ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 1 Ιουλίου 2011

Θέμα 1 (15 μονάδες)
Α) Έστω $U = \{(a, b, c) \mid a,b,c\in R,\ a = b = c\}$ και $V = \{(0, d, e) \mid d,e\in R\}$ υποσύνολα του $\mathbf{R}^3$.

i) (3 μον.) Δείξτε ότι τα V, U είναι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbf{R}^3$ και βρείτε μία βάση και τη διάσταση του καθενός.

ii) (2 μον.) Βρείτε τη διάσταση του χώρου $V \cap U$.

iii) (2 μον.) Τι συμπεραίνετε για τη διάστασή του $V + U$.

iv) (1 μον.) Εξετάστε αν ισχύει $\mathbf{R}^3 = V \oplus U$.

Β) Δίνεται το ομογενές σύστημα:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ -x + y + z &= 0 \\ x + 2y + az &= 0 \end{aligned}$$

i) (4 μον.) Για ποία τιμή της παραμέτρου a, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις;
ii) (3 μον.) Για αυτή την συγκεκριμένη τιμή του a, περιγράψατε τον χώρο λύσεων, βρείτε μία βάση του και την διάσταση του.

ΛΥΣΗ:
Α)
i) Έστω ότι $(a,b,c) \in U \Leftrightarrow (a,b,c) = (a,a,a) \Leftrightarrow (a,b,c) = a(1,1,1)$ οπότε έχουμε ότι $U = span\{(1,1,1)\}$ και ως γραμμική θήκη στοιχείων του $\mathbf{R}^3$ είναι υπόχωρος του $\mathbf{R}^3$.
Η διάσταση του χώρου αυτού είναι 1.
Έστω ότι $(0,d,e) \in V \Leftrightarrow (0,d,e) = d(0,1,0) + e(0,0,1)$ οπότε έχουμε ότι $V = span\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ και ως γραμμική θήκη στοιχείων του $\mathbb{R}^3$ είναι υπόχωρος του $\mathbf{R}^3$.
Η διάσταση του χώρου αυτού είναι 2.
ii) Εάν $(a, b, c)\in U\cap V$, τότε $a = b = c$ και $a = 0$ οπότε $U\cap V = \{(0,0,0)\}$ και η διάστασή του είναι 0.
iii) Γνωρίζουμε ότι ισχύει $\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$ από όπου έχουμε ότι $\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) = 1 + 2 = 3$.
iv) Για κάθε $(a, b, c)\in R^3$, $(a, b, c) = (a, a, a) + (0, b-a, c-a)$, όπου $(a, a, a)\in U$ και $(0, b-a, c-a)\in V$.
Επομένως, $R^3 = U+V$. Τελικά, $R^3 = U\oplus V$ αφού $U\cap V = \{(0,0,0)\}$.

Β) Ορίζουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος και τον μετασχηματίζουμε στη κλιμακωτή του μορφή:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\gamma 3 \to \gamma 3 - \gamma 1]{\gamma 2 \to \gamma 2 + \gamma 1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & a-2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\gamma 3 \to \gamma 3 - \gamma 2/2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a - \frac{7}{2} & 0 \end{array}\right]$$

Από όπου για να είναι το σύστημα συμβιβαστό θα πρέπει $a = \frac{7}{2}$.

Εναλλακτικά Υπολογίζουμε, με γραμμοπράξεις, την ορίζουσα των συντελεστών:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & a-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & a - \frac{7}{2} \end{vmatrix} = 2(a - \frac{7}{2})$$

Για να έχουμε άπειρες μη μηδενικές λύσεις, θα πρέπει η ορίζουσα να είναι μηδέν, άρα $a = \frac{7}{2}$.

B) Θέτοντας αυτή την τιμή στο αρχικό σύστημα βλέπουμε από την κλιμακωτή μορφή του πίνακα (ή μετά από γραμμοπράξεις) ότι το σύστημα αυτό μετατρέπεται στο εξής ισοδύναμο:

$$x + y + 2z = 0$$
$$2y + 3z = 0$$

οπότε λύνοντας

$$\begin{aligned} x &= \frac{y}{3} \\ z &= -\frac{2y}{3} \end{aligned} \quad \text{και άρα} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y}{3} \\ y \\ -\frac{2y}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} y \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

. Αυτό το τελευταίο διάνυσμα αποτελεί βάση του χώρου λύσεων, ο οποίος έχει διάσταση 1.

Θέμα 2 (25 μονάδες)

Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = (5x-6y-6z, -x+4y+2z, 3x-6y-4z).$$

i) (2 μον.) Να βρεθεί ο πίνακας *A* που αναπαριστά την *f* ως προς την συνήθη βάση του $\mathbf{R}^3$.

ii) (3 μον.) Να βρεθεί η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα *A*.

iii) (5 μον.) Να βρεθούν βάσεις και οι διαστάσεις των Ker*f* και Im*f*.

iv) (2 μον.) Αντιστρέφεται η απεικόνιση *f* ;

v) (10 μον.) Βρείτε τις ιδιοτιμές, τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα *A* καθώς και μία βάση των αντίστοιχων ιδιοχώρων.

vi) (3 μον.) Είναι ο πίνακας *A* είναι διαγωνοποιήσιμος; Εάν ναι, να βρεθεί πίνακας P και διαγώνιος πίνακας D τέτοιοι ώστε να ισχύει $P^{-1}AP=D$.

Λύση

i) Έχουμε f(1,0,0) = (5,-1,3) , f(0,1,0) = (-6, 4,-6), f(0,0,1) = (-6,2,-4)

οπότε ο πίνακας ως προς την κανονική βάση {(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)} του R^3 είναι

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

ii) $$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 5 & -6 & -6 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to 3\Gamma_1 + \Gamma_3]{\Gamma_2 \to 5\Gamma_1 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 14 & 4 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \to -\frac{3}{7}\Gamma_2 + \Gamma_3} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 14 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\Gamma_1 \to -\Gamma_1 \\ \Gamma_2 \to \frac{1}{14}\Gamma_2 \\ \Gamma_3 \to \frac{7}{2}\Gamma_3}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\Gamma_1 \to 2\Gamma_3 + \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \to -\frac{2}{7}\Gamma_3 + \Gamma_2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \to 4\Gamma_2 + \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$ (ανηγμένη κλιμακωτή μορφή).

iii) Από το ii) προκύπτει ότι αφού η $1^η$ $2^η$ και $3^η$ στήλη του τελικού πίνακα έχουν μη μηδενικά οδηγά στοιχεία η $1^η$ $2^η$ και $3^η$ στήλη του αρχικού πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα που παράγουν τον χώρο εικόνα και αποτελούν βάση του δηλαδή ισχύει

Imf = <(5,-1,3), (-6, 4,-6), (-6,2,-4)>

Και dim Imf = 3.

Από τη σχέση $\dim R^3 = \dim Kerf + \dim Imf \Rightarrow \dim Kerf = 0$. Οπότε ο πυρήνας είναι ο τετριμμένος χώρος με μηδενική διάσταση.

iv) Αφού dimKerf = 0 η απεικόνιση αντιστρέφεται.

v) $$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & -6 & -4-\lambda \end{vmatrix} \overset{\Sigma_2 \to -\Sigma_3 + \Sigma_2}{=} \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -6 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 3 & -2+\lambda & -4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ -2+\lambda & -4-\lambda \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} -1 & 2-\lambda \\ 3 & -2+\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(\lambda^2 - 4) - 6(2\lambda - 4) = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) =$$

$$= -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2, \quad \delta\iota\acute{o}\tau\iota \quad \lambda_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

Τελικά, p(λ)=0 $\Rightarrow$ λ=1 ή λ=2 (διπλή ρίζα) είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A.

<u>Για λ=1 έχουμε :</u>

$$\begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4x_1 - 6x_2 - 6x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_3 = x_1 \ \kappa\alpha\iota \ x_2 = -\frac{1}{3}x_1$$

Άρα, $W_{\lambda=1}=\{(x,-\frac{1}{3}x,x)\,|\,x\in R^*\}=\{x(1,-\frac{1}{3},1)\,|\,x\in R^*\}$ είναι το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ=1 και $B_{\lambda=1}=\{(1,-\frac{1}{3},1)\}$ είναι μια βάση του ιδιοχώρου και η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής είναι 1.

Για λ=2 έχουμε :

$$\begin{pmatrix}3 & -6 & -6\\ -1 & 2 & 2\\ 3 & -6 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix}3x_1-6x_2-6x_3=0\\ -x_1+2x_2+2x_3=0\\ 3x_1-6x_2-6x_3=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow x_1=2x_2+2\mathrm{x}_3$$

Άρα, $W_{\lambda=2}=\{(2x_2+2x_3,x_2,x_3)\,|\,(x_2,x_3)\in R^2-\{(0,0)\}\}=$
$\{x_2(2,1,0)+x_3(2,0,1)\}\,|\,(x_2,x_3)\in R^2-\{(0,0)\}\}$ είναι το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ=2 και $B_{\lambda=2}=\{(2,1,0)\},(2,0,1)\}$ είναι μια βάση του ιδιοχώρου και η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής είναι 2.

ε) Επειδή η γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής είναι ίση με την αλγεβρική της πολλαπλότητα, τα ιδιοδιανύσματα $(1,-\frac{1}{3},1)$, (2,1,0), (2,0,1) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα προκύπτει ότι ο πίνακας A της γραμμικής απεικόνισης f διαγωνοποιείται, δηλαδή $P^{-1}\cdot A\cdot P=D$ όπου

$$P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -\frac{1}{3} & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\text{ και } D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Θέμα 3 (20 μονάδες)

Α) (5 μον.) Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{x^2}}{1-\cos x}$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hospital.

Β) (5 μον.) Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^{x^2}}{1-\cos x}$ χρησιμοποιώντας κατάλληλα αναπτύγματα σειρών Mac-Laurin.

Γ) (5 μον.) Να υπολογισθεί το όριο της ακολουθίας $\alpha_n=\frac{2n+(-1)^n-1}{4n}$.

Δ) (5 μον.) Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum\limits_{\nu=1}^{+\infty}(-1)^\nu\frac{\nu^3}{4^\nu}$.

Λύση

Α)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{x^2}}{1-\cos x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-e^{x^2}\right)'}{(1-\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-2xe^{x^2}}{\sin x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(-2xe^{x^2}\right)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-2e^{x}-4x^2e^{x^2}}{\cos x}=\frac{-2-0}{1}=-2$$

Β)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{x^2}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\ldots\right)}{1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2-\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}-\ldots}{\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\ldots}=\lim_{x\to 0}\frac{-1-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{3!}-\ldots}{\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\ldots}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\frac{1}{2}}=-2$$

Γ) Έχουμε $\alpha_n=\frac{2n+(-1)^n-1}{4n}=\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{4n}-\frac{1}{4n}$. Η ακολουθία $\frac{1}{4n}$ είναι μηδενική και η ακολουθία $(-1)^n$ είναι φραγμένη άρα $\frac{(-1)^n}{4n}\to 0$ ως γινόμενο μηδενικής επί φραγμένης. Οπότε.

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{4n}-\frac{1}{4n}\right)=\frac{1}{2}+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^n}{4n}\right)-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4n}\right)=\frac{1}{2}+0-0=\frac{1}{2}$$

Δ) Θεωρούμε την ακολουθία: $a_\nu=(-1)^\nu\frac{\nu^3}{4^\nu}$ και χρησιμοποιούμε το κριτήριο του λόγου

$$\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right|=\left|\frac{\frac{(\nu+1)^3}{4^{\nu+1}}}{\frac{\nu^3}{4^\nu}}\right|=\frac{4^\nu}{4^{\nu+1}}\cdot\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^3=\frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^3$$

Στη συνέχεια $\lim_{\nu\to+\infty}\frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^3=\frac{1}{4}<1$. Άρα η σειρά $\sum_{\nu=1}^{+\infty}(-1)^\nu\frac{\nu^3}{4^\nu}$ είναι απολύτως συγκλίνουσα οπότε και συγκλίνουσα.

Θέμα 4 (20 μονάδες)

Α) (6 μον.) Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x)=\left(1-\frac{\lambda}{3}\right)x^3-x^2+(\lambda-1)^2x+2011, \lambda\in\mathbb{R}$. Να υπολογισθεί η παράμετρος $\lambda\in\mathbb{R}$ αν γνωρίζουμε ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=1$.

Β) (6 μον.) Να υπολογισθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int\frac{\ln^2 x}{x(\ln x-1)}dx$. (Υπόδειξη: μέθοδος της αντικατάστασης όπου $w=\ln x$).

Γ) (8 μον.) Να υπολογισθεί το αόριστο ολοκλήρωμα $I=\int\frac{1}{x^3}(e^{-\frac{1}{x}}-\cos\frac{1}{x})dx$. (Υπόδειξη: μέθοδος της αντικατάστασης όπου $w=\frac{1}{x}$ και στη συνέχεια παραγοντική ολοκλήρωση.).

Λύση

Α)

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική με $f'(x)=(3-\lambda)x^2-2x+(\lambda-1)^2$.

Ακόμα αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=1$, αναγκαία συνθήκη είναι

$f'(1)=0 \Rightarrow (3-\lambda)-2+(\lambda-1)^2=0 \Rightarrow \lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=2$

Για λ=1 έχουμε $f'(x)=2x^2-2x$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		+	0	-	0	+	
f		$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$	τ.ε.	$\nearrow$	

Για λ=2 έχουμε $f'(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		+	0	+	
f		$\nearrow$		$\nearrow$	

Άρα δεκτή τιμή είναι η λ=1.

Β)

Θέτουμε $w=\ln x$ και άρα $dx=xdw$. Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x(\ln x-1)}dx=\int \frac{w^2}{x(w-1)}xdw=\int \frac{w^2dw}{w-1}=\int \frac{(w^2-1+1)dw}{w-1}=$$

$$\int \frac{(w-1)(w+1)+1}{w-1}dw=\int (w+1)dw+\int \frac{dw}{w-1}=\frac{w^2}{2}+w+\ln(w-1)+C$$

Και άρα τελικά:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x(\ln x-1)}dx=\frac{\ln^2 x}{2}+\ln x+\ln(\ln x-1)+C$$

Γ) Θέτουμε $\frac{1}{x}=w \Rightarrow -\frac{1}{x^2}dx=dw \Rightarrow dx=-\frac{1}{w^2}dw$ και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$I=\int w^3(e^{-w}-\cos w)(-\frac{1}{w^2})dw=-\int we^{-w}dw+\int w\cos wdw=$$

$$=\int wd(e^{-w})+\int wd(\sin w)=we^{-w}-\int e^{-w}dw+w\sin w-\int \sin wdw=$$

$$=we^{-w}+e^{-w}+w\sin w+\cos w+c=\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}+c$$

Θέμα 5 (20 μονάδες)

Α) Μία συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$f(X)=\begin{cases} c(4X-2X^2), 0<X<2 \\ 0, \quad \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

i) (4 μον.) Να προσδιορισθεί η τιμή της σταθεράς c.

ii) (4 μον.) Να βρεθούν οι ακόλουθες πιθανότητες:

a) $P(X<1)$**, b)** $P(X>1)$**, c)** $P(1<X<2)$ **και d)** $P(X>1|X<2)$

(iii) (2 μον.) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα $\{X>1\}$ και $\{X<2\}$ είναι ανεξάρτητα.

Β) Είναι γνωστό ότι ο δείκτης νοημοσύνης του πληθυσμού των φοιτητών περιγράφεται από κανονική κατανομή με μέση τιμή 100 και τυπική απόκλιση 10 (δηλαδή μ=100 και $\sigma^2=10^2$).

i) (5 μον.) Ποιο ποσοστό φοιτητών έχει δείκτη νοημοσύνης μεταξύ 90 και 110 ;

ii) (5 μον.) Ένας φοιτητής ισχυρίζεται ότι ανήκει στο 25% των εξυπνότερων φοιτητών. Για να επαληθεύσει τον ισχυρισμό του ποια θα πρέπει να είναι η ελάχιστη τιμή του δείκτη νοημοσύνης του; Δίνονται, $P(z<1)=\Phi(1)=0.8413$**,** $P(z<0.67)=\Phi(0.67)=0.75$**.**

Λύση

Α) i)

Θα πρέπει να έχουμε $f(X)\geq 0$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} f(X)dX=1$. Άρα $c\cdot\left(4X-2X^2\right)\geq 0 \Rightarrow c\geq 0$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} f(X)dX=\int_0^2 f(X)dX=1$. Η $f(X)$ ολοκληρώνεται εύκολα ως πολυώνυμο και έχουμε

$\int_0^2 f(X)dX=\int_0^2 c\cdot\left(4X-2X^2\right)dX=\left[c\cdot\left(\frac{4X^2}{2}-\frac{2X^3}{3}\right)\right]_0^2=c\left(8-\frac{16}{3}\right)=\frac{8}{3}\cdot c$. Άρα, πρέπει $\frac{8}{3}\cdot c=1\Rightarrow c=\frac{3}{8}$

ii) a) $P(X<1)=\int_0^1\frac{3}{8}\left(4X-2X^2\right)dX=\left[\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{4X^2}{2}-\frac{2X^3}{3}\right)\right]_0^1=\frac{1}{2}$

b) $P(X>1)=1-P(X<1)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

c) $P(1<X<2)=\int_1^2 f(X)dX=\left[\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{4X^2}{2}-\frac{2X^3}{3}\right)\right]_1^2=\frac{1}{2}$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε όταν παρατηρήσουμε ότι το $P(1<X<2)$ είναι στην ουσία το $P(X>1)$.

d) $P(X>1|X<2)=\frac{P(\{X>1\}\cap\{X<2\})}{P(X<2)}=\frac{P(1<X<2)}{P(X<2)}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$.

Αφού $P(X<2)=\int_0^2 f(X)dX=\left[\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{4X^2}{2}-\frac{2X^3}{3}\right)\right]_0^2=1$.

iii) Ισχύει $P(\{X>1\}\cap\{X<2\})=P(1<X<2)=\frac{1}{2}$ και $P(X>1)\cdot P(X<2)=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$

Άρα $P(\{X>1\}\cap\{X<2\})=P(X>1)\cdot P(X<2)$, άρα τα δεδομένα είναι ανεξάρτητα.

B)

Τον δείκτη νοημοσύνης τον παριστάνουμε με X, X $\sim N(100,10^2)$

i)

$$P(90<X<110)=P\left(\frac{90-100}{10}<\frac{X-100}{10}<\frac{110-100}{10}\right)=P(-1<Z<1)=P(Z<1)-P(Z<-1)=$$

$$=\Phi(1)-\Phi(-1)=\Phi(1)-(1-\Phi(1))=2\Phi(1)-1=2\cdot 0,8413-1=0.6826$$

ii) Υποθέτουμε ότι x_0 είναι ο μικρότερος δείκτης νοημοσύνης που αντιπροσωπεύει το 25% των φοιτητών. Ισχύει:

$$P(X>x_0)=0,25\Rightarrow P\left(\frac{X-100}{10}\geq\frac{x_0-100}{10}\right)=0,25\Rightarrow$$

$$P\left(Z\geq\frac{x_0-100}{10}\right)=0,25\Rightarrow P\left(Z<\frac{x_0-100}{10}\right)=1-0,25=0,75\Rightarrow$$

$$\frac{x_0-100}{10}=0,67\Rightarrow x_0=106,7$$
