\mu+\nu,3\lambda+2\mu+\xi)=(0,0,0,0)\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda=0 \\ 2\lambda+3\mu=0 \\ -\mu+\nu=0 \\ 3\lambda+2\mu+\xi=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=0 \\ \mu=0 \\ \nu=0 \\ \xi=0 \end{cases}$$

Οπότε τα διανύσματα $(1,2,0,3),(0,3,-1,2),(0,0,1,0),(0,0,0,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Επειδή τα διανύσματα αυτά αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^4$ κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^4$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός τους οπότε, ξέρουμε ότι υπάρχουν $\lambda,\mu,\nu,\xi\in\mathbb{R}$ με

$$(1,2,3,4)=\lambda(1,2,0,3)+\mu(0,3,-1,2)+\nu(0,0,1,0)+\xi(0,0,0,1).$$

Η τελευταία ισότητα δίνει

$$(1,2,3,4)=(\lambda,2\lambda+3\mu,-\mu+\nu,3\lambda+2\mu+\xi)\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1=\lambda \\ 2=2\lambda+3\mu \\ 3=-\mu+\nu \\ 4=3\lambda+2\mu+\xi. \end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $\lambda=1,\mu=0,\nu=3,\xi=1.$

β) Θα βρούμε μια κλιμακωτή μορφή του πίνακα που έχει στήλες τα δοσμένα διανύσματα. Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4\to\Gamma_4-3\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2-2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 6 & -6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2\leftrightarrow\Gamma_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&5&0\\0&1&-5&-1\\0&9&-9&3\\0&6&-6&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\Gamma_4\to\Gamma_4/2]{\Gamma_3\to\Gamma_3/3}\begin{pmatrix}1&-2&5&0\\0&1&-5&-1\\0&3&-3&1\\0&3&-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\Gamma_4\to\Gamma_4-3\Gamma_2]{\Gamma_3\to\Gamma_3-3\Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&5&0\\0&1&-5&-1\\0&0&12&4\\0&0&12&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_4\to\Gamma_4-\Gamma_3}\begin{pmatrix}\boxed{1}&-2&5&0\\0&\boxed{1}&-5&-1\\0&0&\boxed{12}&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Επειδή η $1^{\eta}, 2^{\eta}$ και τρίτη στήλη του τελικού πίνακα περιέχουν μη μηδενικά οδηγά στοιχεία η $1^{\eta}, 2^{\eta}$ και τρίτη στήλη του αρχικού πίνακα αποτελούν γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα και διανύσματα βάσης του $U$ , άρα $\dim U = 3$.

Εναλλακτικά, θα βρούμε μια κλιμακωτή μορφή του πίνακα που έχει γραμμές τα δοσμένα διανύσματα. Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{pmatrix}1&2&0&3\\-2&5&1&0\\5&1&-5&9\\0&3&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3-5\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2+2\Gamma_1}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&9&1&6\\0&-9&-5&-6\\0&3&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3+\Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&9&1&6\\0&0&-4&0\\0&3&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\Gamma_2\leftrightarrow\Gamma_4]{\Gamma_2\to\Gamma_2-3\Gamma_4}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&3&-1&2\\0&0&-4&0\\0&0&4&0\end{pmatrix}\xrightarrow[]{\substack{\Gamma_4\to\Gamma_4+\Gamma_3\\ \Gamma_3\to-\frac{1}{4}\Gamma_3}}$$

$$\begin{pmatrix}\boxed{1}&2&0&3\\0&\boxed{3}&-1&2\\0&0&\boxed{1}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή (σημειώνονται οι οδηγοί) και άρα μια βάση του $U$ αποτελούν οι μη μηδενικές γραμμές του, δηλαδή μια βάση του $U$ είναι το σύνολο $B = \{(1,2,0,3),(0,3,-1,2),(0,0,1,0)\}$ . Άρα $\dim U = 3$.

**Άσκηση 6** (15 μον)

*Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες. Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας παρέχοντας σε κάθε περίπτωση ένα αντιπαράδειγμα ή μια απόδειξη.*

**α)** (5 μον) *Για κάθε* $A \in M_2(\mathbb{R})$, *ισχύει* $\det(5A) = 5\det A$.

**β)** (5 μον) *Για κάθε* $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ *τέτοια ώστε* $AB = 0$, *ισχύει* $BA = 0$.

**γ)** (5 μον) *Έστω* $V$ *ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το* $\mathbb{R}$. *Τότε για κάθε* $u, v \in V$ *που είναι γραμμικά ανεξάρτητα, ισχύει ότι τα στοιχεία* $u+2v, 3u-v$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

**Λύση**

α) Λάθος. Για παράδειγμα, έστω $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Τότε $\det(5A)=\det\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=25$ ενώ $5\det A=5\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=5\neq 25$.

β) Λάθος. Για παράδειγμα, έστω $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Τότε $AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ ενώ $BA=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

γ) Σωστό. Έστω $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ με $\lambda(u+2v)+\mu(3u-v)=0$. Τότε

$$(\lambda+3\mu)u+(2\lambda-\mu)v=0.$$

Επειδή τα $u,v$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα παίρνουμε $\lambda+3\mu=2\lambda-\mu=0.$ Εύκολα προκύπτει ότι το τελευταίο σύστημα έχει μοναδική λύση τη $\lambda=\mu=0$. Άρα τα $u+2v, 3u-v$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.