ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 2η

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: 29/11/2010

Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 7/1/2011

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Οι Ασκήσεις της δεύτερης εργασίας αναφέρονται στην ακόλουθη ύλη:
Κεφάλαιο 2 (Διανυσματικοί Χώροι), Παράγραφοι 2.5 - 2.9 και
Κεφάλαια 3, 4, 5
του βιβλίου του ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα» των Μ. Χατζηνικολάου και Γρ. Καμβύσα.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής μπορείτε να συμβουλευθείτε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στη http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm ως εξής:
Εναλλακτικό **Δ**ιδακτικό **Υ**λικό: Κεφάλαια 6-11.
Συνοδευτικό **Ε**κπαιδευτικό **Υ**λικό: Γραμμικές Απεικονίσεις, Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα, Διαγωνοποίηση, Τετραγωνικές Μορφές.

Στις ασκήσεις που ακολουθούν, υπάρχουν βοηθητικές παραπομπές σε σχετικά σημεία του διδακτικού υλικού.

Συμβολισμός: Στα παρακάτω, $M_n(\mathbb{R})$ συμβολίζει το σύνολο των $n\times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{R}$.

Άσκηση 1 (15 μον)

Έστω V ο διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1=(1,2,-2,-1)$, $\boldsymbol{v}_2=(-1,1,0,1)$ και $\boldsymbol{v}_3=(0,2,1,4)$ και U ο διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1=(6,5,-5,-2)$ και $\boldsymbol{u}_2=(6,9,4,-9)$.

i) (5 μον) Βρείτε μία βάση και τη διάσταση καθενός από τους V και U.

ii) (6 μον) Βρείτε μία βάση και τη διάστασή του $V+U$. (Βλ. ΕΔΥ, Κεφ 7, ασκήσεις 12,14).

iii) (2 μον) Βρείτε τη διάσταση του $V\cap U$.

iv) (2 μον) Εξετάστε αν ισχύει $\mathbb{R}^4=V\oplus U$. (Βλ. ΕΔΥ, Κεφ 6, άσκηση 11).

Λύση :

i) Υλοποιώντας τον δεύτερο αλγόριθμο* , τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ τοποθετούνται ως στήλες στον ακόλουθο πίνακα και εφαρμόζουμε τις σημειούμενες γραμμοπράξεις

$$\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&1&2\\-2&0&1\\-1&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3\to 2r_1+r_3\\ r_4\to r_1+r_4}]{r_2\to -2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&2\\0&-2&1\\0&0&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\to 2r_2+3r_3}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&2\\0&0&7\\0&0&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\to \frac{1}{7}r_3}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&2\\0&0&1\\0&0&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4\to -4r_3+r_4}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Επειδή η 1^η,2^η και 3^η στήλη του τελικού πίνακα έχουν μη μηδενικά οδηγά στοιχεία η 1^η,2^η και 3^η στήλη του αρχικού πίνακα αποτελούν γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, οπότε συμπεραίνουμε ότι τα τρία διανύσματα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ αποτελούν μία βάση του $\operatorname{span}\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$. Επιπλέον $V=\operatorname{span}\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$, συνεπώς μία βάση του V είναι $B_V=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$, άρα $\dim V=3$.

Όμοια, αποδεικνύεται ότι τα $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$ αποτελούν μία βάση του $\operatorname{span}\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\}$ και επειδή ο υπόχωρος U παράγεται από τα $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$, μία βάση του U είναι $B_U=\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\}$, άρα $\dim U=2$.

ii) Ο $V+U$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ (αφού V,U είναι υπόχωροί του) και παράγεται από τα πέντε δοσμένα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$. Ακολουθώντας τον ίδιο αλγόριθμο αλγόριθμο έχουμε :

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&6&6\\2&1&2&5&9\\-2&0&1&-5&4\\-1&1&4&-2&-9\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3\to 2r_1+r_3\\ r_4\to r_1+r_4}]{r_2\to -2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&-1&0&6&6\\0&3&2&-7&-3\\0&-2&1&7&16\\0&0&4&4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\to 2r_2+3r_3}\begin{pmatrix}1&-1&0&6&6\\0&3&2&-7&-3\\0&0&7&7&42\\0&0&4&4&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\to \frac{1}{7}r_3}\begin{pmatrix}1&-1&0&6&6\\0&3&2&-7&-3\\0&0&1&1&6\\0&0&4&4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4\to -4r_3+r_4}\begin{pmatrix}1&-1&0&6&6\\0&3&2&-7&-3\\0&0&1&1&6\\0&0&0&0&-27\end{pmatrix}$$

* Βλέπε, βιβλίο ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα», σελ.112.

$$\xrightarrow{r_4 \to -\frac{1}{27} r_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επειδή η $1^η, 2^η, 3^η$ και $5^η$ στήλη του τελικού πίνακα έχουν μη μηδενικά οδηγά στοιχεία η $1^η, 2^η, 3^η$ και $5^η$ στήλη του αρχικού πίνακα αποτελούν γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Έτσι, παραλείποντας το $\boldsymbol{u}_1$ προκύπτει μία βάση, που αποτελείται από τα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_2$. Συνεπώς, μία βάση του $V+U$ είναι $B_{V+U} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_2\}$ με $\dim(V+U) = 4$.

Β΄ τρόπος:

i) Εναλλακτικά, σύμφωνα με τον $1^ο$ αλγόριθμο[†] θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε πίνακες με γραμμές τα διανύσματα.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to -\frac{2}{3} r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/3 & 4 \end{pmatrix}$$

Μία βάση του χώρου V είναι οι μη μηδενικές γραμμές του τελικού πίνακα οπότε $\dim V = 3$.

Όμοια για τον υπόχωρο U

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & -5 & -2 \\ 6 & 9 & 4 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to -r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 6 & 5 & -5 & -2 \\ 0 & 4 & 9 & -7 \end{pmatrix}$$

μία βάση του είναι οι μη μηδενικές γραμμές του τελικού πίνακα οπότε $\dim U = 2$.

ii) Ο $V+U$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ (αφού V, U είναι υπόχωροί του) και παράγεται από τα πέντε δοσμένα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$, ακολουθώντας ίδιο αλγόριθμο θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε πίνακες με γραμμές τα διανύσματα

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & -5 & -2 \\ 6 & 9 & 4 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_4 \to -6r_1 + r_4 \\ r_5 \to -6r_1 + r_5}]{r_2 \to r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & 7 & 4 \\ 0 & -3 & 16 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_5 \to r_2 + r_5]{r_3 \to r_2 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & -7 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 14 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 14 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 \to 7r_2 + r_4]{r_3 \to -3r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & -14 & -24 \\ 0 & 0 & 14 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_5 \to -2r_3 + r_5]{r_4 \to 2r_3 + r_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -27 \end{pmatrix}$$

μία βάση του $V+U$ είναι οι μη μηδενικές γραμμές του τελικού πίνακα οπότε $\dim(V+U) = 4$.

iii) Επειδή $\dim V = 3$, $\dim U = 2$ και $\dim(V+U) = 4$, σύμφωνα με το θεώρημα διάστασης[‡] έχουμε

[†] Βλέπε, βιβλίο ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα», σελ.112.

$$\dim(V \cap U) = \dim V + \dim U - \dim(V+U) = 3+2-4 = 1.$$

iv) Επειδή $\dim(V \cap U) = 1$ είναι φανερό ότι $V \cap U \neq \{\mathbf{0}\}$, άρα δεν ικανοποιείται το (ii) του θεωρήματος 2.5.2, (βλέπε, βιβλίο ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα», σελ 101). Συνεπώς, ο $\mathbb{R}^4$ δεν είναι ευθύ άθροισμα των V, U.

Β΄ τρόπος: Επειδή δεν ισχύει η ισότητα $\dim \mathbb{R}^4 = \dim V + \dim U$, (αφού $4 = \dim \mathbb{R}^4 \neq 3+2$), σύμφωνα με το θεώρημα 2.5.3, (βλέπε, βιβλίο ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα, σελ 102), ο $\mathbb{R}^4 \neq V \oplus U$.

Άσκηση 2 (15 μον)

Έστω τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1 = (1,-1,1)$ και $\boldsymbol{v}_2 = (3,2,-1)$ του χώρου $\mathbb{R}^3$.

i) (5 μον) Να εξετάσετε αν το διάνυσμα $\boldsymbol{w} = (2,1,-1)$ ανήκει στο χώρο $V = \operatorname{span}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$. (Βλ. ΕΔΥ, Κεφ 6, άσκηση 4).

ii) (2 μον) Να υπολογίσετε μία βάση του V.

iii) (5 μον) Αφού πρώτα εξετάσετε την ορθογωνιότητα των $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$, στη συνέχεια να υπολογίσετε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\boldsymbol{v}_3 \in \mathbb{R}^3$, που να είναι ορθογώνιο προς τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1$ και $\boldsymbol{v}_2$.

iv) (3 μον) Να υπολογίσετε μία βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος του V, $V^{\perp}$, ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$.

Λύση:

i) Το διάνυσμα $\boldsymbol{w} = (2,1,-1)$ ανήκει στο χώρο $V = \operatorname{span}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$, όταν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$. Έστω ο γραμμικός συνδυασμός της μορφής $\boldsymbol{w} = \mathrm{x}\boldsymbol{v}_1 + \mathrm{y}\boldsymbol{v}_2$. Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\boldsymbol{w} = \mathrm{x}\boldsymbol{v}_1 + \mathrm{y}\boldsymbol{v}_2 \Rightarrow (2,1,-1) = (\mathrm{x},-\mathrm{x},\mathrm{x}) + (3\mathrm{y},2\mathrm{y},-\mathrm{y}) = (\mathrm{x}+3\mathrm{y}, -\mathrm{x}+2\mathrm{y}, \mathrm{x}-\mathrm{y})$$

Από όπου καταλήγουμε στο σύστημα:

$$\begin{aligned} \mathrm{x}+3\mathrm{y} &= 2 \\ -\mathrm{x}+2\mathrm{y} &= 1 \\ \mathrm{x}-\mathrm{y} &= -1 \end{aligned}$$

Για το παραπάνω γραμμικό σύστημα, αν εφαρμόσουμε κατάλληλες γραμμοπράξεις, θα έχουμε διαδοχικά:

$$\left(A \;\middle|\; \boldsymbol{w}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 + r_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \to \frac{4}{5}r_2 + r_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -3/5 \end{array}\right)$$

Από την τελευταία μορφή του πίνακα είναι φανερό ότι το σύστημα δεν έχει λύση, συνεπώς δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x, y τέτοιοι ώστε να ισχύει η σχέση $\boldsymbol{w} = \mathrm{x}\boldsymbol{v}_1 + \mathrm{y}\boldsymbol{v}_2$. Άρα το διάνυσμα $\boldsymbol{w}$ δεν ανήκει στο χώρο $V = \operatorname{span}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$.

Β΄ τρόπος: Εναλλακτικά θεωρώ την ορίζουσα του πίνακα με στήλες τα τρία αυτά διανύσματα.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \underset{r_3 \to r_3 - r_1}{\overset{r_2 \to r_2 + r_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & -3 \end{vmatrix} \overset{r_3 \to \frac{4}{5}r_2 + r_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -3/5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -3 \neq 0$$

‡ Βλέπε, βιβλίο ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα», σελ.100, Θεώρημα 2.5.1.

Επειδή η ορίζουσα είναι μη μηδενική, τα τρία διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα και το $\boldsymbol{w}$ δεν ανήκει στον χώρο που παράγουν τα άλλα δύο (αφού δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός τους).

ii) Τα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αφού από το ερώτημα (i) είναι φανερό ότι $rank(A) = 2$. Συνεπώς μία βάση του $V = \text{span}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ είναι $B_V = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ και επιπλέον $\dim V = 2$.

iii) Δύο διανύσματα είναι ορθογώνια αν έχουν εσωτερικό γινόμενο ίσο με το μηδέν. Εδώ διαπιστώνουμε ότι:

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 0,$$

άρα τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1$ και $\boldsymbol{v}_2$ είναι ορθογώνια.

Θεωρούμε το τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{v}_3 = (x, y, z)$ του χώρου $\mathbb{R}^3$. Για να είναι το $\boldsymbol{v}_3$ ορθογώνιο προς τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{matrix} \boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0 \\ \boldsymbol{v}_3 \cdot \boldsymbol{v}_2 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Για το ομογενές σύστημα έχουμε:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to -3r_1 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Από όπου προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα:

$$\left.\begin{matrix} x - y + z = 0 \\ 5y - 4z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x = -z/5 \\ y = 4z/5 \end{matrix}$$

Άρα το ζητούμενο διάνυσμα είναι της μορφής:

$$\boldsymbol{v}_3 = (x, y, z) = (-\frac{1}{5}z, \frac{4}{5}z, z), \ z \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

iv) Συνδυάζοντας τα παραπάνω ερωτήματα (ii)-(iii) και τον Ορισμό του ορθογωνίου συμπληρώματος (βλ. βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, σελ 161) έχουμε ότι $V^\perp = \text{span}\{\boldsymbol{v}_3\}$. Προφανώς $\dim V^\perp = 1$.

Β΄ τρόπος: Επειδή ο $V = \text{span}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, εφαρμόζοντας το θεώρημα 3.5.3, (βλ. βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, σελ. 162), καταλήγουμε $\mathbb{R}^3 = V \oplus V^\perp$. Συνδυάζοντας την τελευταία ισότητα με το θεώρημα 2.5.3 (βλ. βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, σελ 102) έχουμε

$$\dim V^\perp = \dim \mathbb{R}^3 - \dim V = 3 - 2 = 1.$$

Άσκηση 3 (10μον)

Έστω τα διανύσματα $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ και $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ και ένα εσωτερικό γινόμενο στο χώρο $\mathbb{R}^2$ το οποίο ορίζεται από τη σχέση :

$$\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y} = x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + 10 x_2 y_2 \qquad (1)$$

Να υπολογίσετε τον πίνακα αναπαράστασης του εσωτερικού γινομένου (ως προς την κανονική βάση). Να επιβεβαιώσετε ότι ο πίνακας αυτός είναι θετικά ορισμένος (που ισχύει εφόσον είναι πίνακας εσωτερικού γινομένου).

Λύση:

Αν θεωρήσουμε την κανονική βάση $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ του χώρου $\mathbb{R}^2$, ο πίνακας αναπαράστασης[§] του εσωτερικού γινομένου είναι

[§] Βλέπε σχέση (45) της παραγράφου 3.7 στο βιβλίο ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα», σελ. 178.

$$A=\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1\circ\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1\circ\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_2\circ\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\circ\boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix},$$

όπου $\boldsymbol{e}_i\circ\boldsymbol{e}_j$ συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j$, όπως αυτό ορίζεται στην (1). Εξαιτίας της αντιμεταθετικής ιδιότητας (I_2) του εσωτερικού γινομένου, αρκεί να υπολογισθούν τα $\boldsymbol{e}_i\circ\boldsymbol{e}_j$, για τα οποία ισχύει $\boldsymbol{e}_i\circ\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}_j\circ\boldsymbol{e}_i$. Έτσι έχουμε

$$\boldsymbol{e}_1\circ\boldsymbol{e}_1=(1,0)\circ(1,0)=1,$$
$$\boldsymbol{e}_1\circ\boldsymbol{e}_2=(1,0)\circ(0,1)=-3=\boldsymbol{e}_2\circ\boldsymbol{e}_1,$$
$$\boldsymbol{e}_2\circ\boldsymbol{e}_2=(0,1)\circ(0,1)=10,$$

οπότε

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

Ο συμμετρικός πίνακας A του εσωτερικού γινομένου είναι θετικά ορισμένος, διότι σύμφωνα με το Θεώρημα 3.7.2**

$$\det[1]=1>0 \quad\text{και}\quad \det A=\det\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}=10-9=1>0.$$

Για την επόμενη άσκηση μπορείτε να συμβουλευθείτε τα Παραδείγματα 1,6 σελ 216, 228 του βιβλίου, αντίστοιχα. Επίσης μπορείτε να συμβουλευθείτε στο Κεφ 8 από το ΕΔΥ τις Ασκήσεις 1, 2, 3, 6,7 και το κεφάλαιο Γραμμικές Απεικονίσεις από το ΣΕΥ, το Παράδειγμα 2 σελ. 21, τα Παραδείγματα 1-4 σελ 24-27 και τα Παραδείγματα 1-4, σελ 30-34.

Άσκηση 4 (20 μον)

α) Να εξετάσετε ποιες από τις ακόλουθες απεικονίσεις είναι γραμμικές :

i) (3 μον) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, με $f(x,y,z)=(x+y,3x+yz,x-2y+4z)$

ii) (3 μον) $h:M_3(\mathbb{R})\to M_3(\mathbb{R})$, με $h(X)=AX-XA$, για έναν τυχόν $A\in M_3(\mathbb{R})$

β) Έστω $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση που ορίζεται

$$f(1,0,0)=(0,2,1),\quad f(0,1,0)=(1,1,4) \text{ και } f(0,0,1)=(-1,-2,-8)$$

i) (5 μον) Να βρείτε τον τύπο της f και να γράψετε τον πίνακα αναπαράστασης της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

ii) (3 μον) Βρείτε μία βάση και τη διάσταση της εικόνας της f.

iii) (3 μον) Βρείτε μία βάση και τη διάσταση του πυρήνα της f.

iv) (3 μον) Να ορίσετε την απεικόνιση f^{-1}, αν υπάρχει.

Λύση:

α) i) Η f δεν είναι γραμμική. Για παράδειγμα,

$$f(0,0,0)=(0,0,0),\quad f(0,1,-1)=(1,-1,-6)\ ,\quad f(0,-1,1)=(-1,-1,6)$$

Αν ήταν γραμμική έπρεπε να ισχύει $f(0,1,-1)+f(0,-1,1)=f(0,0,0)$. Όμως,

$$f(0,1,-1)+f(0,-1,1)=(1,-1,-6)+(-1,-1,6)=(0,-2,0)\neq f(0,0,0).$$

** Βλέπε, βιβλίο ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα», σελ. 180.

ii) Η h είναι γραμμική, επειδή για κάθε $k,\lambda \in \mathbb{R}$ και $X,Y \in M_3(\mathbb{R})$ επαληθεύεται η ισότητα (3) της Παρατήρησης 2 του Ορισμού 4.1.1 (βλ. βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, σελ. 192), διότι ισχύει:

$$\begin{aligned} h\left(\kappa X + \lambda Y\right) &= A(\kappa X + \lambda Y) - (\kappa X + \lambda Y)A \\ &= \kappa AX + \lambda AY - \kappa XA - \lambda YA = \kappa(AX - XA) + \lambda(AY - YA) \\ &= \kappa h(X) + \lambda h(Y) \end{aligned}$$

β)i) Θεωρούμε τα διανύσματα της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0), \quad \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0), \quad \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$$

οπότε ένα τυχαίο διάνυσμα $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ γράφεται : $(x,y,z) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$. Επειδή η f είναι γραμμική απεικόνιση για κάθε $x,y,z \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x,y,z) = f(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3) = xf(\boldsymbol{e}_1) + yf(\boldsymbol{e}_2) + zf(\boldsymbol{e}_3) \qquad (1)$$

Οπότε αντικαθιστώντας στην (1) τις δοθείσες εικόνες της f έχουμε :

$$f(x,y,z) = x(0,2,1) + y(1,1,4) + z(-1,-2,-8) = (y-z, 2x+y-2z, x+4y-8z)$$

Ο πίνακας αναπαράστασης της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα $f(\boldsymbol{e}_1) = (0,2,1)$, $f(\boldsymbol{e}_2) = (1,1,4)$ και $f(\boldsymbol{e}_3) = (-1,-2,-8)$, δηλαδή είναι:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

ii) Από την (1) είναι φανερό ότι $\operatorname{Im} f = \operatorname{span}\{f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), f(\boldsymbol{e}_3)\}$ και επειδή $\det A = 7 \neq 0$, τα διανύσματα $f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), f(\boldsymbol{e}_3)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα[††]. Συνεπώς, αυτά τα διανύσματα αποτελούν μία βάση της $\operatorname{Im} f$ με $\dim(\operatorname{Im} f) = 3$.

iii) Επειδή η διάσταση του $\mathbb{R}^3$ είναι 3, από την ισότητα

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) \Rightarrow \dim(\ker f) = 0,$$

άρα $\ker f = \{\mathbf{0}\}$.

Β΄ τρόπος: Για να βρούμε μία βάση του $\ker f$, πρέπει να λύσουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{aligned} y - z &= 0 \\ 2x + y - 2z &= 0 \\ x + 4y - 8z &= 0 \end{aligned}$$

Κάνοντας γραμμοπράξεις έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to -2r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \to -\frac{1}{7}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to -r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Από την κλιμακωτή μορφή του παραπάνω πίνακα είναι φανερό ότι η μοναδική λύση του συστήματος είναι η μηδενική, δηλαδή , $\ker f = \{\mathbf{0}\}$, άρα $\dim(\ker f) = 0$.

iv) Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.3.1 (βλ. βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, σελ. 219) και το αποτέλεσμα του ερωτήματος (iii) συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση f είναι μη

[††] Βλέπε, βιβλίο ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα», σελ 113, Θεώρημα 2.6.6 και σελ. 114, Παρατήρηση 1.

ιδιάζουσα και από την ισοδυναμία (β)-(δ) που παρουσιάζεται στο Θεώρημα 4.3.7 (βλ. βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, σελ. 221) είναι φανερό ότι η απεικόνιση είναι αντιστρέψιμη. Άρα υπάρχει η απεικόνιση f^{-1} και μπορούμε να υπολογίσουμε τον τύπο της f^{-1} αν γνωρίζουμε τον αντίστροφο πίνακα του πίνακα αναπαράστασης της f.

Ο αντίστροφος πίνακας του A υπολογίζεται (ένας τρόπος υπολογισμού προτείνεται στην επόμενη άσκηση 5 ερώτημα (iv)) ότι είναι

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 14 & 1 & -2 \\ 7 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

οπότε $A^{-1}\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{4}{7}y - \frac{1}{7}z & 2x + \frac{1}{7}y - \frac{2}{7}z & x + \frac{1}{7}y - \frac{2}{7}z \end{pmatrix}^T$.

Επομένως, η f^{-1} δίνεται από τον τύπο

$$f^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{4}{7}y - \frac{1}{7}z,\ 2x + \frac{1}{7}y - \frac{2}{7}z,\ x + \frac{1}{7}y - \frac{2}{7}z \right).$$

Για τις επόμενες ασκήσεις της εργασίας μπορείτε να συμβουλευθείτε από το ΕΔΥ τα κεφάλαια 9,10, και από το ΣΕΥ το κεφάλαιο Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα, και το κεφάλαιο Διαγωνοποίηση.

Άσκηση 5 (20 μον)

Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

i) (8 μον) Να υπολογισθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

ii) (4 μον) Ο πίνακας A αντιστρέφεται; Ποιες είναι οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματά του A^{-1};

iii) (4 μον) Ο πίνακας A διαγωνοποιείται; Αν ναι, να υπολογισθούν ένας πίνακας P και ένας διαγώνιος πίνακας D, τέτοιοι ώστε να ισχύει $A = PDP^{-1}$.

iv) (4 μον) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Cayley-Hamilton, να υπολογισθεί ο πίνακας A^{-1}.

Λύση :

i) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A δίνεται από τη σχέση $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ και είναι

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4 & -8-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - 7\lambda^2 + \lambda + 7 = .$$

$$= -\lambda^2(\lambda+7) + (\lambda+7) = -\left(\lambda^2 - 1\right)(\lambda+7) = -(\lambda+7)(\lambda+1)(\lambda-1)$$

Επομένως οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\chi_A(\lambda) = 0$, άρα

$$\lambda_1 = -7,\ \lambda_2 = -1 \text{ και } \lambda_3 = 1.$$

- Για $\lambda_1=-7$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα προκύπτει από τη λύση του συστήματος $A\boldsymbol{x}=-7\boldsymbol{x}$, όπου $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{(}x \quad y \quad z\boldsymbol{)}^T$, το οποίο καταλήγει στο ομογενές σύστημα :

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 2 & 8 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 7x+y-z=0 \\ 2x+8y-2z=0 \\ x+4y-z=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 7x+y-z=0 \\ x+4y-z=0 \\ x+4y-z=0 \end{array}\right\}$$

από όπου μετά από γραμμοπράξεις καταλήγουμε

$$\left.\begin{array}{r} x+4y-z=0 \\ -27y+6z=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x=\frac{1}{2}y \\ z=\frac{9}{2}y \end{array}\right\}, \text{ με } y\in\mathbb{R}.$$

Κατά συνέπεια, το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1=-7$ είναι

$$V_{\lambda_1}=\left\{(\frac{1}{2}y, y, \frac{9}{2}y) : y\in\mathbb{R}\text{-}\{0\}\right\}=\left\{y(\frac{1}{2},1,\frac{9}{2}) : y\in\mathbb{R}\text{-}\{0\}\right\}$$

Θεωρούμε $\boldsymbol{x}_1=(1,2,9)$ ένα διάνυσμα από το σύνολο V_{λ_1}, ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_1=-7$.

- Για $\lambda_2=-1$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα προκύπτει από τη λύση του συστήματος $A\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}$, όπου $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{(}x \quad y \quad z\boldsymbol{)}^T$, το οποίο καταλήγει στο ομογενές σύστημα :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ 2x+2y-2z=0 \\ x+4y-7z=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ x+y-z=0 \\ x+4y-7z=0 \end{array}\right\}$$

από όπου μετά από γραμμοπράξεις καταλήγουμε

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ y-2z=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x=-z \\ y=2z \end{array}\right\}, \ z\in\mathbb{R}.$$

Κατά συνέπεια, το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2=-1$ είναι

$$V_{\lambda_2}=\{(-z,2z,z) : z\in\mathbb{R}\text{-}\{0\}\}=\{z(-1,2,1) : z\in\mathbb{R}\text{-}\{0\}\}$$

Θεωρούμε $\boldsymbol{x}_2=(-1,2,1)$ ένα διάνυσμα από το σύνολο V_{λ_2}, ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_2=-1$.

- Τέλος, για $\lambda_3=1$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα προκύπτει από τη λύση του ομογενούς συστήματος $A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, δηλαδή:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} -x+y-z=0 \\ 2x \quad -2z=0 \\ x+4y-9z=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} -x+y-z=0 \\ x \quad -z=0 \\ x+4y-9z=0 \end{array}\right\}$$

από όπου μετά από γραμμοπράξεις καταλήγουμε:

$$\left.\begin{array}{r} x \quad -z=0 \\ y-2z=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x=z \\ y=2z \end{array}\right\}, \ z\in\mathbb{R}$$

Κατά συνέπεια, το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_3=1$ είναι

$$V_{\lambda_3}=\{(z,2z,z) : z\in\mathbb{R}\text{-}\{0\}\}=\{z(1,2,1) : z\in\mathbb{R}\text{-}\{0\}\}$$

Θεωρούμε $\boldsymbol{x}_3=(1,2,1)$ ένα διάνυσμα από το σύνολο V_{λ_3}, ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_3=1$.

ii) Εφαρμόζοντας δύο γνωστές ιδιότητες[‡‡] έχουμε:

$$\det A=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=(-7)\cdot(-1)\cdot 1=7\neq 0,$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας A αντιστρέφεται. Επίσης τα χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα A^{-1} είναι:

- Ιδιοτιμή $\lambda_1(A^{-1})=\lambda_1^{-1}=-\dfrac{1}{7}$ με σύνολο ιδιοδιανυσμάτων το V_{λ_1}, (είναι το ίδιο σύνολο με αυτό που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1 του A).
- Ιδιοτιμή $\lambda_2(A^{-1})=\lambda_2^{-1}=-1$ με σύνολο ιδιοδιανυσμάτων το V_{λ_2}.
- Ιδιοτιμή $\lambda_3(A^{-1})=\lambda_3^{-1}=1$ με σύνολο ιδιοδιανυσμάτων το V_{λ_3}.

iii) Είναι γνωστό ότι όταν ένας πίνακας A nxn έχει n διακεκριμένες (διαφορετικές) ιδιοτιμές τότε είναι διαγωνοποιήσιμος[§§], με πίνακα ομοιότητας τον P, ο οποίος κατασκευάζεται με στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Έτσι, θεωρούμε P τον

$$P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 9 & 1 & 1\end{pmatrix} \text{ με αντίστοιχο } D=diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\begin{pmatrix}-7 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Εύκολα επαληθεύεται η σχέση: $A=PDP^{-1}$.

iv) Επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A, είναι $\chi_B(\lambda)=-\lambda^3-7\lambda^2+\lambda+7$, σύμφωνα με το θεώρημα Cayley-Hamilton[***] έχουμε :

$$-A^3-7A^2+A+7I=\mathbb{O}\Rightarrow 7I=A^3+7A^2-A\Rightarrow I=\frac{1}{7}(A^3+7A^2-A)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow AA^{-1}=\frac{1}{7}(A^3+7A^2-A)\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{7}A^{-1}(A^3+7A^2-A)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{7}(A^2+7A-I)=\frac{1}{7}\left(\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 4 & -8\end{pmatrix}^2+7\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 4 & -8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\cdot$$

$$=\frac{1}{7}\left(\begin{pmatrix}1 & -3 & 6\\ 0 & -5 & 12\\ 0 & -27 & 55\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 4 & -8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}0 & 4 & -1\\ 14 & 1 & -2\\ 7 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

Άσκηση 6 (20 μον)

Έστω οι πίνακες $A=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}^T$ και $B=I_3-2AA^T$.

i) (8 μον) Να προσδιοριστούν οι ιδιοτιμές του πίνακα B και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

ii) (8 μον) Να προσδιοριστούν ένας ορθογώνιος πίνακας P και ένας διαγώνιος πίνακας D, τέτοιοι ώστε να ισχύει :

$$B=PDP^T.$$

[‡‡] Βλέπε, βιβλίο ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα» , σελ.281, 287.

[§§] Βλέπε, βιβλίο ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα», σελ.284, Παρατήρηση 1,2.

[***] Βλέπε, βιβλίο ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα», σελ.272.

iii) (4 μον) Να υπολογισθεί ο πίνακας B^{2010} και στη συνέχεια να επαληθευτεί η ισότητα :

$$\frac{9}{2}(B^{2010}+B^{2011})=\begin{pmatrix}5 & -2 & 4\\ -2 & 8 & 2\\ 4 & 2 & 5\end{pmatrix}.$$

Λύση:

i) Αρχικά υπολογίζουμε τον πίνακα B :

$$B=I_3-2AA^T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}\frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{4}{9}\\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9}\\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & -4 & 8\\ -4 & 7 & 4\\ 8 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα B είναι:

$$\chi_B(\lambda)=\det(B-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}\frac{1}{9}-\lambda & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9}\\ -\frac{4}{9} & \frac{7}{9}-\lambda & \frac{4}{9}\\ \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9}-\lambda\end{pmatrix}\underset{C_1\to C_1+C_3}{=}\det\begin{pmatrix}1-\lambda & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9}\\ 0 & \frac{7}{9}-\lambda & \frac{4}{9}\\ 1-\lambda & \frac{4}{9} & \frac{1}{9}-\lambda\end{pmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\det\begin{pmatrix}1 & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9}\\ 0 & \frac{7}{9}-\lambda & \frac{4}{9}\\ 1 & \frac{4}{9} & \frac{1}{9}-\lambda\end{pmatrix}\underset{r_3\to r_3-r_1}{=}(1-\lambda)\det\begin{pmatrix}1 & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9}\\ 0 & \frac{7}{9}-\lambda & \frac{4}{9}\\ 0 & \frac{8}{9} & -\frac{7}{9}-\lambda\end{pmatrix}$$

$$=(1-\lambda)(\lambda^2-\frac{49}{81}-\frac{32}{81})=-(\lambda-1)(\lambda^2-1)=-(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

Επομένως, οι ιδιοτιμές του πίνακα B είναι η λύση της εξίσωσης $\chi_B(\lambda)=0$, άρα

$\lambda_{1,2}=1$ (διπλή ιδιοτιμή) και $\lambda_3=-1$ (απλή ιδιοτιμή).

- Για $\lambda_{1,2}=1$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα προκύπτει από τη λύση του συστήματος $B\boldsymbol{x}=1\boldsymbol{x}$, όπου $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{(}x \quad y \quad z\boldsymbol{)}^T$, το οποίο καταλήγει στο ομογενές σύστημα :

$$\begin{pmatrix} -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{8}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} -8x-4y+8z=0 \\ -4x-2y+4z=0 \\ 8x+4y-8z=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow 2x+y-2z=0 \Leftrightarrow y=-2x+2z$$

όπου $x, z \in \mathbb{R}$.

Κατά συνέπεια, το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_{1,2}=1$ είναι

$$V_{\lambda_{1,2}} = \left\{ (x,-2x+2z,z) \;:\; (x,z)\in\mathbb{R}^2 \text{ - } \{(0,0)\} \right\}$$

$$= \left\{ (x,-2x,0)+(0,2z,z) \;:\; (x,z)\in\mathbb{R}^2 \text{ - } \{(0,0)\} \right\} = \left\{ x(1,-2,0)+z(0,2,1) \;:\; (x,z)\in\mathbb{R}^2 \text{ - } \{(0,0)\} \right\}$$

Θεωρούμε τα διανύσματα $\boldsymbol{w}_1=(1,-2,0)$ και $\boldsymbol{w}_2=(0,2,1)$ από το σύνολο $V_{\lambda_{1,2}}$, ως αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της $\lambda_{1,2}=1$.

- Για $\lambda_3=-1$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα προκύπτει από τη λύση του συστήματος $B\boldsymbol{x}=-1\boldsymbol{x}$, όπου $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{(}x \quad y \quad z\boldsymbol{)}^T$, το οποίο καταλήγει στο ομογενές σύστημα :

$$\begin{pmatrix} \frac{10}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{16}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{4}{9} & \frac{10}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 10x-4y+8z=0 \\ -4x+16y+4z=0 \\ 8x+4y+10z=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 5x-2y+4z=0 \\ x-4y-z=0 \\ 4x+2y+5z=0 \end{matrix}\right\}$$

όπου μετά από γραμμοπράξεις καταλήγουμε $\left.\begin{matrix} x-4y-z=0 \\ 2y+z=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x=2y \\ z=-2y \end{matrix}\right\}$, με $y\in\mathbb{R}$.

Κατά συνέπεια, το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_3=-1$ είναι

$$V_{\lambda_3} = \left\{ (2y,y,-2y) : y\in\mathbb{R}\text{ - }\{0\} \right\} = \left\{ y(2,1,-2) :\; \mathrm{y}\in\mathbb{R}\text{ - }\{0\} \right\}$$

Θεωρούμε $\boldsymbol{w}_3=(2,1,-2)$ ένα διάνυσμα από το σύνολο V_{λ_3}, ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_3=-1$.

ii) Επειδή ισχύει

$$B^T = \left(I_3-2AA^T\right)^T = I_3-2\left(AA^T\right)^T = I_3-2\left(A^T\right)^T A^T = I_3-2AA^T = B\,,$$

ο πίνακας B είναι συμμετρικός, άρα, διαγωνοποιείται από έναν ορθογώνιο πίνακα P [†††] και ισχύει

$$P^{-1}BP = P^TBP = D = diag(1,1,-1)\,.$$

Θεωρούμε τα διανύσματα $\boldsymbol{w}_1=(1,-2,0)$, $\boldsymbol{w}_2=(0,2,1)$ και $\boldsymbol{w}_3=(2,1,-2)$, τα οποία αποτελούν μια βάση $W=\langle \boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3\rangle$ του $\mathbb{R}^3$. Με τη μέθοδο Gram-Schmidt[‡‡‡] ορθοκανονικοποιούμε τη βάση W του $\mathbb{R}^3$ ως εξής:

[†††] Βλέπε, βιβλίο ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα», σελ.295, διαγωνοποίηση συμμετρικών πινάκων.

[‡‡‡] Βλέπε, βιβλίο ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα», σελ.167-168, Θεώρημα 3.6.1.

$\tilde{\boldsymbol{w}}_1 = \boldsymbol{w}_1 = (1,-2,0)$

$\tilde{\boldsymbol{w}}_2 = \boldsymbol{w}_2 - \dfrac{\boldsymbol{w}_2 \cdot \tilde{\boldsymbol{w}}_1}{\| \tilde{\boldsymbol{w}}_1 \|^2} \tilde{\boldsymbol{w}}_1 = (0,2,1) + \dfrac{4}{5}(1,-2,0) = (\dfrac{4}{5}, \dfrac{2}{5}, 1)$

$\tilde{\boldsymbol{w}}_3 = \boldsymbol{w}_3 - \dfrac{\boldsymbol{w}_3 \cdot \tilde{\boldsymbol{w}}_1}{\| \tilde{\boldsymbol{w}}_1 \|^2} \tilde{\boldsymbol{w}}_1 - \dfrac{\boldsymbol{w}_3 \cdot \tilde{\boldsymbol{w}}_2}{\| \tilde{\boldsymbol{w}}_2 \|^2} \tilde{\boldsymbol{w}}_2 = (2,1,-2) + 0(1,-2,0) + 0(\dfrac{4}{5}, \dfrac{2}{5}, 1) = (2,1,-2)$

Κανονικοποιούμε τα $\tilde{\boldsymbol{w}}_1, \tilde{\boldsymbol{w}}_2, \tilde{\boldsymbol{w}}_3$ διαιρώντας το κάθε διάνυσμα με το αντίστοιχο μέτρο του, δηλαδή:

$\hat{\boldsymbol{w}}_1 = \dfrac{\tilde{\boldsymbol{w}}_1}{\| \tilde{\boldsymbol{w}}_1 \|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0)$, $\hat{\boldsymbol{w}}_2 = \dfrac{\tilde{\boldsymbol{w}}_2}{\| \tilde{\boldsymbol{w}}_2 \|} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}(\dfrac{4}{5}, \dfrac{2}{5}, 1)$ και $\hat{\boldsymbol{w}}_3 = \dfrac{\tilde{\boldsymbol{w}}_3}{\| \tilde{\boldsymbol{w}}_3 \|} = \dfrac{1}{3}(2,1,-2)$

Συνεπώς, ο ορθογώνιος πίνακας P που διαγωνοποιεί τον B είναι ο

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{4\sqrt{5}}{15} & \dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{2\sqrt{5}}{15} & \dfrac{1}{3} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{5}}{3} & -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix}, \text{ με αντίστοιχο } \; D = diag(1,1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Με τους παραπάνω πίνακες P, D εύκολα επαληθεύεται η ισότητα $B = PDP^T$.

iii) Από την ισότητα $B = PDP^T$ προκύπτει $B^k = PD^k P^T$ (δείτε ΕΔΥ, Κεφ 10, Εφαρμογή 1, σελ. 6), οπότε για $k = 2010$ έχουμε :

$$B^{2010} = PD^{2010}P^T = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{2010} P^T = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{2010} \end{pmatrix} P^T = PP^T = I$$

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα έχουμε:

$$B^{2011} = B^{2010}B = IB = B$$

Άρα

$$\frac{9}{2}(B^{2010} + B^{2011}) = \frac{9}{2}(I + B) = \frac{9}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{10}{9} & -\dfrac{4}{9} & \dfrac{8}{9} \\ -\dfrac{4}{9} & \dfrac{16}{9} & \dfrac{4}{9} \\ \dfrac{8}{9} & \dfrac{4}{9} & \dfrac{10}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$