ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ I (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 5η

Ημερομηνία Αποστολής στο Φοιτητή: 21 Μαρτίου 2011

Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 15 Απριλίου 2011.

Πριν από τη λύση κάθε άσκησης καλό είναι να μελετούνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις από τις παραπομπές στα συγγράμματα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της 5ης εργασίας αναφέρονται στα:

Ενότητα 10 (Γενικευμένη Ολοκλήρωση)
του συγγράμματος του ΕΑΠ «**Λογισμός Μιας Μεταβλητής**» του Γ. Δάσιου

Ενότητα 2 (2.1 – 2.5**)** (Βασική Πιθανοθεωρία)
Ενότητα 3 (3.1, 3.3.1, 4.1, 4.4-4.6**)** (Τυχαίες μεταβλητές και χαρακτηριστικά των κατανομών τους – Χρήσιμα πρότυπα κατανομών)
του συγγράμματος του ΕΑΠ «**Βασικά Εργαλεία και Μέθοδοι για τον Έλεγχο της Ποιότητας**» του κ. Ι. Κουτρουβέλη

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα συμβουλευθείτε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στη http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm ως εξής:

Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό :
Λογισμός Ολοκληρώματα 1 (για άσκηση 2), Ολοκληρώματα 2 (για άσκηση 1)
Πιθανότητες Πιθανότητες Ι και Πιθανότητες ΙΙ (για ασκήσεις 3-6)

Στόχοι:

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι :
α) η κατανόηση τεχνικών ολοκλήρωσης καθώς και ο υπολογισμός γενικευμένων ολοκληρωμάτων,
β) η κατανόηση της έννοιας της πιθανότητας καθώς και ο υπολογισμός της πιθανότητας ενδεχομένων βάσει προτάσεων από την αξιωματική θεωρία των πιθανοτήτων,
γ) η κατανόηση της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής και ο υπολογισμός βάσει κατάλληλων συναρτήσεων της πιθανοτικής συμπεριφοράς τυχαίων μεταβλητών που περιγράφουν τα αποτελέσματα ενός πειράματος.

Άσκηση 1. (15 μονάδες)

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

(i) $\int \frac{e^{3x}+e^{x}}{e^{x}+1}dx$ (ii) $\int e^{3x}\cos(2x+3)\ dx$ (iii) $\int \frac{2x^2+3x-1}{x^3+x^2-x-1}dx$

Υπόδειξη: Για το (i) να χρησιμοποιήσετε ολοκλήρωση με αντικατάσταση (Κεφ. 3, Σ.Ε.Υ. Ολοκληρώματα ΙΙ), για το (ii) να χρησιμοποιήσετε παραγοντική ολοκλήρωση (Κεφ. 5, Σ.Ε.Υ. Ολοκληρώματα ΙΙ) και για το (iii) ανάλυση σε άθροισμα απλών κλασμάτων (Κεφ. 7, Σ.Ε.Υ. Ολοκληρώματα ΙΙ).

Λύση

(i) Θα λυθεί με αντικατάσταση. Θέτουμε $u=e^x$ και συνεπώς $du=e^x dx \Rightarrow \frac{du}{u}=dx$.

$$\int \frac{e^{3x}+e^{x}}{e^{x}+1}dx=\int \frac{u^3+u}{u+1}\frac{du}{u}=\int \frac{u^2+1}{u+1}du=\int \frac{u^2-1+1+1}{u+1}du=$$

$$=\int \left(\frac{(u-1)(u+1)}{u+1}+\frac{2}{u+1}\right)du=\int \left(u-1+\frac{2}{u+1}\right)du=$$

$$=\int (u-1)du+2\int \frac{1}{u+1}du=\frac{u^2}{2}-u+2\ln|u+1|+c=\frac{e^{2x}}{2}-e^x+2\ln\left(e^x+1\right)+c$$

(ii) Θα λυθεί με παραγοντική ολοκλήρωση

$$\underbrace{\int e^{3x}\cos(2x+3)\ dx}_{I_2}=\int \left(\frac{e^{3x}}{3}\right)'\cos(2x+3)\ dx=$$

$$=\frac{e^{3x}}{3}\cos(2x+3)-\int \frac{e^{3x}}{3}\left(\cos(2x+3)\right)'\ dx=$$

$$=\frac{e^{3x}}{3}\cos(2x+3)-\int \frac{e^{3x}}{3}\left(-2\sin(2x+3)\right)\ dx=$$

$$=\frac{e^{3x}}{3}\cos(2x+3)+\int \frac{2}{3}e^{3x}\sin(2x+3)\ dx=$$

$$=\frac{e^{3x}}{3}\cos(2x+3)+\int \frac{2}{3}\left(\frac{e^{3x}}{3}\right)'\sin(2x+3)\ dx=$$

$$=\frac{e^{3x}}{3}\cos(2x+3)+\frac{2}{3}\frac{e^{3x}}{3}\sin(2x+3)-\int \frac{2}{3}\frac{e^{3x}}{3}\left(\sin(2x+3)\right)'\ dx=$$

$$=\frac{e^{3x}}{3}\cos(2x+3)+\frac{2}{3}\frac{e^{3x}}{3}\sin(2x+3)-\int \frac{2}{3}\frac{e^{3x}}{3}\left(2\cos(2x+3)\right)\ dx=$$

$$=\frac{e^{3x}}{3}\cos(2x+3)+\frac{2}{3}\frac{e^{3x}}{3}\sin(2x+3)-\frac{4}{9}\underbrace{\int e^{3x}\cos(2x+3)\ dx}_{I_2}$$

Συνεπώς θα έχουμε

$$I_2+\frac{4}{9}I_2=\frac{e^{3x}}{3}\cos\left(2x+3\right)+\frac{2}{3}\frac{e^{3x}}{3}\sin\left(2x+3\right)\Rightarrow$$
$$\frac{13}{9}I_2=\frac{1}{3}e^{3x}\cos\left(2x+3\right)+\frac{2}{9}e^{3x}\sin\left(2x+3\right)\Rightarrow$$
$$I_2=\frac{9}{13}\left(\frac{1}{3}e^{3x}\cos\left(2x+3\right)+\frac{2}{9}e^{3x}\sin\left(2x+3\right)\right)\Rightarrow$$
$$I_2=\frac{1}{13}\left(3e^{3x}\cos\left(2x+3\right)+2e^{3x}\sin\left(2x+3\right)\right)+C$$

(iii) Εδώ έχουμε ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης. Πρώτα παραγοντοποιούμε τον παρονομαστή

$$x^3+x^2-x-1=x^2\left(x+1\right)-\left(x+1\right)=\left(x+1\right)\left(x^2-1\right)=\left(x+1\right)^2\left(x-1\right)$$

Αναλύουμε την ρητή συνάρτηση σε απλά κλάσματα

$$\frac{2x^2+3x-1}{x^3+x^2-x-1}=\frac{2x^2+3x-1}{\left(x+1\right)^2\left(x-1\right)}=\frac{A}{\left(x+1\right)^2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}=\frac{A\left(x-1\right)+B\left(x+1\right)\left(x-1\right)+C\left(x+1\right)^2}{\left(x+1\right)^2\left(x-1\right)}$$

$$Ax-A+Bx^2-B+Cx^2+2Cx+C=2x^2+3x-1\Rightarrow$$
$$\left(B+C\right)x^2+\left(A+2C\right)x+\left(-A-B+C\right)=2x^2+3x-1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{cases} B+C=2 \\ A+2C=3 \\ -A-B+C=-1\end{cases}\Rightarrow A=B=C=1$$

Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int\frac{2x^2+3x-1}{x^3+x^2-x-1}dx=\int\left(\frac{1}{\left(x+1\right)^2}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)dx=\int\frac{1}{\left(x+1\right)^2}dx+\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{1}{x-1}dx=$$
$$=\frac{-1}{x+1}+\ln\left|x+1\right|+\ln\left|x-1\right|+c$$

Άσκηση 2. (15 μονάδες)
(α) (Μονάδες 10) Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα :

$$I_1 = \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^p} dx, \ p \in \mathbb{R}$$

συγκλίνει αν και μόνο αν $p < 1$.
(β) (Μονάδες 5) Να υπολογίσετε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$I_2 = \int_1^2 \frac{3x}{\sqrt{2-x}} dx$$

Υπόδειξη: Τα παραπάνω γενικευμένα ολοκληρώματα μελετάει το Κεφ. 10 του βιβλίου του κ. Δάσιου (Κεφ. 10.1 και 10.2) (δες επίσης ΣΕΥ Ολοκληρώματα 1, σελ. 19). Στο I_2 μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ολοκλήρωση με αντικατάσταση (Κεφ.3 από ΣΕΥ).

Λύση

(α) Το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{(x-1)^p}$ είναι το $\mathbb{R}-\{1\}$ αν $p>0$ και όλο το $\mathbb{R}$ αν $p \le 0$

$$I_1 = \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^p} dx = \lim_{a \to 1^+} \int_a^2 \frac{1}{(x-1)^p} dx$$

Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{(x-1)^p} dx \underset{du=dx}{\overset{u=x-1}{=}} \int \frac{1}{u^p} du = \int \left(u^{-p}\right) du = \begin{cases} \ln u & p=1 \\ \dfrac{u^{-p+1}}{-p+1} & p \neq 1 \end{cases} \overset{u=x-1}{=} \begin{cases} \ln(|x-1|) & p=1 \\ \dfrac{(x-1)^{-p+1}}{-p+1} & p \neq 1 \end{cases}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα :

i) για $p=1$

$$I_1 = \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^p} dx = \lim_{a \to 1^+} \Big[\ln(|x-1|)\Big]_a^2 = \ln 1 - \lim_{a \to 1^+} \ln(|a-1|) = -(-\infty) = +\infty$$

ii) για $p \neq 1$

$$I_1 = \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^p} dx = \lim_{a \to 1^+} \left[\frac{(x-1)^{-p+1}}{-p+1}\right]_a^2 = \lim_{a \to 1^+} \left[\frac{1^{-p+1}}{-p+1} - \frac{(a-1)^{-p+1}}{-p+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{1-p} - \lim_{a \to 1^+} \frac{(a-1)^{-p+1}}{-p+1} = \begin{cases} +\infty & p>1 \\ \dfrac{1}{1-p} & p<1 \end{cases}$$

Συνεπώς το ολοκλήρωμα συγκλίνει μόνο για τις τιμές του p που είναι μικρότερες της μονάδας.

(β) Το πεδίο ορισμού της $\frac{3x}{\sqrt{2-x}}$ είναι το $(-\infty, 2)$.

$$I_2 = \int_1^2 \frac{3x}{\sqrt{2-x}} dx = \lim_{a \to 2^-} \int_1^a \frac{3x}{\sqrt{2-x}} dx$$

Θα υπολογίσουμε πρώτα το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα. Θέτουμε

$$u = \sqrt{2-x} \Rightarrow u^2 = 2-x \Rightarrow x = 2-u^2$$

Οπότε έχουμε

$$u^2 = 2 - x \Rightarrow -2udu = dx$$

Άρα

$$\int \frac{3x}{\sqrt{2-x}}\,dx \underset{dx=-2udu}{\overset{u=\sqrt{2-x}}{=}} \int \frac{3\left(2-u^2\right)(-2u)}{u}\,du = -6\int\left(2-u^2\right)du = -6\left(2u - \frac{u^3}{3}\right) + c =$$

$$= -12u + 2u^3 + c = -12\sqrt{2-x} + 2\sqrt{(2-x)^3} + c$$

Για το ορισμένο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int_1^a \frac{3x}{\sqrt{2-x}}\,dx = \left[-12\sqrt{2-x} + 2\sqrt{(2-x)^3}\right]_1^a =$$

$$= \left(-12\sqrt{2-a} + 2\sqrt{(2-a)^3}\right) - \left(-12\sqrt{2-1} + 2\sqrt{(2-1)^3}\right) =$$

$$= \left(-12\sqrt{2-a} + 2\sqrt{(2-a)^3}\right) + 10$$

Τέλος παίρνουμε το όριο και έχουμε

$$I_2 = \int_1^2 \frac{3x}{\sqrt{2-x}}\,dx = \lim_{a\to 2^-}\int_1^a \frac{3x}{\sqrt{2-x}}\,dx = \lim_{a\to 2^-}\left(-12\sqrt{2-a} + 2\sqrt{(2-a)^3}\right) + 10 =$$

$$= \left(-12\sqrt{2-2} + 2\sqrt{(2-2)^3}\right) + 10 = 10$$

Άσκηση 3. (30 μονάδες)

(α) Ρίχνουμε δύο ζάρια μια φορά.

1. (Μον. 2) Ποιος είναι ο δειγματοχώρος ;

2. Ποια είναι τα γεγονότα που ακολουθούν και ποια η πιθανότητα καθενός από αυτά :

i) (Μον. 4) Το άθροισμα είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 7,

ii) (Μον. 4) Οι αριθμοί που δείχνουν τα ζάρια είναι ίσοι.

(β) (Μον. 10) Αν ρίχναμε 3 ζάρια ταυτόχρονα, είναι ισοπίθανες οι περιπτώσεις να φέρουμε άθροισμα 11 ή 12;

(γ) Ας υποθέσουμε ότι οι πρωτοετείς φοιτητές της ΠΛΗ επιλέγουν στο πρώτο έτος την θεματική ενότητα ΠΛΗ10 σε ποσοστό 60%, και την ΠΛΗ12 σε ποσοστό 50%, ενώ το ποσοστό των φοιτητών που επιλέγουν και τις 2 θεματικές ενότητες είναι 30%. Αν διαλέξουμε έναν τυχαίο πρωτοετή φοιτητή της ΠΛΗ, τότε :

1. (Μον. 5) Ποια είναι η πιθανότητα του γεγονότος «ο τυχαίος φοιτητής να έχει επιλέξει ***τουλάχιστον μια*** από τις δύο θεματικές ενότητες» ;

2. (Μον. 5) Ποια είναι η πιθανότητα του γεγονότος «ο τυχαίος φοιτητής να έχει επιλέξει ***ακριβώς μια*** από τις δύο θεματικές ενότητες» ;

Υπόδειξη. Η έννοια του δειγματικού χώρου ορίζεται στο Κεφ. 2.2 του βιβλίου, ενώ βασικές προτάσεις και η αξιωματική θεμελίωση της πιθανότητας αναφέρονται στο Κεφ. 2.3 του βιβλίου (δες επίσης ΣΕΥ, Κεφ. 1.1 από Πιθανότητες Ι).

Λύση

(α.1) Ο δειγματοχώρος Ω είναι ο παρακάτω

$$\Omega=\left\{\begin{array}{l}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{array}\right\}$$

και περιέχει $6^2=36$ διατεταγμένα ζεύγη (a,b) με $a,b\in\{1,2,3,4,5,6\}$.

(α.2i) Το γεγονός :

A={Το άθροισμα είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 7}

περιέχει τα παρακάτω διατεταγμένα ζεύγη (a,b) με $a,b\in\{1,2,3,4,5,6\}\wedge a+b\geq 7$

$$A=\left\{\begin{array}{c}(1,6),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{array}\right\}$$

τα οποία στο πλήθος είναι ίσα με $\sum_{a=1}^{6}\sum_{b=7-a}^{6}1=21$ και συνεπώς $P(A)=\frac{21}{36}=0.583333$.

(α.2ii) Το γεγονός :

B={Οι αριθμοί που δείχνουν τα ζάρια είναι ίσοι}

περιέχει τα παρακάτω διατεταγμένα ζεύγη (a,b) με $a,b\in\{1,2,3,4,5,6\}\wedge a=b$

$$B=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

τα οποία στο πλήθος είναι ίσα με $\sum_{a=1}^{6}1=6$ και συνεπώς $P(B)=\frac{6}{36}=0.166667$.

(β) Ο δειγματοχώρος Ω’ που αντιστοιχεί στο ρίξιμο των 3 ζαριών θα περιέχει $6^3=216$ διατεταγμένες τριάδες (a,b,c) με $a,b,c\in\{1,2,3,4,5,6\}$.

Το γεγονός :

C={Το άθροισμα είναι ίσο με 11}

περιέχει τα παρακάτω διατεταγμένα ζεύγη (a,b,c) με $a,b,c\in\{1,2,3,4,5,6\}$ και $a+b+c=11$.

$$C=\left\{\begin{matrix}(1,4,6),(1,5,5),(1,6,4),(2,3,6),(2,4,5),(2,5,4),(2,6,3),(3,2,6),(3,3,5),(3,4,4),\\(3,5,3),(3,6,2),(4,1,6),(4,2,5),(4,3,4),(4,4,3),(4,5,2),(4,6,1),(5,1,5),(5,2,4),\\(5,3,3),(5,4,2),(5,5,1),(6,1,4),(6,2,3),(6,3,2),(6,4,1)\end{matrix}\right\}$$

τα οποία στο πλήθος είναι ίσα με 27 και συνεπώς $P(C)=\dfrac{27}{216}$.

Το γεγονός :

D={Το άθροισμα είναι ίσο με 12}

περιέχει τα παρακάτω διατεταγμένα ζεύγη (a,b,c) με $a,b,c\in\{1,2,3,4,5,6\}$ και $a+b+c=12$.

$$D=\left\{\begin{matrix}(1,5,6),(1,6,5),(2,4,6),(2,5,5),(2,6,4),(3,3,6),(3,4,5),(3,5,4),(3,6,3),(4,2,6),\\(4,3,5),(4,4,4),(4,5,3),(4,6,2),(5,1,6),(5,2,5),(5,3,4),(5,4,3),(5,5,2),(5,6,1),\\(6,1,5),(6,2,4),(6,3,3),(6,4,2),(6,5,1)\end{matrix}\right\}$$

τα οποία στο πλήθος είναι ίσα με 25 και συνεπώς $P(D)=\dfrac{25}{216}$.

Άρα το γεγονός C έχει μεγαλύτερη πιθανότητα από το γεγονός D.

Το παραπάνω πρόβλημα είναι γνωστό και ως Παράδοξο του Chevalier de Mere. Ο ιππότης Chevalier de Mere συνήθιζε να παίζει με 3 ζάρια και να ποντάρει εναλλακτικά στο άθροισμα 11 ή 12 γιατί πίστευε ότι πρόκειται για ισοπίθανες περιπτώσεις. Στο συμπέρασμα αυτό είχε οδηγηθεί γιατί δεν λάμβανε υπόψιν όλες τις διατεταγμένες τριάδες και συνεπώς ο δειγματικός χώρος που υπέθετε περιείχε στοιχεία όπως το (α,β,γ) αλλά όχι το (β,γ,α) μιας και το θεωρούσε ίδιο. Συνεπώς ο δειγματοχώρος κατά τον de Mere περιείχε 56 στοιχεία, από τα οποία 6 είχαν άθροισμα 11 και 6 άθροισμα 12

$$C'=\{(1, 4, 6), (1, 5, 5), (2, 3, 6), (2, 4, 5), (3, 3, 5), (3, 4, 4)\}$$

$$D'=\{(1, 5, 6), (2, 4, 6), (2, 5, 5), (3, 3, 6), (3, 4, 5), (4, 4, 4)\}$$

Ο Pascal παίρνοντας όλες τις διατεταγμένες τριάδες πήρε το αποτέλεσμα που παρουσιάσαμε παραπάνω.

Το αποτέλεσμα στο ερώτημα 3, μπορούμε να το πάρουμε και με το παρακάτω σύντομο πρόγραμμα στο Mathematica :

```
In[80]:= s1 = {}; Do[If[a + b + c == 11, s1 = Join[s1, {{a, b, c}}]], {a, 1, 6}, {b, 1, 6}, {c, 1, 6}];
         s1

Out[80]= {{1, 4, 6}, {1, 5, 5}, {1, 6, 4}, {2, 3, 6}, {2, 4, 5}, {2, 5, 4}, {2, 6, 3}, {3, 2, 6}, {3, 3, 5},
          {3, 4, 4}, {3, 5, 3}, {3, 6, 2}, {4, 1, 6}, {4, 2, 5}, {4, 3, 4}, {4, 4, 3}, {4, 5, 2}, {4, 6, 1},
          {5, 1, 5}, {5, 2, 4}, {5, 3, 3}, {5, 4, 2}, {5, 5, 1}, {6, 1, 4}, {6, 2, 3}, {6, 3, 2}, {6, 4, 1}}

In[81]:= s2 = {}; Do[If[a + b + c == 12, s2 = Join[s2, {{a, b, c}}]], {a, 1, 6}, {b, 1, 6}, {c, 1, 6}];
         s2

Out[81]= {{1, 5, 6}, {1, 6, 5}, {2, 4, 6}, {2, 5, 5}, {2, 6, 4}, {3, 3, 6}, {3, 4, 5}, {3, 5, 4}, {3, 6, 3},
          {4, 2, 6}, {4, 3, 5}, {4, 4, 4}, {4, 5, 3}, {4, 6, 2}, {5, 1, 6}, {5, 2, 5}, {5, 3, 4},
          {5, 4, 3}, {5, 5, 2}, {5, 6, 1}, {6, 1, 5}, {6, 2, 4}, {6, 3, 3}, {6, 4, 2}, {6, 5, 1}}
```

Ορίζουμε αρχικά μια άδεια λίστα, στην οποία στη συνέχεια προσθέτουμε από όλες τις δυνατές διατεταγμένες τριάδες αυτές που ικανοποιούν την απαραίτητη συνθήκη. Στο τέλος εκτυπώνουμε την λίστα που έχει προκύψει.

(γ) Ορίζουμε τα παρακάτω γεγονότα :

A={ο φοιτητής επέλεξε την ΠΛΗ10}

B={ο φοιτητής επέλεξε την ΠΛΗ12}

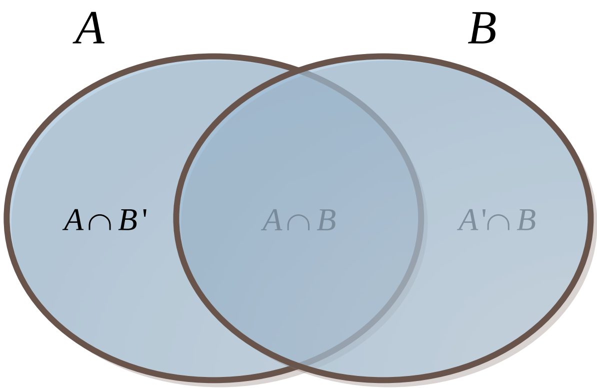
Τότε θα έχουμε:

$$P(A)=0.6, P(B)=0.5, P(A\cap B)=0.3,$$

(γ1) Η πιθανότητα του γεγονότος «ο τυχαίος φοιτητής να έχει επιλέξει ***τουλάχιστον μια*** από τις δύο θεματικές ενότητες» είναι :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.6+0.5-0.3=0.8$$

(γ2) Η πιθανότητα του γεγονότος «ο τυχαίος φοιτητής να έχει επιλέξει ***ακριβώς μια*** από τις δύο θεματικές ενότητες» είναι να έχει επιλέξει την πρώτη αλλά όχι την δεύτερη ή να έχει επιλέξει την δεύτερη αλλά όχι την πρώτη $P\big((A\cap B')\cup(A'\cap B)\big)$.



Είναι φανερό από το παραπάνω σχήμα ότι

$$A\cup B=(A\cap B')\cup B=A\cup(A'\cap B)$$

Και συνεπώς επειδή τα γεγονότα $A\cap B'$ και B (αντίστοιχα A και $A'\cap B$) είναι ξένα μεταξύ τους θα έχουμε

$$P(A\cup B)=P(A\cap B')+P(B)=P(A)+P(A'\cap B)$$

Συνεπώς

$$P(A\cap B')=P(A\cup B)-P(B)=0.8-0.5=0.3$$

$$P(A'\cap B)=P(A\cup B)-P(A)=0.8-0.6=0.2$$

Άρα επειδή τα γεγονότα $A\cap B'$ και $A'\cap B$ είναι ξένα μεταξύ τους θα έχουμε

$$P\big((A\cap B')\cup(A'\cap B)\big)=P(A\cap B')+P(A'\cap B)=0.3+0.2=0.5$$

Εναλλακτικά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το ενδεχόμενο <u>ακριβώς μία</u> είναι το $(A\cup B)\setminus(A\cap B)$ άρα έχει πιθανότητα $P(A\cup B)-P(A\cap B)=0.8-0.3=0.5$, αφού η τομή είναι υποσύνολο της ένωσης.

Άσκηση 4. (10 μονάδες)
Λόγω ενός σφάλματος που δημιουργήθηκε στο Internet τα πακέτα δεδομένων μεταξύ υπολογιστών τα οποία αποστέλλονται από Θεσσαλονίκη προς Αθήνα δρομολογούνται μέσω Ιωαννίνων με πιθανότητα 1/3. Ένα πακέτο δεδομένων που δρομολογείται μέσω Ιωαννίνων έχει πιθανότητα 1/3 να χαθεί μέχρι να φτάσει στην Αθήνα. Αν πάλι ένα πακέτο δεδομένων δεν δρομολογηθεί μέσω Ιωαννίνων τότε έχει την πιθανότητα 1/4 να χαθεί.

1. (Μονάδες 5) Ποια είναι η πιθανότητα να χαθεί ένα πακέτο δεδομένων από Θεσσαλονίκη προς Αθήνα;

2. (Μονάδες 5) Ποια η πιθανότητα ένα πακέτο δεδομένων που έφτασε στην Αθήνα να ήρθε μέσω Ιωαννίνων;

Υπόδειξη. Να ορίσετε τα γεγονότα *A*={ένα πακέτο δεδομένων δρομολογείται μέσω Ιωαννίνων}, *B*={ένα πακέτο δεδομένων χάνεται}. Θα σας βοηθήσει ιδιαίτερα το κεφάλαιο 2.5 του βιβλίου (Δεσμευμένη Πιθανότητα) καθώς και το κεφάλαιο 1.3 από το ΣΕΥ Πιθανότητες Ι που αναφέρεται στο ίδιο αντικείμενο.

Λύση
Έστω τα γεγονότα :

A={ένα πακέτο δεδομένων δρομολογείται μέσω Ιωαννίνων}

B={ένα πακέτο δεδομένων χάνεται}

Τότε σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης, η πιθανότητα ένα πακέτο να χαθεί όταν δρομολογείται μέσω Ιωαννίνων είναι :

$$P(B/A)=\frac{1}{3}$$

ενώ η πιθανότητα να χαθεί αν δεν δρομολογηθεί μέσω Ιωαννίνων είναι :

$$P(B/A')=\frac{1}{4}$$

όπου A' δηλώνει το αντίθετο του γεγονότος *A*. Τέλος η πιθανότητα να δρομολογηθεί ένα πακέτο μέσω Ιωαννίνων είναι

$$P(A)=\frac{1}{3}$$

(1) Συνεπώς η πιθανότητα ένα πακέτο να χαθεί σύμφωνα με το *Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας* (Θεώρημα 2.13, σελ. 41, από το βιβλίο του κ. Κουτρουβέλη) είναι :

$$P(B)=P(B/A)\cdot P(A)\ +\ P(B/A')\cdot P(A')=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

(2) Ζητούμε την δεσμευμένη πιθανότητα $P(A/B')$. Χρησιμοποιώντας τον *Κανόνα του Bayes* (Θεώρημα 2.14, σελ. 43, από το βιβλίο του κ. Κουτρουβέλη) :

$$P(A/B')\ =\ \frac{P(B'/A)\cdot P(A)}{P(B')}=\frac{\left(1-P(B/A)\right)\cdot P(A)}{1-P(B)}=\frac{\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}}{1-\frac{5}{18}}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{13}{18}}=\frac{4}{13}$$

Άσκηση 5. (20 μονάδες)
Ο χρόνος ζωής μίας τεχνητής καρδιάς (μετρούμενος σε έτη) είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας:

$$f(x)=\begin{cases} 0.05e^{-\frac{x}{20}}, \alpha\nu \quad x\ge 0 \\ 0, \alpha\nu \quad x<0 \end{cases}$$

1) (Μον. 5) Να επαληθεύσετε ότι η $f(x)$ είναι πράγματι συνάρτηση πυκνότητας.
2) (Μον. 5) Να βρεθεί η πιθανότητα να παρουσιασθεί ελάττωμα εντός 10 ετών.
3) (Μον. 5) Αν η τεχνητή καρδιά έχει ήδη λειτουργήσει για 10 χρόνια ποια είναι η πιθανότητα να λειτουργήσει άλλα 5 χρόνια;
4) (Μον. 5) Να υπολογιστεί η μέση τιμή EX και η τυπική απόκλιση σ της X.

Υπόδειξη. Θα χρειαστεί να μελετήσετε την έννοια της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (Κεφ. 3.1 του βιβλίου) και πιο συγκεκριμένα τον ορισμό στη σελ. 59. Επίσης θα χρειαστείτε τον ορισμό της μέσης τιμής και της διασποράς (σελ. 78, 82). Μπορείτε επίσης να μελετήσετε από το Σ.Ε.Υ. , Πιθανότητες 2- Λυμένες ασκήσεις .
Λύση

1) Είναι $f(x)\ge 0$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}0.05e^{-\frac{x}{20}}dx=\lim_{u\to+\infty}\int_0^u 0.05e^{-\frac{x}{20}}dx=1$, διότι

$$\int_0^u 0.05e^{-\frac{x}{20}}dx=\int_0^u 0.05\left(-20e^{-\frac{x}{20}}\right)'dx=\int_0^u\left(-e^{-\frac{x}{20}}\right)'dx=\int_u^0\left(e^{-\frac{x}{20}}\right)'dx=\left[e^{-\frac{x}{20}}\right]_u^0=1-e^{-\frac{u}{20}}$$

που τείνει στο 1 όταν το u τείνει στο άπειρο.

2) $P(X<10)=\int_{-\infty}^{10}0.05e^{-\frac{x}{20}}dx=\int_0^{10}0.05e^{-\frac{x}{20}}dx=\left[e^{-\frac{x}{20}}\right]_{10}^{0}=1-e^{-0,5}\approx 0.39$

3) Ζητείται η πιθανότητα

$$P\left(X\ge 15\middle| X\ge 10\right)=\frac{P\left((X\ge 15)\cap(X\ge 10)\right)}{P\left(X\ge 10\right)}=\frac{P(X\ge 15)}{1-P(X<10)}=\frac{1-P(X<15)}{1-P(X<10)}$$

$$=\frac{1-\int_0^{15}f(x)dx}{1-(1-e^{-\frac{10}{20}})}=\frac{1-\left[e^{-\frac{x}{20}}\right]_{15}^{0}}{e^{-\frac{10}{20}}}=\frac{e^{-\frac{15}{20}}}{e^{-\frac{10}{20}}}=e^{-\frac{5}{20}}\approx 0.77$$

4) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}0.05xe^{-\frac{x}{20}}dx=\lim_{u\to+\infty}\int_0^u 0.05xe^{-\frac{x}{20}}dx$

Όμως

$$\int_0^u 0.05xe^{-\frac{x}{20}}dx=0.05\int_0^u x\left(-20e^{-\frac{x}{20}}\right)'dx=-\int_0^u x\left(e^{-\frac{x}{20}}\right)'dx=\int_u^0 x\left(e^{-\frac{x}{20}}\right)'dx$$

$$=\left[xe^{-\frac{x}{20}}\right]_u^0-\int_u^0 e^{-\frac{x}{20}}dx=-ue^{-\frac{u}{20}}-\int_u^0\left(-20e^{-\frac{x}{20}}\right)'dx$$

$$=-ue^{-\frac{u}{20}}+20\int_u^0\left(e^{-\frac{x}{20}}\right)'dx=-ue^{-\frac{u}{20}}+20\left[e^{-\frac{x}{20}}\right]_u^0$$

$$=-ue^{-\frac{u}{20}}+20\left(1-e^{-\frac{u}{20}}\right)$$

Έχουμε:

$$\lim_{u\to+\infty} e^{-\frac{u}{20}} = 0 \text{ και } \lim_{u\to+\infty} ue^{-\frac{u}{20}} = \lim_{u\to+\infty} \frac{u}{e^{\frac{u}{20}}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{20}e^{\frac{u}{20}}} = 0$$

Επομένως $EX = 20$.
Γνωρίζουμε ότι η τυπική απόκλιση σ είναι η τετραγωνική ρίζα της διασποράς $VarX$.
Για τη διασπορά ισχύει $VarX = EX^2 - (EX)^2$. Υπολογίζουμε αρχικά την μέση τιμή της X^2.

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} 0.05x^2 e^{-\frac{x}{20}}dx = \lim_{u\to+\infty}\int_0^u 0.05x^2 e^{-\frac{x}{20}}dx .$$

Έχουμε:

$$\int_0^u 0.05x^2e^{-\frac{x}{20}}dx = 0.05\int_0^u x^2\left(-20e^{-\frac{x}{20}}\right)' dx = -\int_0^u x^2\left(e^{-\frac{x}{20}}\right)' dx = \int_u^0 x^2\left(e^{-\frac{x}{20}}\right)' dx$$

$$= \left[x^2e^{-\frac{x}{20}}\right]_u^0 - 2\int_u^0 xe^{-\frac{x}{20}}dx = \left[x^2e^{-\frac{x}{20}}\right]_u^0 + 2\int_0^u xe^{-\frac{x}{20}}dx$$

$$= -u^2e^{-\frac{u}{20}} + 2\cdot(20)\int_0^u 0.05xe^{-\frac{x}{20}}dx$$

Επειδή

$$\lim_{u\to+\infty} u^2e^{-\frac{u}{20}} = \lim_{u\to+\infty}\frac{u^2}{e^{\frac{u}{20}}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{u\to+\infty}\frac{2u}{\frac{1}{20}e^{\frac{u}{20}}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{u\to+\infty}\frac{2}{\frac{1}{400}e^{\frac{u}{20}}} = 0$$

προκύπτει

$$EX^2 = \lim_{u\to+\infty}\int_0^u 0.05x^2e^{-\frac{x}{20}}dx = \lim_{u\to+\infty}(-u^2e^{-\frac{u}{20}} + 2\cdot(20)\int_0^u 0.05xe^{-\frac{x}{20}}dx) = 40EX = 800$$

Επομένως

$$VarX = EX^2 - (EX)^2 = 800 - 400 = 400 \Rightarrow \sigma = 20$$

Άσκηση 6. (10 μονάδες)

Οι τιμές της χοληστερόλης σε κάποιο πληθυσμό είναι τιμές τυχαίας μεταβλητής X που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 200 gr/ dl και τυπική απόκλιση 65 gr/ dl.

1. (Μον. 5) Να υπολογισθεί το ποσοστό των ατόμων με μετρήσεις χοληστερόλης μεταξύ 150 και 300 gr/ dl.

2. (Μον. 5) Να βρεθεί εκείνη η τιμή χοληστερόλης για την οποία το 80% του πληθυσμού να έχει μικρότερη μέτρηση από αυτήν.

Υπόδειξη. Θα χρειαστεί να μελετήσετε από το κεφάλαιο 4 την παράγραφο 4.5 (κανονική κατανομή), καθώς επίσης και τον πίνακα της σελίδας 178. Μπορείτε επίσης να μελετήσετε από το Σ.Ε.Υ. , Πιθανότητες 2- Λυμένες ασκήσεις .

Λύση

1) Γνωρίζουμε ότι: $X \sim N(200,65^2) \Rightarrow Z = \dfrac{X-200}{65} \sim N(0,1)$. Επομένως

$$P(150 \le X \le 300) = P\left(\frac{150-200}{65} \le Z \le \frac{300-200}{65}\right) = P(-0.77 \le Z \le 1.54)$$

$$= \Phi(1.54) - \Phi(-0.77) = \Phi(1.54) - [1-\Phi(0,77)]$$

$$= 0.938 - 0.220 = 0.718 = 71,8\%$$

2) Έστω a η τιμή χοληστερόλης κάτω από την οποία βρίσκεται το 80% του πληθυσμού. Δηλαδή $P(X < a) = 0.80$. Επομένως

$$P\left(Z < \frac{a-200}{65}\right) = 0.80 \Rightarrow \Phi\left(\frac{a-200}{65}\right) = 0.80$$

Από τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής προκύπτει ότι

$$\frac{a-200}{65} = 0.84 \Rightarrow a = 200 + (0.84)\cdot(65) = 254.6$$