ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 3η

Ημερομηνία Αποστολής στο Φοιτητή: 10 Ιανουαρίου 2011

Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 11 Φεβρουαρίου 2011.

Πριν από τη λύση κάθε άσκησης καλό είναι να μελετούνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις από τις παραπομπές στα συγγράμματα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της 3ης εργασίας αναφέρονται στα:

Ενότητα 2 (Συναρτήσεις – Ακολουθίες – Όρια)
Ενότητα 3 (Σειρές) και
Ενότητα 4 (Όριο και συνέχεια συνάρτησης)
του συγγράμματος του ΕΑΠ «Γενικά Μαθηματικά Ι – Τόμος Α' - Λογισμός μιας Μεταβλητής» του Γ. Δάσιου.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής να συμβουλευθείτε επίσης το **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στο http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm ως εξής:

Υλικό Εισαγωγικών και Προαπαιτούμενων Μαθηματικών: Εισαγωγικές Ασκήσεις για τη ΘΕ. Οι λύσεις τους. Εισαγωγικές Έννοιες της ΘΕ, Σύνολα Αριθμών.

Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό: **Λογισμός**
Συναρτήσεις, Ακολουθίες, Σειρές, Όρια και Συνέχεια.

Στόχοι:

Κατανόηση και εμπέδωση των παρακάτω εννοιών:
Συναρτήσεις (έμφαση στην εύρεση των πεδίων ορισμού και τιμών, τη σύνθεση συναρτήσεων, την εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης και στις ιδιότητες 1-1 και επί).
Ακολουθίες (έμφαση στην έννοια της ακολουθίας, στο όριο και τα κριτήρια σύγκλισης ακολουθίας, στις φραγμένες, μονότονες και απειριζόμενες ακολουθίες).
Σειρές (έμφαση στην έννοια της σειράς, στις ειδικές κατηγορίες σειρών και στα κριτήρια σύγκλισης σειρών)
Όριο και συνέχεια συνάρτησης, πλευρικό όριο και πλευρική συνέχεια, μονοτονία συναρτήσεων.

Η πρώτη άσκηση αναφέρεται στις συναρτήσεις (βλέπε βιβλίο Γ. Δάσιου, Λογισμός μιας Μεταβλητής, Ενότητα 2, Παράγραφος 2.1, Υλικό Εισαγωγικών και Προαπαιτούμενων Μαθηματικών Εισαγωγικές Έννοιες της ΘΕ, Παράγραφος 1.2 και Εισαγωγικές Ασκήσεις για τη ΘΕ, ΕΔΥ Κεφάλαιο 1 Εισαγωγικές Έννοιες καθώς επίσης και ΣΕΥ Λογισμός, Συναρτήσεις).

Άσκηση 1. (5+5+5 μονάδες)

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\dfrac{x-3}{x\sqrt{x^2-6x+9}}$, ii) $g(x)=\dfrac{3}{\sqrt{2x}}+\dfrac{5}{\sqrt{4-x^2}}$,

β) Να εξετασθεί εάν η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4x+3}{x-5}$ είναι 1-1. Στη συνέχεια, να υπολογισθεί, αν υπάρχει, η αντίστροφη συνάρτησή της.

γ) Αν $f(x)=\sqrt{x-3}$ και $g(x)=\sqrt{x^2-9}$, να βρεθεί η σύνθεση $g\circ f$.

Λύση.

α)

i) Για να είναι ορισμένη η $f(x)$, πρέπει ο παρονομαστής να είναι διάφορος του 0 και η υπόρριζος ποσότητα $x^2-6x+9\geq 0$. Επομένως, πρέπει $x\sqrt{x^2-6x+9}\neq 0$ και άρα $x\neq 0$ και $x^2-6x+9>0\Rightarrow (x-3)^2>0$, που αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{3\}$. Συνεπώς, το πεδίο ορισμού της $f(x)$ είναι το $D_f=\mathbb{R}-\{0,3\}$.

ii) Για να ορίζεται η $g(x)$ πρέπει οι παρονομαστές των δύο κλασμάτων να είναι διάφοροι του μηδενός και οι υπόρριζες ποσότητες να είναι θετικές. Άρα, θα πρέπει $2x>0$ και $4-x^2>0$, δηλαδή $x>0$ και $-2<x<2$, που συναληθεύουν όταν $0<x<2$. Επομένως $D_g=(0,2)$.

β) Για να είναι ορισμένη η $f(x)$ πρέπει ο παρονομαστής της να μην είναι 0: $x-5\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 5$. Επομένως $D_f=\mathbb{R}-\{5\}$.

Για $x_1,x_2\in D_f$ έχουμε

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \frac{4x_1+3}{x_1-5}=\frac{4x_2+3}{x_2-5}\Leftrightarrow (4x_1+3)(x_2-5)=(4x_2+3)(x_1-5)\Leftrightarrow$$

$$4x_1x_2-20x_1+3x_2-15=4x_1x_2-20x_2+3x_1-15\Leftrightarrow 23x_2=23x_1\Leftrightarrow x_1=x_2.$$

Επομένως η f είναι 1-1 οπότε υπάρχει η αντίστροφη της f^{-1}. Για να βρούμε την αντίστροφη θέτουμε $y=\dfrac{4x+3}{x-5}$ και λύνουμε τη σχέση αυτή ως προς x, $x\in D_f$. Επίσης , θα βρούμε ταυτόχρονα τα y για τα οποία αυτή η λύση υπάρχει. Έχουμε:

$$y=\frac{4x+3}{x-5}\Leftrightarrow y(x-5)=4x+3\Leftrightarrow yx-5y=4x+3\Leftrightarrow x(y-4)=5y+3.$$

Για $y\neq 4$ η τελευταία εξίσωση δίνει $x=\dfrac{5y+3}{y-4}$. Το x θα πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, συνεπώς πρέπει $\dfrac{5y+3}{y-4}\neq 5\Leftrightarrow 5y+3\neq 5y-20\Leftrightarrow 3\neq -20$, το οποίο και ισχύει. Άρα η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $f^{-1}(x)=\dfrac{5x+3}{x-4}$ με πεδίο ορισμού $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}-\{4\}$.

γ) Υπολογίζουμε το πεδίο ορισμού της $f(x)$. Για να ορίζεται η $f(x)$ πρέπει $x-3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 3$. Άρα $D_f=\left[3,+\infty\right)$.

Υπολογίζουμε και το πεδίο τιμών της $f(x)$. Το πεδίο τιμών (ΣΕΥ, Λογισμός, Συναρτήσεις Ορισμός 4.1.5, σελίδα 7), είναι

$f(D_f)=\left\{y\in\mathbb{R} \mid y=\sqrt{x-3} \text{ για κάποιο } x\in D_f\right\}$,

δηλαδή θα περιλαμβάνει όλα τα $y\in\mathbb{R}$ για τα οποία η εξίσωση $y=\sqrt{x-3}$ έχει ως προς x μια τουλάχιστον λύση στο D_f. Οπότε έχουμε

$y=\sqrt{x-3} \overset{x\geq 3}{\Leftrightarrow} y^2=x-3 \Leftrightarrow x=y^2+3$. Δοθέντος επομένως ότι $x\geq 3$ θα πρέπει $y\geq 0$. Άρα $f(D_f)=[0,+\infty)$.

Για τη συνάρτηση $g(x)$ έχουμε: Για να ορίζεται η $g(x)$ πρέπει $x^2-9\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -3$ ή $x\geq 3$. Άρα το πεδίο ορισμού της $g(x)$ είναι $D_g=\left(-\infty,-3\right]\cup\left[3,+\infty\right)$.

Οπότε, το πεδίο ορισμού της σύνθεσης $g\circ f$ θα είναι $D=\left\{x: x\in D_f \text{ τ.ω. } f(x)\in D_g\right\}$, δηλαδή θα περιλαμβάνει τα $x\geq 3$ για τα οποία $\sqrt{x-3}\leq -3$ ή $\sqrt{x-3}\geq 3$. Επειδή για κάθε $x\geq 3$ η ανισότητα $\sqrt{x-3}\leq -3$ είναι αδύνατη, έχουμε

$$\begin{aligned} D&=\left\{x: x\geq 3 \text{ τ.ω. } \sqrt{x-3}\geq 3\right\}=\left\{x: x\geq 3 \text{ τ.ω. } x-3\geq 9\right\}= \\ &=\left\{x: x\geq 3 \text{ τ.ω. } x\geq 12\right\}=[12,+\infty) \end{aligned}.$$

Οπότε το πεδίο ορισμού της σύνθεσης είναι το μη κενό σύνολο $D=\left[12,+\infty\right)$. Άρα η σύνθεση $g\circ f$ ορίζεται και ο τύπος της είναι

$(g\circ f)(x)=g\left(f\left(x\right)\right)=\sqrt{\left[f(x)\right]^2-9}=\sqrt{x-3-9}=\sqrt{x-12}$.

Η δεύτερη και η τρίτη άσκηση αναφέρονται στις ακολουθίες (βλέπε βιβλίο Γ. Δάσιου, Λογισμός μιας Μεταβλητής, Ενότητα 2, Παράγραφοι 2.2-2.4 καθώς επίσης και ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες).

Άσκηση 2 (10 μονάδες)

Να δείξετε ότι η αναδρομική ακολουθία $a_{n+1}=\frac{1}{8}\left(4a_n^2+1\right)$ με $a_1=\frac{1}{4}$ είναι μονότονη, φραγμένη, συγκλίνει και να βρεθεί το όριό της.

Λύση.

Κατ' αρχήν, από τον ορισμό της ακολουθίας, είναι φανερό ότι όλοι οι όροι της είναι θετικοί αριθμοί, δηλαδή $a_n>0$.

Θα δείξουμε επαγωγικά ότι η a_n είναι γνησίως φθίνουσα.

Για $n=1$ ισχύει ότι $a_2<a_1$ γιατί $a_2=\frac{1}{8}\left(4a_1^2+1\right)=\frac{1}{8}\left(4\left(\frac{1}{4}\right)^2+1\right)=\frac{5}{32}<\frac{8}{32}<\frac{1}{4}=a_1$.

Έστω ότι ισχύει για $n=k$, δηλαδή $a_{k+1}<a_k$.

Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n=k+1$, δηλαδή ότι $a_{k+2}<a_{k+1}$.

Επειδή υποθέσαμε ότι ισχύει $a_{k+1}<a_k$, έχουμε:

$a_{k+1} < a_k \Rightarrow a_{k+1}^2 < a_k^2 \Rightarrow \frac{1}{2}a_{k+1}^2 < \frac{1}{2}a_k^2 \Rightarrow \frac{1}{2}a_{k+1}^2 + \frac{1}{8} < \frac{1}{2}a_k^2 + \frac{1}{8} \Rightarrow$
$\frac{1}{8}\left(4a_{k+1}^2 + 1\right) < \frac{1}{8}\left(4a_k^2 + 1\right) \Rightarrow a_{k+2} < a_{k+1}$.
(όπου στην 1η συνεπαγωγή χρησιμοποιήσαμε το ότι $a_n > 0$). Δηλαδή ισχύει $a_{k+2} < a_{k+1}$.

Συνεπώς, για κάθε n, ισχύει $a_{n+1} < a_n$ οπότε η a_n είναι γνησίως φθίνουσα.

Επειδή η a_n είναι γνησίως φθίνουσα έχει ως άνω φράγμα της τον πρώτο της όρο, οπότε $a_n \le \frac{1}{4}$, , για κάθε n. Επιπλέον, $a_n > 0$, οπότε η ακολουθία είναι και κάτω φραγμένη. Άρα η a_n είναι φραγμένη.

Επίσης, αφού είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, συγκλίνει (βλέπε ΣΕΥ, Ακολουθίες, Πρόταση 2.8.6). Αφού συγκλίνει θα έχουμε ότι $\lim a_{n+1} = \lim a_n = x$. Έτσι,

$\lim a_{n+1} = \frac{1}{8}\left(4\left(\lim a_n\right)^2 + 1\right) \Rightarrow x = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{8} \Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 1 = 0$. Οι ρίζες του τριωνύμου είναι $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$. Παρατηρούμε ότι και οι δύο ρίζες είναι μεγαλύτερες από το κάτω φράγμα της ακολουθίας. Όμως η ρίζα $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ είναι μεγαλύτερη από το άνω φράγμα της ακολουθίας, οπότε απορρίπτεται. Επομένως έχουμε $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

Άσκηση 3 (5+5+5+5 μονάδες)

Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:

i) $a_n = \frac{3^n + 2\cdot 6^n + 5^{n+1}}{6^{n+1} - 4^n + 1}$, **ii)** $a_n = b^n\sqrt{n}$, με $|b| < 1$ και $b \ne 0$,

iii) $a_n = \sqrt[3]{n+6} - \sqrt[3]{n+5}$

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$)

iv) $a_n = \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^n$

Λύση.

i) Έχουμε $a_n = \dfrac{\dfrac{3^n + 2\cdot 6^n + 5^{n+1}}{6^n}}{\dfrac{6^{n+1} - 4^n + 1}{6^n}} = \dfrac{\left(\frac{3}{6}\right)^n + 2 + 5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n}{6 - \left(\frac{4}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n}$.

Επειδή $\left|\frac{3}{6}\right| < 1$, $\left|\frac{5}{6}\right| < 1$, $\left|\frac{4}{6}\right| < 1$, $\left|\frac{1}{6}\right| < 1$, έχουμε

$\lim\left(\frac{3}{6}\right)^n = \lim\left(\frac{5}{6}\right)^n = \lim\left(\frac{4}{6}\right)^n = \lim\left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$. Άρα

$$\lim a_n = \lim \frac{\left(\frac{3}{6}\right)^n + 2 + 5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^n}{6 - \left(\frac{4}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n} = \frac{0+2+0}{6-0+0} = \frac{1}{3}.$$

ii) Επειδή $b \neq 0 \Rightarrow b^n \neq 0$ έχουμε ότι $a_n \neq 0$. Συνεπώς:

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\left|\frac{b^{n+1}\sqrt{n+1}}{b^n\sqrt{n}}\right| = |b|\lim\sqrt{\frac{n+1}{n}} = |b|\lim\sqrt{1+\frac{1}{n}} = |b| < 1, \quad \text{αφού} \quad \lim\frac{1}{n} = 0.$$

Γνωρίζουμε όμως ότι, αν για μια ακολουθία a_n με $a_n \neq 0$ ισχύει $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, τότε αυτή είναι μηδενική (Παράδειγμα 5 της παραγράφου 2.5.3 του Σ.Ε.Υ.). Επομένως έχουμε $\lim a_n = 0$.

iii) Από την ταυτότητα της υπόδειξης έχουμε $a - b = \dfrac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$. Θέτοντας $a = \sqrt[3]{n+6}$ και $b = \sqrt[3]{n+5}$ παίρνουμε

$$a_n = \sqrt[3]{n+6} - \sqrt[3]{n+5} = \frac{(n+6)-(n+5)}{\sqrt[3]{(n+6)^2} + \sqrt[3]{(n+6)(n+5)} + \sqrt[3]{(n+5)^2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{6}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1+\frac{6}{n}\right)\left(1+\frac{5}{n}\right)} + \sqrt[3]{\left(1+\frac{5}{n}\right)^2}}.$$

Επειδή $\lim\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = 0$, $\lim\dfrac{6}{n} = 0$ και $\lim\dfrac{5}{n} = 0$ έχουμε

$$\lim a_n = 0\frac{1}{\sqrt[3]{(1+0)^2} + \sqrt[3]{(1+0)(1+0)} + \sqrt[3]{(1+0)^2}} \Rightarrow \lim a_n = 0$$

iv) Θέτουμε $5n = m \Leftrightarrow n = \dfrac{m}{5}$, οπότε έχουμε:

$$\lim\left(1+\frac{1}{5n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m/5} = \lim\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{1/5}.$$

Για $n = 1, 2, 3, \ldots$, επειδή $m = 5n$, θα έχουμε $m = 5, 10, 15, \ldots$ Επομένως η ακολουθία $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ είναι υπακολουθία της γνωστής ακολουθίας $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ Αφού η $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ συγκλίνει στον αριθμό e, κάθε υπακολουθία της θα έχει το ίδιο όριο (ΣΕΥ, Λογισμός, Ακολουθίες, Πρόταση 2.7.3, σελίδα 32). Συνεπώς

$$\lim\left(1+\frac{1}{5n}\right)^n = \left[\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{1/5} = e^{1/5} = \sqrt[5]{e}.$$

Η τέταρτη άσκηση αναφέρεται στις σειρές (βλέπε βιβλίο Γ. Δάσιου, Λογισμός μιας Μεταβλητής, Ενότητα 3 καθώς επίσης και ΣΕΥ Λογισμός, Σειρές).

Άσκηση 4 (5+5+5+5 μονάδες)

Να εξετασθούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω σειρές:

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^2 n!}{(2n)!}$. **ii)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!n^{\alpha}}$, α>0

iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}\right)$ **iv)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2^n}$

Λύση.

i) Ο γενικός όρος της σειράς έχει την μορφή: $a_n=\frac{(2n+1)^2 n!}{(2n)!}$. Εφαρμόζουμε το κριτήριο του D’Alembert:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{\left(2(n+1)+1\right)^2(n+1)!}{\left(2(n+1)\right)!}}{\dfrac{(2n+1)^2 n!}{(2n)!}}=\frac{(2n+3)^2(n+1)!(2n)!}{(2n+1)^2 n!(2n+2)!}$$

Ισχύει όμως: $(2n+2)!=(2n)!(2n+1)(2n+2)$ και $(n+1)!=n!(n+1)$, άρα

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+3)^2 n!(n+1)(2n)!}{(2n+1)^2 n!(2n)!(2n+1)(2n+2)}=\frac{(2n+3)^2(n+1)}{(2n+1)^2(2n+1)(2n+2)}=$$

$$=\frac{(2n+3)^2(n+1)}{(2n+1)^2(2n+1)2(n+1)}=\frac{(2n+3)^2}{2(2n+1)^3}$$

Προφανώς $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=0<1$. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^2 n!}{(2n)^2}$ συγκλίνει.

ii) Εφαρμόζουμε το κριτήριο του D’Alembert με $a_n=\frac{n^n}{n!n^{\alpha}}>0$, $\forall\ n\in\mathbf{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!(n+1)^{\alpha}}}{\dfrac{n^n}{n!n^{\alpha}}}=\frac{(n+1)^{n+1}n!n^{\alpha}}{(n+1)!(n+1)^{\alpha}n^n}=\frac{(n+1)^{n+1}n!n^{\alpha}}{n!(n+1)(n+1)^{\alpha}n^n}=$$

$$=\frac{(n+1)^n n^{\alpha}}{(n+1)^{\alpha}n^n}=\frac{(n+1)^n}{n^n}\frac{n^{\alpha}}{(n+1)^{\alpha}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}.$$

Συνεπώς,

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}=e\cdot 1=e>1.$$

Άρα η σειρά μας αποκλίνει.

iii) Εξετάζουμε χωριστά τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ και $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ είναι γεωμετρική με λόγο $r=\frac{1}{3}<1$. Επειδή $|r|=\frac{1}{3}<1$, αυτή η σειρά συγκλίνει.

Για τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$ έχουμε ότι $\cos(n\pi)=(-1)^n$. Επίσης για την ακολουθία $\beta_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ που την παράγει ισχύει ότι $\beta_n>0$ και η β_n είναι γνησίως φθίνουσα (διότι $\sqrt{n+1}>\sqrt{n}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}\Rightarrow\beta_n>\beta_{n+1}$). Επίσης, $\lim\beta_n=\lim\frac{1}{\sqrt{n}}=0$.

Σύμφωνα λοιπόν με το κριτήριο του Leibnitz η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\beta_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει.

Άρα και η αρχική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}\right)$, ως άθροισμα συγκλινουσών σειρών, συγκλίνει.

iv) Για την ακολουθία $a_n=\frac{n\cos^2\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2^n}$ που παράγει τη σειρά ισχύει ότι $a_n\geq 0$ και

$$a_n=\frac{n\cos^2\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2^n}\leq\frac{n\cdot 1}{2^n}=\frac{n}{2^n}=b_n.$$

Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$. Η σειρά αυτή, σύμφωνα με το κριτήριο του Cauchy, συγκλίνει γιατί:

$$\lim\sqrt[n]{b_n}=\lim\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}}=\lim\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2^n}}=\lim\frac{\sqrt[n]{n}}{2}=\frac{1}{2}\lim(n)^{1/n}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}<1.$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η σειρά συγκλίνει χρησιμοποιώντας το το κριτήριο του D'Alembert:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Ισχύει $\lim\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\lim\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\lim\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}<1.$

Οπότε έχουμε ότι $\lim\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|<1$ και συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ συγκλίνει. Χρησιμοποιώντας το ότι $b_n\geq a_n\geq 0$ και το κριτήριο σύγκρισης έπεται ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει.

Η πέμπτη και έκτη άσκηση αναφέρονται στα όρια και τη συνέχεια συναρτήσεων (βλέπε βιβλίο Γ. Δάσιου, Λογισμός μιας Μεταβλητής, Ενότητα 4 καθώς επίσης και ΣΕΥ Λογισμός, Όρια και Συνέχεια)

Άσκηση 5. (15 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{x+|x-1|} & x\neq \dfrac{1}{2}\\ b & x=\dfrac{1}{2}\end{cases}\quad \text{όπου } a,b\in R.$$

Να υπολογισθούν οι τιμές των a και b ώστε η $f(x)$ να είναι συνεχής σε όλο το R.

Λύση.

Παρατηρούμε ότι $|x-1|=\begin{cases}-x+1 & x<1\\ x-1 & x\geq 1\end{cases}$, συνεπώς

$x+|x-1|=\begin{cases}x-x+1=1 & x<1\\ x+x-1=2x-1 & x\geq 1\end{cases}$ και η συνάρτησή μας γίνεται

$$f(x)=\begin{cases}x-a & x<1 \text{ και } x\neq \dfrac{1}{2}\\ \dfrac{x-a}{2x-1} & x\geq 1\\ b & x=\dfrac{1}{2}\end{cases}=\begin{cases}x-a & x\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},1\right)\\ \dfrac{x-a}{2x-1} & x\geq 1\\ b & x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$ και $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ η συνάρτησή μας θα είναι συνεχής για κάθε $a,b\in R$ σαν πολυωνυμική συνάρτηση, ενώ στο διάστημα $[1,+\infty)$ θα είναι συνεχής για κάθε $a,b\in R$ σαν ρητή συνάρτηση της οποίας ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται.

Για να είναι η $f(x)$ συνεχής σε όλο το R, θα πρέπει να είναι συνεχής και στα σημεία $x=\dfrac{1}{2}$ και $x=1$. Σύμφωνα με τον ορισμό της συνέχειας, όπως αυτός δίνεται στην Παράγραφο 4.2 του βιβλίου, για να είναι η $f(x)$ συνεχής στο $x=1$ θα πρέπει:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

Έχουμε:

$$f(1)=\frac{1-a}{2\cdot 1-1}=1-a$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(x-a\right)=1-a$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-a}{2x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1^+} x-a}{2\lim\limits_{x\to 1^+} x-1}=\frac{1-a}{2\cdot 1-1}=1-a$$

Συνεπώς, η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x=1$. Ομοίως:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=b$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to \frac{1}{2}^-}\left(x-a\right)=\frac{1}{2}-a$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to \frac{1}{2}^+}\left(x-a\right)=\frac{1}{2}-a$$

Επομένως, η $f(x)$ θα είναι συνεχής στο $x=\dfrac{1}{2}$ όταν $b=\dfrac{1}{2}-a$ και $a\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 6. (5+5+10 μονάδες)

α) Να υπολογισθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

β) Να υπολογισθούν τα πλευρικά όρια της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{2-2x}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x+3}-2\right)}$$

όταν $x\to 1^-$ και $x\to 1^+$. Τι συμπεραίνετε για το όριό της όταν $x\to 1$;

γ) Για ποιά $n\in N,\ n>1$ ισχύει ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^5+5x^2+4x+3}{2x^n+x+2011}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7\cdot e^x-3\cdot 2^x}{2\cdot 5^x+1};$$

Λύση.

α) Παρατηρούμε ότι, αν προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε απ' ευθείας αυτό το όριο, θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x-2)}{\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x-2}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}x^2+5}-3}=\frac{2-2}{\sqrt{4+5}-3}=\frac{0}{0}$$

που είναι απροσδιόριστο. Όμως, αν πολλαπλασιάσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{\left(\sqrt{x^2+5}\right)^2-3^2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{x^2+5-9}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}x^2+5}+3}{\lim\limits_{x\to 2}x+2}=\frac{\sqrt{4+5}+3}{2+2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$$

β) Παρατηρούμε ότι, αν προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε απ' ευθείας τα δύο πλευρικά όρια, αυτά είναι απροσδιόριστα, γιατί:

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2-2x}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x+3}-2\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1^-}(2-2x)}{\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2-1\right)\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\sqrt{x+3}-2\right)}=$$

$$=\frac{2-2\lim\limits_{x\to 1^-}x}{\left(\lim\limits_{x\to 1^-}x^2-1\right)\left(\sqrt{\lim\limits_{x\to 1^-}x+3}-2\right)}=\frac{0^+}{0^-\cdot 0^-}=\frac{0^+}{0^+}.$$

και

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{2-2x}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x+3}-2\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1^+}(2-2x)}{\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2-1\right)\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x+3}-2\right)}=$$

$$=\frac{2-2\lim\limits_{x\to 1^+}x}{\left(\lim\limits_{x\to 1^+}x^2-1\right)\left(\sqrt{\lim\limits_{x\to 1^+}x+3}-2\right)}=\frac{0^-}{0^+\cdot 0^+}=\frac{0^-}{0^+}.$$

Όμως, μπορούμε να κάνουμε το εξής:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2-2x}{(x^2-1)\left(\sqrt{x+3}-2\right)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-2(x-1)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x+3}-2\right)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-2}{(x+1)\left(\sqrt{x+3}-2\right)}=$$

$$=\frac{-2}{\lim\limits_{x\to 1^-}\left[(x+1)\left(\sqrt{x+3}-2\right)\right]}=\frac{-2}{\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\sqrt{x+3}-2\right)}=\frac{-2}{\left(\lim\limits_{x\to 1^-}x+1\right)\left(\sqrt{\lim\limits_{x\to 1^-}x+3}-2\right)}.$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1^-}x+1=1+1=2$. Επίσης, όταν $x\to 1^-$, τότε $x<1$ και η ποσότητα $\sqrt{x+3}-2$ είναι αρνητική, οπότε $\sqrt{\lim\limits_{x\to 1^-}x+3}-2=0^-$. Συνεπώς,

$$\frac{-2}{\left(\lim\limits_{x\to 1^-}x+1\right)\left(\sqrt{\lim\limits_{x\to 1^-}x+3}-2\right)}=\frac{-2}{2\cdot 0^-}=+\infty.$$

Ομοίως, έχουμε $\lim\limits_{x\to 1^+}x+1=1+1=2$. Επίσης, όταν $x\to 1^+$, τότε $x>1$ και η ποσότητα $\sqrt{x+3}-2$ είναι θετική, οπότε $\sqrt{\lim\limits_{x\to 1^+}x+3}-2=0^+$. Συνεπώς,

$$\frac{-2}{\left(\lim\limits_{x\to 1^-}x+1\right)\left(\sqrt{\lim\limits_{x\to 1^-}x+3}-2\right)}=\frac{-2}{2\cdot 0^+}=-\infty.$$

Άρα, αφού τα δυο πλευρικά όρια διαφέρουν, δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης όταν $x\to 1$.

γ) Για να υπολογίσουμε το όριο του δεξιού μέλους μπορούμε να κάνουμε το εξής:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7\cdot e^x-3\cdot 2^x}{2\cdot 5^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7\cdot\frac{e^x}{5^x}-3\cdot\frac{2^x}{5^x}}{2\cdot\frac{5^x}{5^x}+\frac{1}{5^x}}=\frac{7\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{5}\right)^x-3\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^x}{2\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}1^x+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^x}$$

Επειδή $\frac{e}{5}<1$, $\frac{2}{5}<1$ και $\frac{1}{5}<1$, θα έχουμε ότι το παραπάνω όριο ισούται με $\frac{7\cdot 0-3\cdot 0}{2\cdot 1+0}=0$.

Το όριο του αριστερού μέλους μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^5+5x^2+4x+2}{2x^n+x+2011}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6\frac{x^5}{x^n}+5\frac{x^2}{x^n}+4\frac{x}{x^n}+3\frac{1}{x^n}}{2\frac{x^n}{x^n}+\frac{x}{x^n}+2011\frac{1}{x^n}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6\frac{x^5}{x^n}+5\frac{x^2}{x^n}+4\frac{x}{x^n}+3\frac{1}{x^n}}{2+\frac{x}{x^n}+2011\frac{1}{x^n}}=\frac{6\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^5}{x^n}+5\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^n}+4\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^n}+3\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}}{2+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^n}+2011\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}}\qquad(1)$$

Επειδή $n>1$ και, επίσης, το x είναι μεγαλύτερο του 1 όταν τείνει (πλησιάζει) στο $+\infty$, έχουμε:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{n-1}}=0$,

δηλαδή τα όρια που εμφανίζονται στον παρονομαστή είναι ίσα με 0. Συνεπώς,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^5+5x^2+4x+2}{2x^n+x+2011}=\frac{6\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^5}{x^n}+5\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^n}}{2}$$

Έτσι, για να ισούται το παραπάνω όριο με 0, θα πρέπει ο αριθμητής να τείνει στο 0. Δηλαδή πρέπει

$$6\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5}{x^n}+5\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^n}=0 \qquad (2)$$

Γενικά, για m,n θετικούς ακέραιους, ισχύει

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^m}{x^n}=0,$ όταν $n>m,$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^m}{x^n}=1,$ όταν $m=n,$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^m}{x^n}=+\infty,$ όταν $n<m.$

Επειδή όταν το x πλησιάζει στο $+\infty,$ έχουμε $\frac{x^5}{x^n},\frac{x^2}{x^n}\geq 0$, για να ισχύει η (2) πρέπει, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^5}{x^n}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^n}=0.$ Συνεπώς είναι αναγκαίο $n>5$ και $n>2.$ Συνεπώς, τελικά, θα πρέπει $n>5.$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το όριο του αριστερού μέλους με τον ακόλουθο τρόπο:
Είναι γνωστό από την θεωρία ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^5+5x^2+4x+2}{2x^n+x+2011}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^5}{2x^n}$$

Διερεύνηση:

I) Αν n>5 τότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^5+5x^2+4x+2}{2x^n+x+2011}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^5}{2x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{2x^{n-5}}=0$$

II) Αν n =5 τότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^5+5x^2+4x+2}{2x^5+x+2011}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^5}{2x^5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{2}=3$$

III) Αν n <5 τότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^5+5x^2+4x+2}{2x^n+x+2011}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^5}{2x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^{5-n}}{2}=+\infty$$

Άρα πρέπει n>5.