Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης Γ.Ε.

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας» και αποστέλλει το έντυπο σε δύο μη συρραμμένα αντίγραφα (ή ηλεκτρονικά) στον Καθηγητή-Σύμβουλο. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος συμπληρώνει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας» και στα δύο αντίγραφα και επιστρέφει το ένα στο φοιτητή μαζί με τα σχόλια επί της Γ.Ε., ενώ κρατά το άλλο για το αρχείο του μαζί με το γραπτό σημείωμα του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

*Σε περίπτωση ηλεκτρονικής υποβολής του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου θα πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: Π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 6η Γ.Ε. του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στην ΠΛΗ12 πρέπει να γραφεί: «**ioannou_ge6_plh12.doc**».*

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ονοματεπώνυμο φοιτητή	

Κωδικός ΘΕ	ΠΛΗ 12	Ονοματεπώνυμο Καθηγητή - Σύμβουλου	
Κωδικός Τμήματος		Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής σύμφωνα με το ακ. ημερολόγιο (*ημέρα Τρίτη*)	24/05/2011
Ακ. Έτος	2010-2011	Ημερομηνία αποστολής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
α/α ΓΕ	6	Επισυνάπτεται (*σε περίπτωση που έχει ζητηθεί*) η άδεια παράτασης από τον Συντονιστή;	ΝΑΙ/ΟΧΙ

Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή*: Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα..*

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στον φοιτητή	
Βαθμολογία *(αριθμητικώς, ολογράφως)*	

Υπογραφή **Υπογραφή**

Φοιτητή **Καθηγητή-Συμβούλου**

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 6η

Ημερομηνία Αποστολής στους Φοιτητές: 18 Απριλίου 2011
Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 20 Μαΐου 2011

Προ της επίλυσης κάθε άσκησης, καλό είναι να μελετώνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις των υποδείξεων και παραπομπών στα συγγράμματα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της έκτης εργασίας αναφέρονται στις

Ενότητα 11 (Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων)
Ενότητα 12: 12.1 – 12.4 (Σειρές Fourier)

του συγγράμματος του Ε.Α.Π. «**Λογισμός Μίας Μεταβλητής**» του Γεωρ. Δάσιου

Για την κατανόηση της ύλης αυτής συμβουλευθείτε επίσης το βοηθητικό υλικό το οποίο υπάρχει στη http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm ως εξής:

Συνοδευτικό **Ε**κπαιδευτικό **Υ**λικό:

Λογισμός Ολοκληρώματα 1, Σειρές Fourier

Επί πλέον η εργασία αυτή βασίζεται σε μια επανάληψη των βασικών εννοιών του μαθήματος τις οποίες πρέπει να γνωρίζετε ώστε να προετοιμασθείτε για τις Γραπτές Εξετάσεις. Τμήμα της πρώτης άσκησης αναφέρεται στις εφαρμογές των ολοκληρωμάτων και η δεύτερη άσκηση αναφέρεται στις σειρές Fourier. Με το κεφάλαιο αυτό καλύπτεται η ύλη της ΠΛΗ 12. Οι υπόλοιπες ασκήσεις είναι επαναληπτικές στην ύλη της Γραμμικής Άλγεβρας, του Λογισμού μίας μεταβλητής και των Πιθανοτήτων.

Άσκηση 1 (25 μον.)
(Για το ερώτημα (α) συμβουλευθείτε τα εδάφια 11.2 και 11.4 και για το (β) το εδάφιο 11.1 του συγγράμματος του Ε.Α.Π. «**Λογισμός Μίας Μεταβλητής**» καθώς και το Ολοκληρώματα Ι του ΣΕΥ).

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^4+27}, x\in \mathbf{R}$ και $g(x)=\dfrac{\sqrt{x},}{4}$ $x\geq 0.$

α) (5 μον.) Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της (παράπλευρης) επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του γραφήματος της g γύρω από τον άξονα των x για $1\leq x\leq 3$.

β) (5 μον.) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f καθώς και την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

γ) (6 μον.) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τα γραφήματα των συναρτήσεων f και g και τις κατακόρυφες ευθείες x=1 και x=3.

Υπόδειξη: Προκειμένου να συγκρίνετε τις συναρτήσεις f και g στο διάστημα [1,3], χρησιμοποιήστε το ερώτημα (β).

δ) (3 μον.) Υπολογίστε τη συνάρτηση $h(x)=\int 4f(x)dx$.

ε) (6 μον.) Να δείξετε ότι για κάθε $a,b\in\mathbf{R}$ έχουμε: $\left|\ln\left(\dfrac{b^4+27}{a^4+27}\right)\right|\leq |b-a|$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση του ερωτήματος (δ), το Θεώρημα μέσης τιμής και το ερώτημα (β).

Λύση
α) Σύμφωνα με τους τύπους (11.3) και (11.8) του συγγράμματος του Ε.Α.Π. «**Λογισμός Μίας Μεταβλητής**» ο ζητούμενος όγκος V και το ζητούμενο εμβαδόν E υπολογίζονται ως εξής:

$$V=\int_1^3 \pi g(x)^2\,dx=\int_1^3 \frac{\pi x}{16}dx=[\frac{\pi x^2}{32}]_1^3=\frac{\pi .3^2}{32}-\frac{\pi .1^2}{32}=\frac{\pi}{4}.$$

$$S=2\pi\int_1^3 g(x)\sqrt{1+g'(x)^2}\,dx=2\pi\int_1^3\frac{\sqrt{x}}{4}\sqrt{1+(\frac{1}{4}\frac{1}{2\sqrt{x}})^2}\,dx=\frac{\pi}{2}\int_1^3\sqrt{x(1+\frac{1}{64x})}dx=$$
$$=\frac{\pi}{2}\int_1^3\sqrt{x+\frac{1}{64}}dx.$$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u=x+\dfrac{1}{64}$, $du=dx$ οπότε το αντίστοιχο αόριστο ολοκήρωμα γίνεται

$$\int\sqrt{x+\frac{1}{64}}dx=\int\sqrt{u}du=\frac{2}{3}\sqrt{u^3}+c=\frac{2}{3}\sqrt{(x+\frac{1}{64})^3}+c.$$

Συνεπώς έχουμε:

$$E=\frac{\pi}{2}\int_1^3\sqrt{x+\frac{1}{64}}dx=\frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{3}\sqrt{(x+\frac{1}{64})^3}\right]_1^3=\frac{\pi}{3}\left(\left(\frac{193}{64}\right)^{3/2}-\left(\frac{65}{64}\right)^{3/2}\right)\approx 4{,}412127....$$

β) Υπολογίζουμε την παράγωγο της f:

$$f'(x)=\frac{(x^3)'.(x^4+27)-x^3(x^4+27)'}{(x^4+27)^2}=\frac{3x^2(x^4+27)-x^3.4x^3}{(x^4+27)^2}=\frac{x^2(81-x^4)}{(x^4+27)^2}=$$

$$=\frac{x^2(9+x^2)(3-x)(3+x)}{(x^4+27)^2}.$$

Παρατηρούμε ότι $f'(x)>0$ στα διαστήματα (–3,0) και (0,3) και $f'(x)<0$ στα διαστήματα (–∞,–3) και (3,+∞) (το 0 άρα που είναι ρίζα της παραγώγου δεν επηρεάζει την μονοτονία). Συνεπώς η *f* είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-3,3)$ και γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-3)$ και $(3,+\infty)$. Επίσης έχουμε:

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x^4(1+\frac{27}{x^4})}=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x(1+\frac{27}{x^4})}=0$, $f(x)>0$ για $x>0$, $f(x)<0$ για $x<0$ και $f(0)=0$.

Άρα η μέγιστη τιμή της *f* είναι για *x*=3 ίση με $f(3)=\dfrac{3^3}{3^4+27}=\dfrac{1}{4}$ και η ελάχιστη τιμή για *x*=–3 ίση με $f(-3)=\dfrac{-3^3}{3^4+27}=-\dfrac{1}{4}$.

Συμπεραίνουμε άρα ότι

$$-\frac{1}{4}\le f(x)\le\frac{1}{4}$$

για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

γ) Από το ερώτημα (β) συμπεραίνουμε ότι για κάθε $x\ge 1$ έχουμε $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{4}\ge\dfrac{1}{4}\ge f(x)$, άρα το γράφημα της *g* στο διάστημα [1,3] βρίσκεται πάνω από αυτό της *f*. Το ζητούμενο εμβαδόν άρα είναι

$$E=\int_1^3(g(x)-f(x))dx=\int_1^3\left(\frac{\sqrt{x}}{4}-\frac{x^3}{x^4+27}\right)dx=\int_1^3\frac{\sqrt{x}}{4}dx-\int_1^3\frac{x^3}{x^4+27}dx.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα και είναι

$$\int_1^3\frac{\sqrt{x}}{4}dx=\left[\frac{1}{4}.\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^3=\frac{1}{6}(3\sqrt{3}-1).$$

Στο δεύτερο εκτελούμε την αντικατάσταση $u=x^4+27,\ du=4x^3dx$ και έχουμε

$$\int\frac{x^3}{x^4+27}dx=\frac{1}{4}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{4}\ln|u|+c=\frac{1}{4}\ln\left|x^4+27\right|+c \text{ άρα}$$

$$\int_1^3\frac{x^3}{x^4+27}dx=\left[\frac{1}{4}\ln(x^4+27)\right]_1^3=\frac{1}{4}\ln 108-\frac{1}{4}\ln 28=\frac{1}{4}\ln\frac{108}{28}=\frac{1}{4}\ln\frac{27}{7}.$$

Συνεπώς

$$E=\frac{1}{6}(3\sqrt{3}-1)-\frac{1}{4}\ln\frac{27}{7}\approx 0{,}361877\ldots$$

δ)

$$h(x)=\int 4f(x)dx=\int\frac{4x^3}{x^4+27}dx=\int\frac{(x^4+27)'}{x^4+27}dx=\int\frac{d(x^4+27)}{x^4+27}=\ln(x^4+27)+C$$

ε) Θεωρούμε τη συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος $h(x) = \ln(x^4 + 27) + C, x \in \mathbf{R}$. Έχουμε

$$h'(x) = \frac{(x^4+27)'}{(x^4+27)} + C' = \frac{4x^3}{x^4+27} = 4f(x)$$

και άρα από το ερώτημα (β) συμπεραίνουμε ότι

$$|h'(x)| \le 1$$

για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Αν τώρα $a, b \in \mathbf{R}$ τότε από το θεώρημα μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχει c μεταξύ των a και b τέτοιο ώστε $h(b) - h(a) = h'(c).(b-a)$. Άρα

$$|h(b) - h(a)| = |h'(c)|.|b-a| \le |b-a|.$$

Παρατηρώντας τώρα ότι $h(b) - h(a) = \ln(b^4+27) - \ln(a^4+27) = \ln\left(\frac{b^4+27}{a^4+27}\right)$ έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 2 (20 μον.)
(Συμβουλευθείτε τα εδάφια 12.2 και 12.4 του συγγράμματος του Ε.Α.Π. «**Λογισμός Μίας Μεταβλητής**»)

Δίνεται η 2π-περιοδική συνάρτηση f με $f(x) = e^x$ για $-\pi \le x < \pi$.

α) (5 μον.) Ελέγχοντας τη συνέχεια της συνάρτησης στο σημείο π, να βρείτε όλα τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

β) (10 μον.) Να βρείτε τη σειρά Fourier της f.

γ) (5 μον.) Μελετώντας την παραπάνω σειρά Fourier στο σημείο $x = \pi$ να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Υπόδειξη: Λάβετε υπ' όψη τη σχέση (12.31) σελ. 194 του συγγράμματος του Ε.Α.Π. «**Λογισμός Μίας Μεταβλητής**».

Λύση
α) Η f είναι συνεχής, ως εκθετική, στο ανοικτό διάστημα $(-\pi, \pi)$ και άρα αφού είναι 2π-περιοδική σε κάθε ανοικτό διάστημα της μορφής $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Για το σημείο $x=\pi$ έχουμε $\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} e^x = e^\pi$. Για να βρούμε όμως το όριο από τα δεξιά παρατηρούμε ότι αν $\pi \le x < 3\pi$ τότε $f(x) = f(x-2\pi) = e^{x-2\pi}$ καθώς το $x-2\pi$ βρίσκεται στο διάστημα $[-\pi, \pi)$. Άρα $\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} e^{x-2\pi} = e^{\pi-2\pi} = e^{-\pi} \ne e^\pi$.

Συνεπώς η f είναι ασυνεχής στο $x=\pi$ και άρα λόγω περιοδικότητας και σε όλα τα $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

β) Σύμφωνα με τους τύπους (12.17)-(12.20) σελ. 190 του συγγράμματος του Ε.Α.Π. «**Λογισμός Μίας Μεταβλητής**» η σειρά Fourier της 2π-περιοδικής συνάρτησης f είναι

$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ όπου

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx dx$$

Τα παραπάνω ολοκληρώματα μπορούν να υπολογιστούν εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση (και στα δύο) ως εξής:

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} (e^x)'\cos nx dx = [e^x \cos nx]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^x (\cos nx)' dx =$$

$$= e^{\pi}\cos n\pi - e^{-\pi}\cos(-n\pi) + \int_{-\pi}^{\pi} e^x n \sin nx dx = (-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi}) + n\pi b_n$$

και

$$\pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} (e^x)'\sin nx dx = [e^x \sin nx]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^x (\sin nx)' dx =$$

$$= e^{\pi}\sin n\pi - e^{-\pi}\sin(-n\pi) - \int_{-\pi}^{\pi} e^x n \cos nx dx = -n\pi a_n \ .$$

Συνεπώς

$$a_n = \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi} + nb_n, \quad b_n = -na_n$$

και

$$a_n = \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(n^2+1)}, \quad b_n = -n\frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(n^2+1)}.$$

Άρα η σειρά Fourier της f είναι η:

$$\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}(\cos nx - n\sin nx)\right).$$

γ) Η συνάρτηση f είναι κατά τμήματα συνεχής σύμφωνα με το ερώτημα (α) και επιπλέον έχει συνεχή και φραγμένη παράγωγο στο (–π, π). Συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την σχέση (12.31) του συγγράμματος του Ε.Α.Π. «**Λογισμός Μίας Μεταβλητής**» και να συμπεράνουμε ότι η σειρά Fourier της συγκλίνει για x=π στην τιμή

$$\frac{1}{2}(f(\pi+)+f(\pi-))=\frac{1}{2}(\lim_{x\to\pi^+} f(x)+\lim_{x\to\pi^-} f(x))=\frac{1}{2}(e^{\pi}+e^{-\pi}).$$

Θέτοντας άρα x=π στη σειρά του ερωτήματος (β) βρίσκουμε

$$\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}(\cos n\pi-n\sin n\pi)\right)=\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}.$$

Συνεπώς αφού $\cos n\pi-n\sin n\pi=(-1)^n$ βρίσκουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=\frac{\pi}{2}.\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}-\frac{1}{2}\approx 1.076674047...$$

Άσκηση 3 (15 μον.)

Έστω ο τετραγωνικός πίνακας $A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\-2&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}$.

α) (10 μον.) Να βρεθούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

β) (5 μον.) Είναι ο πίνακας A διαγωνοποιήσιμος; Εάν ναι, να βρεθεί ένας αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε $A=PDP^{-1}$, όπου ο D είναι ένας διαγώνιος πίνακας.

Λύση

α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A δίνεται από τη σχέση (αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς την πρώτη στήλη):

$$\chi_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}3-\lambda&1&-1\\-2&1-\lambda&2\\0&1&2-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(3-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\1&2-\lambda\end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix}1&-1\\1&2-\lambda\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}1&-1\\1-\lambda&2\end{vmatrix}=$$

$$=(3-\lambda)((1-\lambda)(2-\lambda)-2)+2(2-\lambda-(-1))$$

$$=(3-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)-2(3-\lambda)+2(3-\lambda)=-(\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\chi_A(\lambda)=0$. Επομένως είναι οι εξής:

$$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$$

Για να βρούμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα θα μελετήσουμε τα συστήματα:

$$A\mathbf{x}=\lambda_i\mathbf{x},\ \ i=1,2,3.$$

Έχουμε:

Α) Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=1$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα προκύπτει από τη λύση του παρακάτω συστήματος:

$$A\mathbf{x}=\mathbf{x}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3&1&-1\\-2&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1+x_2-x_3=x_1\\-2x_1+x_2+2x_3=x_2\\x_2+2x_3=x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=0\\-2x_1+2x_3=0\\x_2+x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=-x_3\end{cases},\quad x_3\in\mathbf{R}.$$

Κατά συνέπεια το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1=1$ είναι το: $V_{\lambda_1}=\left\{\begin{pmatrix}x_3\\-x_3\\x_3\end{pmatrix}:x_3\in\mathbf{R}\setminus\{0\}\right\}=\left\{k\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}:k\in\mathbf{R}\setminus\{0\}\right\}$. Θεωρούμε το διάνυσμα $\mathbf{v_1}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ από το σύνολο V_{λ_1} ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_1=1$.

Β) Για την ιδιοτιμή $\lambda_2=2$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα προκύπτει από τη λύση του παρακάτω συστήματος:

$$A\mathbf{x}=2\mathbf{x}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3&1&-1\\-2&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1+x_2-x_3=2x_1\\-2x_1+x_2+2x_3=2x_2\\x_2+2x_3=2x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0\\-2x_1-x_2+2x_3=0\\x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=0\end{cases},\quad x_3\in\mathbf{R}.$$

Κατά συνέπεια το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2=2$ είναι το: $V_{\lambda_2}=\left\{\begin{pmatrix}x_3\\0\\x_3\end{pmatrix}:x_3\in\mathbf{R}\setminus\{0\}\right\}=\left\{k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}:k\in\mathbf{R}\setminus\{0\}\right\}$. Θεωρούμε το διάνυσμα $\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ από το σύνολο V_{λ_2} ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_2=2$.

Γ) Για την ιδιοτιμή $\lambda_3=3$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα προκύπτει από τη λύση του παρακάτω συστήματος:

$$A\mathbf{x}=3\mathbf{x}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3&1&-1\\-2&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_1+x_2-x_3=3x_1\\-2x_1+x_2+2x_3=3x_2\\x_2+2x_3=3x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2-x_3=0\\-2x_1-2x_2+2x_3=0\\x_2-x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=x_3\end{cases},\quad x_3\in\mathbf{R}.$$

Κατά συνέπεια το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_3=3$ είναι το: $V_{\lambda_3}=\left\{\begin{pmatrix}0\\x_3\\x_3\end{pmatrix}:x_3\in\mathbf{R}\setminus\{0\}\right\}=\left\{k\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}:k\in\mathbf{R}\setminus\{0\}\right\}$. Θεωρούμε το διάνυσμα $\mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ από το σύνολο V_{λ_3} ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_3=3$.

β) Σύμφωνα με τη Βιβλίο ΕΑΠ σελ. 284, Παρατηρήσεις 1,2, επειδή ο πίνακας *A*, έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι διαγωνοποιήσιμος με πίνακα ομοιότητας *P*, ο οποίος προκύπτει αν βάλουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα ως στήλες. Έτσι έχουμε:

$$P=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

και αντίστοιχο

$$D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι $A=PDP^{-1}$.

Άσκηση 4 (10 μον.)

Έστω η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ με πίνακα αναπαράστασης ως προς την κανονική βάση του $\mathbf{R}^3$ τον

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&4&3\\1&4&\lambda\end{pmatrix}$$

και το διάνυσμα $\mathbf{v}=(6,10,\mu)\in\mathbf{R}^3$.

Να βρεθεί για ποιες τιμές των παραμέτρων λ,μ το $\mathbf{v}$ ανήκει στο Im*f*. Σε όλες τις περιπτώσεις που αυτό συμβαίνει να βρείτε όλα τα αντίστοιχα $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$ για τα οποία $f(x_1,x_2,x_3)=\mathbf{v}$.

Λύση

Η συνθήκη $f(x_1,x_2,x_3)=\mathbf{v}$ είναι ισοδύναμη με την

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\1&4&3\\1&4&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\10\\\mu\end{pmatrix}$$

δηλαδή με το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=6\\x_1+4x_2+3x_3=10\\x_1+4x_2+\lambda x_3=\mu\end{cases}\quad(1)$$

Συνεπώς το $\mathbf{v}$ ανήκει στο Im*f* αν και μόνο αν το παραπάνω σύστημα είναι συμβιβαστό, οι δε αντίστοιχες λύσεις του αποτελούν και τα ζητούμενα $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$.

Δημιουργούμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος:

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&6\\1&4&3&10\\1&4&\lambda&\mu\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\leftarrow r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&6\\0&2&2&4\\1&4&\lambda&\mu\end{array}\right)\xrightarrow{r_3\leftarrow r_3-r_1,\ r_2\leftarrow\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&6\\0&1&1&2\\0&2&\lambda-1&\mu-6\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3\leftarrow r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&6\\0&1&1&2\\0&0&\lambda-3&\mu-10\end{array}\right).$$

Από τον παραπάνω κλιμακωτό πίνακα προκύπτουν τα εξής:

1) Το σύστημα έχει μια ακριβώς λύση αν $\lambda-3\neq 0.$ δηλαδή $\lambda\neq 3.$
2) Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις όταν $\lambda-3=0$ και $\mu-10=0$ δηλαδή $\lambda=3$ και $\mu=10.$
3) Το σύστημα δεν έχει λύση όταν $\lambda-3=0$ και $\mu\neq 10$ δηλαδή όταν $\lambda=3$ και $\mu\neq 10$.

Συνεπώς το **v** ανήκει στο Im*f* αν και μόνο αν είτε $\lambda\neq 3$ ή $\lambda=3$ και $\mu=10$.

Στην πρώτη περίπτωση που $\lambda\neq 3$ (περίπτωση (1)) υπάρχει μοναδικό $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$ με $f(x_1,x_2,x_3)=\mathbf{v}$ και βρίσκεται ως εξής: Από την (α) έχουμε το σύστημα

$$\left\{\begin{aligned}x_1+2x_2+x_3&=6\\x_2+x_3&=2\\(\lambda-3)x_3&=\mu-10\end{aligned}\right.\qquad(2)$$

Με αντικατάσταση ξεκινώντας από το x_3 έχουμε:

$$x_3=\frac{\mu-10}{\lambda-3},\ x_2=\frac{4+2\lambda-\mu}{\lambda-3},\ x_1=\frac{-16+2\lambda+\mu}{\lambda-3}.$$

Άρα το ζητούμενο (μοναδικό) διάνυσμα είναι το

$$(x_1,x_2,x_3)=(\frac{-16+2\lambda+\mu}{\lambda-3},\frac{4+2\lambda-\mu}{\lambda-3},\frac{\mu-10}{\lambda-3}).$$

Στην δεύτερη περίπτωση που $\lambda=3$ και $\mu=10$ (περίπτωση (2)) υπάρχουν άπειρα $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$ με $f(x_1,x_2,x_3)=\mathbf{v}$ και βρίσκονται ως εξής: Διαγράφοντας την τελευταία εξίσωση, από το σύστημα (2) έχουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned}x_1+2x_2+x_3&=6\\x_2+x_3&=2\end{aligned}\Leftrightarrow\begin{aligned}x_1+2(2-x_3)+x_3&=6\\x_2&=2-x_3\end{aligned}\Leftrightarrow\begin{aligned}x_1&=2+x_3\\x_2&=2-x_3\end{aligned}$$

οπότε τα ζητούμενα (άπειρα) (x_1,x_2,x_3) είναι τα

$$(x_1,x_2,x_3)=(2+x_3,2-x_3,x_3)=(2,2,0)+x_3(1,-1,1),\ x_3\in\mathbf{R}.$$

Άσκηση 5 (10 μον.)

α) (5 μον.) Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{4n}{n}\frac{1}{10^n}$ **ii)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{3n+7}{5n^3+3n^2-2}}$

β) (5 μον.) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια

i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{3\sin 2x - 2\sin 3x}{x^3}$ **ii)** $\lim_{x\to +\infty} (\sqrt[4]{x^4 + 5x^3 + 1} - x)$

Υπόδειξη: Για το βii) μπορείτε είτε να χρησιμοποιήσετε την ταυτότητα $A^4 - B^4 = (A-B)(A^3 + A^2B + AB^2 + B^3)$ ή να θέσετε $y = \dfrac{1}{x}$ και να εφαρμόσετε κανόνα L'Hospital.

Λύση

α) i) Εφόσον $\dbinom{4n}{n} = \dfrac{(4n)!}{n!.(3n)!}$ θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του λόγου, για $a_n = \dfrac{(4n)!}{n!.(3n)!}\dfrac{1}{10^n}$.

Έχουμε

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\dfrac{(4n+4)!}{(n+1)!.(3n+3)!}\dfrac{1}{10^{n+1}}}{\dfrac{(4n)!}{n!.(3n)!}\dfrac{1}{10^n}} = \frac{(4n+4)!n!(3n)!10^n}{(4n)!(n+1)!(3n+3)!10^{n+1}} = \frac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)}{10(n+1)(3n+3)(3n+2)(3n+1)}$$

άρα

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{(4+\frac{4}{n})(4+\frac{3}{n})(4+\frac{2}{n})(4+\frac{1}{n})}{10(1+\frac{1}{n})(3+\frac{3}{n})(3+\frac{2}{n})(3+\frac{1}{n})} = \frac{4^4}{10.3^3} = \frac{256}{270} < 1 .$$

Συνεπώς η σειρά συγκλίνει.

ii) Θέτοντας $b_n = \sqrt{\dfrac{3n+7}{5n^3 + 3n^2 - 2}}$ έχουμε

$$b_n = \sqrt{\frac{n}{n^3}}\sqrt{\frac{3+\frac{7}{n}}{5+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^3}}} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{3+\frac{7}{n}}{5+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^3}}}.$$

Θα συγκρίνουμε άρα την σειρά με την $\sum c_n = \sum \dfrac{1}{n}$ η οποία γνωρίζουμε ότι αποκλίνει, εφαρμόζοντας το γενικευμένο κριτήριο σύγκρισης σειρών (βλ. παράγραφο 3.2.2 του κεφαλαίου Σειρές του ΣΕΥ Λογισμός) στις σειρές με γενικούς όρους b_n και c_n.

Έχουμε $b_n, c_n > 0$ και $\lim \dfrac{b_n}{c_n} = \lim \sqrt{\dfrac{3+\frac{7}{n}}{5+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^3}}} = \sqrt{\dfrac{3}{5}} > 0$. Συνεπώς η δοθείσα σειρά αποκλίνει.

β) i) (1ος τρόπος) Θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα L'Hospital, παραγωγίζοντας αριθμητή και παρονομαστή μέχρι να φτάσουμε σε γνωστό ή εύκολα υπολογίσιμο όριο. Θέτοντας άρα $f(x) = 3\sin 2x - 2\sin 3x,\ g(x) = x^3$ έχουμε $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ άρα το $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ είναι απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{0}{0}$.

Έχουμε $f'(x) = 6\cos 2x - 6\cos 3x,\ g'(x) = 3x^2,\ \lim_{x\to 0} f'(x) = 6 - 6 = 0, \lim_{x\to 0} g'(x) = 0$ άρα και το $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$, $f''(x)=-12\sin 2x+18\sin 3x,\ g''(x)=6x$,

άρα και το $\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ και $f'''(x)=-24\cos 2x+54\cos 3x,\ g'''(x)=6$ άρα

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{g'''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-24\cos 2x+54\cos 3x}{6}=\frac{54-24}{6}=5.$$

Συνεπώς εφαρμόζοντας τον κανόνα L'Hospital τρεις φορές συμπεραίνουμε ότι το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ υπάρχει και είναι ίσο με 5.

(2^{ος} τρόπος) Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Taylor για την συνάρτηση sinx έχουμε

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}-\ldots$$

συμπεραίνουμε ότι

$$3\sin 2x-2\sin 3x=3(2x-\frac{(2x)^3}{6}+\frac{(2x)^5}{5!}-\ldots)-2(3x-\frac{(3x)^3}{6}+\frac{(3x)^5}{5!}-\ldots)=$$

$$=\frac{2.3^3-3.2^3}{6}x^3-\frac{2.3^5-3.2^5}{5!}x^5+\ldots.$$

άρα

$$\frac{3\sin 2x-2\sin 3x}{x^3}=5-\frac{2.3^5-3.2^5}{5!}x^2+\ldots.$$

και

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 2x-2\sin 3x}{x^3}=5.$$

ii) (1^{ος} τρόπος) Θέτοντας $A=\sqrt[4]{x^4+5x^3+1},\ B=x$ έχουμε

$$5x^3+1=A^4-B^4=(A-B)(A^3+A^2B+AB^2+B^3)$$

άρα

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[4]{x^4+5x^3+1}-x)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3+1}{(\sqrt[4]{x^4+5x^3+1})^3+(\sqrt[4]{x^4+5x^3+1})^2x+\sqrt[4]{x^4+5x^3+1}x^2+x^3}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5+\frac{1}{x^3}}{(\sqrt[4]{1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^4}})^3+(\sqrt[4]{1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^4}})^2+\sqrt[4]{1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^4}}+1}=\frac{5}{4}.$$

(2^{ος} τρόπος) Το όριο είναι απροσδιόριστη μορφή $+\infty-(+\infty)$ την οποία μετατρέπουμε σε $\frac{0}{0}$ ως εξής:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[4]{x^4+5x^3+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^4}}-1}{\frac{1}{x}}.$$

Στη συνέχεια εκτελούμε την αντικατάσταση $y=\frac{1}{x}$ και εφαρμόζουμε τον κανόνα L'Hospital (ή βρίσκουμε την παράγωγο στο 0 της αντίστοιχης συνάρτησης) και έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[4]{x^4+5x^3+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}(x\sqrt[4]{1+5\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{1+5\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}-1}{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{y\to0^+}\frac{\sqrt[4]{1+5y+y^4}-1}{y}=\lim_{y\to0^+}\frac{(\sqrt[4]{1+5y+y^4})'}{(y)'}=\lim_{y\to0^+}\frac{1}{4}\frac{5+4y^3}{(1+5y+y^4)^{3/4}}=\frac{5}{4}.$$

Άσκηση 6 (20 μον.)

α) Ένα συρτάρι περιέχει έξι διαφορετικά νομίσματα, τα $N_1, N_2, \ldots, N_6$. Η πιθανότητα να εμφανιστούν γράμματα αν στρίψουμε το νόμισμα N_k είναι ίση με $\frac{k-1}{5}$, $k=1,2,\ldots,6$ (π.χ. το νόμισμα N_1 έχει και στις δύο όψεις κορώνα και το N_6 έχει και στις δύο όψεις γράμματα κλπ). Διαλέγουμε στην τύχη ένα νόμισμα από το συρτάρι και το στρίβουμε δύο φορές. Θεωρούμε ως Α το ενδεχόμενο στην πρώτη ρίψη να εμφανιστούν γράμματα και ως Β το ενδεχόμενο στη δεύτερη ρίψη να εμφανιστεί κορώνα.

(i) (5 μον.) Να βρείτε την πιθανότητα να έχουμε διαλέξει το νόμισμα N_k (για καθεμία από τις τιμές $k=1,2,\ldots,6$) εάν είναι γνωστό ότι στην πρώτη ρίψη εμφανίστηκαν γράμματα.

(ii) (5 μον.) Να βρείτε και να συγκρίνετε τις πιθανότητες $P(\mathrm{B}|\mathrm{A})$ και $P(\mathrm{B})$. Είναι τα ενδεχόμενα Α και Β ανεξάρτητα; Μπορείτε να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα;

Υπόδειξη: Θεωρείστε το ενδεχόμενο E_k να διαλέξαμε το νόμισμα N_k, k=1,2,..,6 και εφαρμόστε Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας και τον τύπο του Bayes.

β) Η ποσότητα διοξειδίου του άνθρακα που παράγεται σε μια χημική αντίδραση είναι τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{αν } x<1\\ ax^b & \text{αν } x\geq 1\end{cases}$$

όπου $a,b\in\mathbf{R}$, και μέση τιμή ίση με 1,5 gr.

i) (5 μον.) Να προσδιορίσετε τα a,b και τη διασπορά της παραπάνω τυχαίας μεταβλητής.

ii) (5 μον.) Να βρείτε την πιθανότητα να παρήχθησαν το πολύ 4 gr διοξειδίου του άνθρακα αν είναι γνωστό ότι παρήχθησαν τουλάχιστον 2 gr.

Λύση

α) Έστω E_k το ενδεχόμενο να διαλέξαμε το νόμισμα N_k, k=1,2,..,6. Τα ενδεχόμενα $E_1,\ldots,E_6$ αποτελούν διαμέριση του δειγματικού χώρου, $P(E_k)$=1/6 και επιπλέον μας δίδεται ότι

$$P(A|E_k)=\frac{k-1}{5},\ k=1,2,\ldots,6.$$

Αφού και η δεύτερη ρίψη γίνεται με το ίδιο νόμισμα συμπεραίνουμε ότι

$$P(B|E_k)=1-\frac{k-1}{5}=\frac{6-k}{5},\ k=1,2,\ldots,6$$

και αφού από τη στιγμή που έχουμε διαλέξει το νόμισμα τα δύο αποτελέσματα των ρίψεων είναι ανεξάρτητα, έχουμε επίσης:

$$P(A\cap B|E_k)=\frac{k-1}{5}.\frac{6-k}{5}=\frac{(k-1)(6-k)}{25},\ k=1,2,\ldots,6.$$

(i) Εδώ μας ζητείται να βρούμε το $P(E_k|A)$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας έχουμε

$$P(A)=\sum_{k=1}^{6}P(A|E_k)P(E_k)=\sum_{k=1}^{6}\frac{k-1}{5}.\frac{1}{6}=(\frac{0}{5}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{5}{5}).\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

και άρα από τον τύπο του Bayes

$$P(E_k|A)=\frac{P(A|E_k)P(E_k)}{P(A)}=\frac{\frac{k-1}{5}.\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{k-1}{15},k=1,2,\ldots,6.$$

Έτσι $P(E_1|A)=0$ (προφανώς αφού ήρθαν γράμματα δεν μπορεί να είχαμε διαλέξει το νόμισμα N_1 με τις δύο κορώνες), $P(E_2|A)=\frac{1}{15}$, $P(E_3|A)=\frac{2}{15}$, $P(E_4|A)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$, $P(E_5|A)=\frac{4}{15}$, $P(E_6|A)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

(ii) Όπως και στο (α) έχουμε

$$P(B)=\sum_{k=1}^{6}P(B|E_k)P(E_k)=\sum_{k=1}^{6}\frac{6-k}{5}.\frac{1}{6}=(\frac{5}{5}+\frac{4}{5}+\ldots+\frac{0}{5}).\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

και

$$P(A\cap B)=\sum_{k=1}^{6}P(A\cap B|E_k)P(E_k)=\sum_{k=1}^{6}\frac{(6-k)(k-1)}{25}.\frac{1}{6}=(\frac{5.0}{25}+\frac{1.4}{25}+\ldots+\frac{0.5}{25}).\frac{1}{6}=\frac{2}{15}.$$

Άρα

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{2}}=\frac{4}{15}.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι

$$P(B|A)=\frac{4}{15}<\frac{1}{2}=P(B).$$

Άρα τα ενδεχόμενα A και B *δεν* είναι ανεξάρτητα, και μάλιστα η πραγματοποίηση του A *μειώνει* την πιθανότητα πραγματοποίησης του B. Αυτό συμβαίνει διότι το να έρθουν στην πρώτη ρίψη γράμματα μας δίνει κάποια πληροφορία για το ποιο μπορεί να είναι το νόμισμα που επιλέξαμε, όπως φαίνεται από τις διάφορες πιθανότητες που βρήκαμε στο ερώτημα (i). Π.χ. αποκλείεται να είναι το νόμισμα N_1, με σχετικά μικρή πιθανότητα είναι το N_2 κ.ο.κ. Συνεπώς η δεύτερη ρίψη του ιδίου νομίσματος επηρεάζεται και μάλιστα προς την κατεύθυνση να ξαναέρθουν γράμματα, δηλαδή μειώνεται η πιθανότητα να συμβεί το Β.

β) i) Έστω X η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει την εν λόγω ποσότητα διοξειδίου του άνθρακα. Αφού η f είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα πρέπει να έχουμε $f(x) \geq 0, x \in \mathbf{R}$ άρα $a \geq 0$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ άρα $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{+\infty} ax^b dx$.

Το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα είναι

$$\int ax^b dx = \begin{cases} \dfrac{ax^{b+1}}{b+1}, & b \neq -1 \\ a\ln|x|, & b = -1 \end{cases}$$

και καθώς το $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ και $\lim_{x \to +\infty} x^{b+1} = +\infty$ όταν το b+1>0 συμπεραίνουμε ότι πρέπει να έχουμε b<–1 και άρα

$$1 = \int_{1}^{+\infty} ax^b dx = \lim_{y \to +\infty} \left[\frac{ax^{b+1}}{b+1}\right]_1^y = \lim_{y \to +\infty} \frac{a(y^{b+1}-1)}{b+1} = -\frac{a}{b+1}.$$

Επίσης

$$1{,}5 = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{1}^{+\infty} ax^{b+1}dx$$

άρα όπως και παραπάνω συμπεραίνουμε ότι πρέπει να έχουμε b<–2 και

$$1{,}5 = \int_{1}^{+\infty} ax^{b+1}dx = \lim_{y \to +\infty} \left[\frac{ax^{b+2}}{b+2}\right]_1^y = \lim_{y \to +\infty} \frac{a(y^{b+2}-1)}{b+2} = -\frac{a}{b+2}.$$

Έχουμε άρα

$$a = -(b+1) = -1{,}5(b+2) \Leftrightarrow a = 3, b = -4.$$

Επίσης

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{1}^{+\infty} x^2.3x^{-4}dx = \int_{1}^{+\infty} 3x^{-2}dx = \lim_{y \to +\infty} \left[-\frac{3}{x}\right]_1^y = 3$$

οπότε

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 3 - (\frac{3}{2})^2 = \frac{3}{4}.$$

ii) Ζητείται η δεσμευμένη πιθανότητα $P(X \leq 4 | X \geq 2)$. Έχουμε

$$P(X \geq 2) = \int_{2}^{+\infty} 3x^{-4}dx = \lim_{y \to +\infty} \left[-x^{-3}\right]_2^y = \frac{1}{8}$$

και

$$P(\{X \leq 4\} \cap \{X \geq 2\}) = P(2 \leq X \leq 4) = \int_{2}^{4} 3x^{-4}dx = \left[-x^{-3}\right]_2^4 = \frac{1}{8} - \frac{1}{64} = \frac{7}{64}.$$

Συνεπώς έχουμε

$$P(X \leq 4 | X \geq 2) = \frac{P(\{X \geq 2\} \cap \{X \leq 4\})}{P(X \geq 2)} = \frac{7/64}{1/8} = \frac{7}{8}.$$