ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)**

**ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 11 Ιουνίου 2011**

**Θέμα 1**

**Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ που ορίζεται στην συνήθη βάση του $\mathbf{R}^3$ ως εξής:** $f(1,0,0)=(1,1,2)$, $f(0,1,0)=(1,3,6)$, $f(0,0,1)=(0,2,4)$ **και το διάνυσμα v=(4, 10, $\mu$)$\in \mathbf{R}^3$ που εξαρτάται από την πραγματική παράμετρο $\mu$.**

**Α) (3 μονάδες) Να βρεθεί ο πίνακας $A$ που αναπαριστά την $f$ ως προς την συνήθη βάση του $\mathbf{R}^3$ και η τιμή της $f$, $f(x_1,x_2,x_3)$, στο τυχόν διάνυσμα $(x_1,x_2,x_3)$ του $\mathbf{R}^3$.**

**Β) (12 μονάδες) Να βρεθούν: η τιμή της παραμέτρου $\mu$ για την οποία το v ανήκει στο Im$f$ και όλα τα διανύσματα $(x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^3$ για τα οποία $f(x_1,x_2,x_3)=\mathbf{v}$.**

**Γ) (5 μονάδες) Να βρεθούν βάσεις και οι διαστάσεις των Ker$f$ και Im$f$.**

**Λύση**

Α) Εφόσον

$$\begin{aligned} f(1,0,0)&=(1,1,2)\\ f(0,1,0)&=(1,3,6)\\ f(0,0,1)&=(0,2,4)\end{aligned} \quad \text{έχουμε ότι} \quad A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&3&2\\2&6&4\end{pmatrix}$$

και καθώς $f(x_1,x_2,x_3)=A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&3&2\\2&6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_1+3x_2+2x_3\\2x_1+6x_2+4x_3\end{pmatrix}$, οπότε

$f(x_1, x_2, x_3)=(x_1+x_2,\ x_1+3x_2+2x_3,\ 2x_1+6x_2+4x_3)$.

Β) Το **v** ανήκει στο Im$f$ αν και μόνο αν το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&3&2\\2&6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\10\\\mu\end{pmatrix}$$

είναι συμβιβαστό, οι δε αντίστοιχες λύσεις του αποτελούν και τα ζητούμενα $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$. Με γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&4\\1&3&2&10\\2&6&4&\mu\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\leftarrow r_2-r_1,\quad r_3\leftarrow r_3-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&4\\0&2&2&6\\0&4&4&\mu-8\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\leftarrow\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&4\\0&1&1&3\\0&4&4&\mu-8\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1\leftarrow r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&1\\0&1&1&3\\0&4&4&\mu-8\end{array}\right)\xrightarrow{r_3\leftarrow r_3-4r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&1\\0&1&1&3\\0&0&0&\mu-20\end{array}\right)$$

Από τον τελευταίο κλιμακωτό πίνακα έχουμε ότι το σύστημα είναι συμβιβαστό όταν και μόνο όταν $\mu$=20 και στην περίπτωση αυτή

$$(x_1,x_2,x_3)=(1+x_3,3-x_3,x_3)=(1,3,0)+x_3(1,-1,1),\ x_3\in\mathbf{R}.$$

Γ) Από την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του $\boldsymbol{A}$ που έχουμε στο πρώτο μέρος του επαυξημένου πίνακα έχουμε ότι:

1$^{\text{ο}}$ $(x_1,x_2,x_3)\in\mathrm{Ker}f$ αν και μόνο αν $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, δηλαδή $x_1=x_3$ και $x_2=-x_3$ με $x_3$ αυθαίρετο. Άρα τα διανύσματα του $\mathrm{Ker}f$ δίνονται από $(x_1,x_2,x_3)=x_3(1,-1,1),\ x_3\in\mathbf{R}$.

Συνεπώς, η διάσταση του Ker$f$ είναι 1 και μία βάση του το μονοσύνολο {(1,-1,1)}.

2$^{\text{ο}}$ Οι στήλες του $\boldsymbol{A}$ που αντιστοιχούν στις στήλες με μη μηδενικά οδηγά στοιχεία της κλιμακωτής του μορφής είναι η πρώτη και η δεύτερη, άρα η διάσταση του Im$f$ είναι 2 και μία βάση του είναι το δι-σύνολο {(1,1,2), (1,3,6)}.

**Θέμα 2**

**Δίδεται ο πίνακας** $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{bmatrix}$.

**Α) (2 μονάδες) Υπολογίστε την ορίζουσά του. Είναι ο *A* αντιστρέψιμος ;**

**Β) (2 μονάδες) Διαγωνοποιείται ο πίνακας *A*; (απαντήστε σύντομα χωρίς να υπολογίσετε**
**ιδιοδιανύσματα).**

**Γ) (12 μονάδες) Να βρεθούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, οι ιδιοτιμές και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα (βάσεις των ιδιοχώρων) του πίνακα *A*.**

**Δ) (4 μονάδες) Να βρεθούν διαγώνιος πίνακας *Δ* και ορθογώνιος πίνακας *Q* έτσι ώστε $A=Q\Delta Q^{T}$.**

**Λύση**

Α) det$\boldsymbol{A}$ =0 (1$^{\eta}$ στηλη=3$^{\eta}$ στήλη) και συνεπώς ο Α δεν αντιστρέφεται.

Β) Ο πίνακας $\boldsymbol{A}$ ως συμμετρικός πραγματικός διαγωνοποιείται.

Γ) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A$ είναι

$$\chi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -1\\ -2 & \lambda-4 & -2\\ -1 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-4 & -2\\ -2 & \lambda-1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -1 & \lambda-1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-2 & \lambda-4\\ -1 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=(\lambda-1)((\lambda-4)(\lambda-1)-4)+2(-2(\lambda-1)-2)-(4+\lambda-4)=(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda)-4\lambda-\lambda=$$
$$\lambda^3-6\lambda^2=\lambda^2(\lambda-6)$$

Επομένως οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_{1,2}=0$ (διπλή) και $\lambda_3=6$.

Για $\lambda_{1,2}=0$, για να βρούμε μία βάση του ιδιοχώρου λύνουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

απ' όπου, μετά από γραμμοπράξεις, καταλήγουμε στην $x+2y+z=0$, με λύσεις

$(x,y,z)=(-2y-z,y,z)=y(-2,1,0)+z(-1,0,1),\ y,z\in\mathbf{R}$. Συνεπώς μία βάση του ιδιοχώρου αποτελείται από τα $\mathbf{v_1}$=(-2,1,0), $\mathbf{v_2}$ =(-1,0,1).

Για $\lambda_3=6$, για να βρούμε μία βάση του ιδιοχώρου λύνουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{bmatrix}5 & -2 & -1\\ -2 & 2 & -2\\ -1 & -2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Μετά από τις ακόλουθες γραμμοπράξεις

$$\begin{bmatrix}5 & -2 & -1\\ -2 & 2 & -2\\ -1 & -2 & 5\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}5 & -2 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & -2 & 5\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 5 & -2 & -1\\ -1 & -2 & 5\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -6\\ 0 & -3 & 6\end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -6\\ 0 & -3 & 6\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 6\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

έχουμε ότι μία βάση του ιδιοχώρου αποτελείται από το $\mathbf{v_3}$ =(1,2,1).

Δ) Ο πίνακας $\boldsymbol{\Delta}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$.

Για να βρούμε έναν ορθογώνιο πίνακα ορθοκανονικοποιούμε την βάση {$\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$}. Ήδη το $\mathbf{v_3}$ είναι ορθογώνιο στο $\mathbf{v_1}$ και στο $\mathbf{v_2}$, οπότε αρκεί να ορθογωνοποιήσουμε τα δύο πρώτα:

$\mathbf{u_1}$=$\mathbf{v_1}$$=(-2,1,0)$ $\mathbf{u_2}=\ \mathbf{v_2}\ -\dfrac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1=(-1,0,1)-\dfrac{2}{5}(-2,1,0)=(-\dfrac{1}{5},-\dfrac{2}{5},1)$ .

Τέλος, κανονικοποιούμε την ορθογώνια βάση { $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ , $\mathbf{v_3}$} και θέτοντάς τα διανύσματά της ως στήλες σχηματίζουμε τον ορθογώνιο πίνακα

$$Q=\begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

**Θέμα 3**

Α) (6 μονάδες) Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:

(α) $\dfrac{n\sqrt{n}+5n^2}{2n^2+1}$ (β) $\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n$

Β) (6 μονάδες) Να εξεταστεί η σύγκλιση κάθε μίας από τις παρακάτω σειρές για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

(α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{3^n}$, (β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2n^2-1}$

Γ) (8 μονάδες) Να υπολογισθούν τα όρια

(α) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{1/3}}$ (β) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}$

**Λύση**

Α)(α) $\lim \dfrac{n\sqrt{n}+5n^2}{2n^2+1}$ $=\lim\dfrac{n^2(\frac{\sqrt{n}}{n}+5)}{n^2(2+\frac{1}{n^2})}$ $=\lim\dfrac{\frac{\sqrt{n}}{n}+5}{2+\frac{1}{n^2}}$ $=5/2$

(β)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right)=e\cdot 1=e$$

Β) (α) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του d' Alembert. Αν $a_n$ είναι ο γενικός όρος της σειράς

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{\frac{|-1|^{n+1}(n+1)}{3^{n+1}}}{\frac{|-1|^n n}{3^n}}=\frac{(n+1)}{3n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{3}<1.$$ Άρα η σειρά συγκλίνει .

(β) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο σύγκρισης συγκρίνοντάς την με τη σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

$$\left|\frac{\sin nx}{2n^2-1}\right|\le\frac{1}{2n^2-1}\le\frac{1}{n^2}$$

Το τελευταίο ισχύει γιατί $\dfrac{1}{2n^2-1}\le\dfrac{1}{n^2}\Leftrightarrow n^2\le 2n^2-1\Leftrightarrow 0\le n^2-1\Leftrightarrow n^2\ge 1$.

Επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ είναι $p-$σειρά με $p=2>1$, συγκλίνει. Συνεπώς η

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2n^2-1}$ συγκλίνει απόλυτα, άρα και απλά.

Γ)

(α) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{1/3}}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{1/3}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-1}}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-1}}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}=3\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{1/3}}=0$$

(β) $$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)'}{(x\sin x)'}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}\overset{0/0}{=}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x+x\cos x)'}==\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

**Θέμα 4**

A)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=x^3e^{-x}$ ορισμένη στο $\mathbf{R}$ .  Να υπολογίσετε

(α) (4 μονάδες) την πρώτη παράγωγο της $f$ και να βρείτε τα διαστήματα όπου η $f$ είναι μονότονη (και το είδος της μονοτονίας) όπως και τα τοπικά και ολικά ακρότατα της $f$ .

(β) (3 μονάδες) την δεύτερη παράγωγο της $f$ και να βρείτε τα διαστήματα όπου η $f$ είναι κυρτή, κοίλη όπως και τα σημεία καμπής της $f$ .

(γ) (3 μονάδες) τα όρια της $f$ καθώς $x\to-\infty$, $x\to+\infty$.

B) (10 μονάδες)

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(α) $I_1=\int_0^4\frac{1-\sqrt{3x+4}}{1+\sqrt{3x+4}}dx$  (β) $I_2=\int(1-x)e^{-x}dx$

A)

(α) Η πρώτη παράγωγος $f'(x)=-e^{-x}(x-3)x^2$ . Μηδενίζεται στα σημεία 0 και 3 και το πρόσημό της είναι θετικό στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,3)$, αρνητικό στο $(3,+\infty)$. Άρα η $f$ είναι αύξουσα στο $(-\infty,3)$ και φθίνουσα στο $(3,+\infty)$. Παρουσιάζει τοπικό και ολικό μέγιστο στο $x=3$ με $f(3)=27e^{-3}$.

(β) $f''(x)=e^{-x}(x^2-6x+6)x$, μηδενίζεται στα σημεία $x=3-\sqrt{3}$, $x=0$, $x=3+\sqrt{3}$ με πρόσημο θετικό στα διαστήματα $(0,3-\sqrt{3})$, $(3+\sqrt{3},+\infty)$ όπου στρέφει τα κοίλα προς τα άνω και αρνητικό στα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$, όπου στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω. Για $x=3-\sqrt{3}$, $x=0$, $x=3+\sqrt{3}$ παρουσιάζει σημεία καμπής.

(γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{e^x}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^3e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=-\infty\times\infty=-\infty$

B) (α) Το πεδίο ορισμού της $\sqrt{3x+4}$ είναι το διάστημα $(-4/3,+\infty)$.

Για να υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα, θέτουμε $\sqrt{3x+4}=z$, με $z>0$, οπότε έχουμε διαδοχικά $3x+4=z^2$, $3dx=2z\,dz$ δηλαδή $dx=\dfrac{2}{3}zdz$. Άρα,

$$I=\int\frac{1-z}{1+z}\cdot\frac{2}{3}z\,dz=\frac{2}{3}\int\frac{-z^2+z}{1+z}dz.$$

Καθώς η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι μια ρητή παράσταση με τον βαθμό του αριθμητή μεγαλύτερο του βαθμού του παρονομαστή, εκτελούμε την διαίρεση:

$$\begin{array}{l|l}
-z^2+z+0 & z+1 \\ \hline
\;\;z^2+z & -z+2 \\
\quad\;\; 2z+0 & \\
\;\;-2z-2 & \\
\qquad\;\; -2 &
\end{array}$$

.

Συνεπώς

$$I=\frac{2}{3}\int\left((-z+2)+\frac{-2}{z+1}\right)dz=-\frac{2}{3}\int z\,dz+\frac{4}{3}\int dz-\frac{4}{3}\int\frac{dz}{z+1}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{z^2}{2}+\frac{4}{3}z-\frac{4}{3}\ln|z+1|+c=$$

$$=-\frac{1}{3}z^2+\frac{4}{3}z-\frac{4}{3}\ln|z+1|+c$$

Τα όρια ολοκλήρωσης για τη νέα μεταβλητή είναι $x=0\Leftrightarrow z=2$ και $x=4\Leftrightarrow z=4$.

Τελικά προκύπτει:

$$I_1=\left[-\frac{1}{3}z^2+\frac{4}{3}z-\frac{4}{3}\ln|z+1|\right]_2^4=-\frac{1}{3}4^2+\frac{4}{3}4-\frac{4}{3}\ln|4+1|+\frac{1}{3}2^2-\frac{4}{3}2+\frac{4}{3}\ln|2+1|=$$

$$=-\frac{16}{3}+\frac{16}{3}-\frac{4}{3}\ln 5+\frac{4}{3}-\frac{8}{3}+\frac{4}{3}\ln 3=-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\ln\frac{5}{3}$$

(β)

$$I_2=\int(1-x)e^{-x}dx=-\int(1-x)de^{-x}=-(1-x)e^{-x}+\int e^{-x}d(1-x)=-(1-x)e^{-x}+\int e^{-x}d(-x)=$$

$$=-(1-x)e^{-x}+\int de^{-x}=-e^{-x}+xe^{-x}+e^{-x}+c=xe^{-x}+c$$

**Θέμα 5**

Α) Ο χρόνος καλής λειτουργίας ενός τύπου ηλεκτρονικού πίνακα ελέγχου φωτεινών σηματοδοτών σε έτη, σύμφωνα με την εταιρία κατασκευής, είναι μια τυχαία μεταβλητή $X$ που ακολουθεί την Κανονική Κατανομή με $\mu=4$ και $\sigma^2=0.04$.

(α) (5 μονάδες) Ποια είναι η πιθανότητα ένας τέτοιος σηματοδότης να λειτουργήσει χωρίς πρόβλημα περισσότερα από 4.4 έτη;

(β) (7 μονάδες) Ένας συγκεκριμένος πίνακας βρίσκεται σε λειτουργία περισσότερα από 4.2 έτη. Ποιά είναι η πιθανότητα ο χρόνος καλής λειτουργίας του να μην ξεπεράσει τα 4.4 έτη;

Δίνονται: $\Phi(1)=0.8413, \Phi(2)=0.9772, \Phi(3)=0.9987$

**B)** Το 25% των e-mail, που παίρνει ένας χρήστης, είναι spam. Το 90% των spam μηνυμάτων ανιχνεύονται από το σύστημα και αποκλείονται, ενώ το 5% των κανονικών μηνυμάτων εκλαμβάνονται σαν spam και αποκλείονται.

(α) (4 μονάδες) Ποία η πιθανότητα να μην αποκλεισθεί ένα μήνυμα;

(β) (4 μονάδες) Αν ένα μήνυμα αποκλεισθεί, ποία η πιθανότητα να είναι spam;

Παρατήρηση: Θεωρήστε τα γεγονότα:

S: το γεγονός ένα μήνυμα να είναι spam.
A: το γεγονός ένα μήνυμα να αποκλεισθεί.

(**Δεν είναι απαραίτητο να κάνετε τις κλασματικές πράξεις μεταξύ των αριθμητικών τιμών που προκύπτουν στο τέλος της λύσης των ερωτημάτων**).

**Λύση**

A)

Αφού η τυχαία μεταβλητή $X$ ακολουθεί την κατανομή $N(4, 0.2^2)$, η $Z=\dfrac{X-4}{0.2}$ ακολουθεί την $N(0,1)$. Συνεπώς:

(α) $P(X>4.4)=1-P(X<4.4)=1-P\left(\dfrac{X-4}{0.2}<\dfrac{4.4-4}{0.2}\right)=1-P\left(Z<2\right)=1-\Phi(2)=$

$=1-0.9772=0.0228$

(β)

$$P(X<4.4 \mid X>4.2)=\frac{P((X<4.4)\cap(X>4.2))}{P(X>4.2)}=\frac{P(4.2<X<4.4)}{1-P(X<4.2)}=$$

$$=\frac{P\left(\dfrac{4.2-4}{0.2}<\dfrac{X-4}{0.2}<\dfrac{4.4-4}{0.2}\right)}{1-P\left(\dfrac{X-4}{0.2}<\dfrac{4.2-4}{0.2}\right)}=\frac{P\left(1<Z<2\right)}{1-P\left(Z<1\right)}=\frac{P\left(Z<2\right)-P(Z<1)}{1-P\left(Z<1\right)}=$$

$$=\frac{\Phi\left(2\right)-\Phi(1)}{1-\Phi\left(1\right)}=\frac{0.9772-0.8413}{1-0.8413}=\frac{0.1359}{0.1587}=\frac{1359}{1587}\approx 0.85633$$

B) Θεωρούμε τα γεγονότα:

S: το γεγονός ένα μήνυμα να είναι spam.
A: το γεγονός ένα μήνυμα να αποκλεισθεί.

(α) Ζητάμε την πιθανότητα $P(A')=1-P(A)$

Αλλά από θεώρημα ολικής πιθανότητας:

$P(A)=P(A|S)P(S)+P(A|S')P(S')=$ 0.9 0.25+0.05 0.75=0.225+0.0375=0.2625

Άρα P(A')=1-0.2625=0.7375.

(β) Από τον τύπο της δεσμευμένης πιθανότητας ή το Θ. Bayes, έχουμε:

$$P(S\mid A)=\frac{P(A|S)P(S)}{P(A)}=\frac{0.9\cdot 0.25}{0.2625}=\frac{0.225}{0.2625}=\frac{2250}{2625}=\frac{6}{7}\approx 0.86$$