ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 1η

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: 17 Οκτωβρίου 2011

Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 25 Νοεμβρίου 2011

Οι ασκήσεις της πρώτης εργασίας αναφέρονται στην ακόλουθη ύλη:

Εισαγωγή στις απεικονίσεις και στις συναρτήσεις.
Σύνολα Αριθμών (μιγαδικοί αριθμοί).
Πίνακες, Ορίζουσες, Γραμμικά Συστήματα
Εισαγωγή στους Διανυσματικούς Χώρους, Βάση και διάστασή τους.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής μπορείτε να συμβουλευθείτε τα **Κεφάλαιο 1** και **Κεφάλαιο 2** (παράγραφοι 2.1 - 2.7) του συγγράμματος του ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα» των Γρ. Καμβύσα και Μ. Χατζηνικολάου και από το βοηθητικό υλικό που υπάρχει στη διεύθυνση http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm τα ακόλουθα:

Εναλλακτικό **Δ**ιδακτικό **Υ**λικό:
Κεφ1 Εισαγωγικές Έννοιες, Κεφ2 Γραμμικά Συστήματα, Κεφ3 Πίνακες και Γραμμικά Συστήματα, Κεφ4 Ορίζουσες, Κεφ5 Οι χώροιR^n , Κεφ6 Διανυσματικοί χώροι και Κεφ7 Βάση και Διάσταση.
Συνοδευτικό **Ε**κπαιδευτικό **Υ**λικό:
Σύνολα Αριθμών, Συναρτήσεις, Πίνακες, Οι Χώροι R^n, Διανυσματικοί Χώροι.

Οι παρακάτω λύσεις είναι ενδεικτικές καθώς πολλά ερωτήματα αντιμετωπίζονται με διάφορους τρόπους. Σε μερικές περιπτώσεις δίνονται αναλυτικά διαφορετικές λύσεις ή υποδείξεις διαφορετικών λύσεων. Μπορεί να υπάρχουν και άλλες ορθές λύσεις. Κάθε ορθή λύση που έχει τεκμηριωθεί πλήρως είναι δεκτή.

Άσκηση 1 (20 μον)

Α) Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x-3,$

$g:\mathbb{R}-\{5\}\to\mathbb{R},\ g(x)=\dfrac{x}{x-5}$, και

$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=x^2-1$.

1) (4 μον) Εξετάστε αν οι συναρτήσεις f και h είναι 1-1. Εξετάστε επίσης αν κάποια από αυτές είναι επί. Σε περίπτωση που κάποια από τις συναρτήσεις f και h είναι αντιστρέψιμη, βρείτε την αντίστροφή της και σχεδιάστε στο ίδιο σύστημα αξόνων τη συνάρτηση αυτή και την αντίστροφή της. Ποια γεωμετρική σχέση συνδέει τα γραφήματα της συνάρτησης και της αντίστροφής της;
2) (3 μον) Δείξτε ότι το σύνολο τιμών της g είναι το σύνολο $\mathbb{R}-\{1\}$.
3) (3 μον) Αφού βεβαιωθείτε ότι ορίζονται (βρίσκοντας τα πεδία ορισμού τους), υπολογίστε τις συνθέσεις $f\circ h$ και $h\circ f$. Αληθεύει ότι $f\circ h=h\circ f$;

Β) Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό $z=-1+i\sqrt{3}$.

1) (2 μον) Υπολογίστε τον $\dfrac{z}{1+2i}$ στη μορφή $a+bi, (a,b\in\mathbb{R})$.
2) (5 μον) Βρείτε την τριγωνομετρική μορφή του z και υπολογίστε τον z^{2011} στη μορφή $a+bi, (a,b\in\mathbb{R})$, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα De Moivre.
3) (3 μον) Βρείτε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς w με $w^4=z$.

Λύση

Α)

1) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Τότε $2x_1-3=2x_2-3\Rightarrow 2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2$ και άρα η f είναι 1-1.

Έστω $y\in\mathbb{R}$. Εξετάζουμε το ενδεχόμενο να υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x)=y$.

που σημαίνει ότι $2x-3=y\Leftrightarrow x=\dfrac{y+3}{2}$.

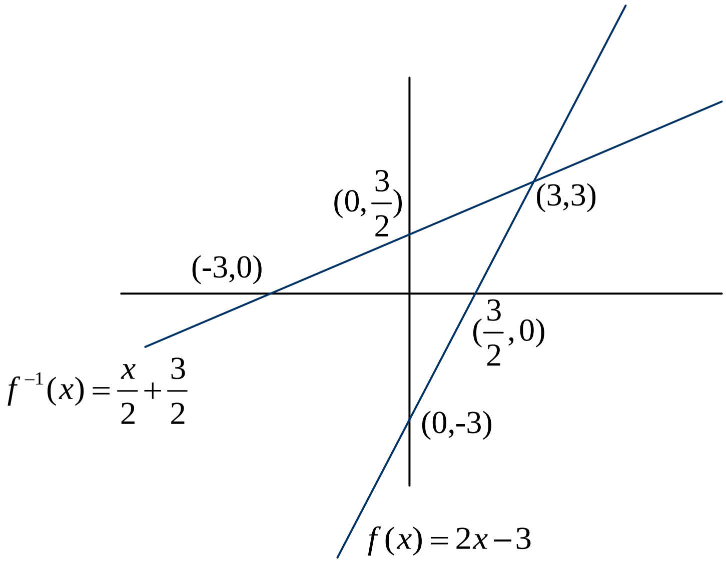
Άρα για $x=\dfrac{y+3}{2}$ έχουμε $f(x)=y$ και συνεπώς η f είναι επί.

Επειδή η f είναι 1-1 και επί, η f είναι αντιστρέψιμη. Είδαμε πριν ότι

$y=f(x)\Leftrightarrow x=\dfrac{y+3}{2}$. Άρα η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δίνεται από

$f^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{2}$.

Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι δυο ευθείες συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Η h δεν είναι 1-1, αφού για παράδειγμα έχουμε $h(1)=h(-1)$. Άρα δεν είναι και αντιστρέψιμη.
Η h δεν είναι επί, αφού για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $h(x)=x^2-1\geq -1$.

2) Το πεδίο ορισμού (π.ο.) της $g(x)$ είναι το $\mathbb{R}-\{5\}$ αφού το 5 μηδενίζει τον παρονομαστή της. Έστω $y\in R-\{1\}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $x\in R-\{5\}$ τ.ω. $g(x)=y$.
Παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $g(x)\neq 1$ γιατί αν υπήρχε $x\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $g(x)=1$, τότε $\frac{x}{x-5}=1\Rightarrow x=x-5\Rightarrow 0=-5$, άτοπο. Άρα το σύνολο τιμών της g είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}-\{1\}$.
Έστω $y\in\mathbb{R}-\{1\}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $x\in\mathbb{R}-\{5\}$ τέτοιο ώστε $g(x)=y$.
Πράγματι, έχουμε $g(x)=y\Leftrightarrow \frac{x}{x-5}=y\Leftrightarrow x=xy-5y\Leftrightarrow x(y-1)=5y\Leftrightarrow x=\frac{5y}{y-1}$
(στην τελευταία συνεπαγωγή χρησιμοποιήσαμε ότι $y\neq 1$). Παρατηρούμε ότι $\frac{5y}{y-1}\neq 5$ (διότι ισοδύναμα $5y\neq 5y-1$) και άρα $x=\frac{5y}{y-1}\in\mathbb{R}-\{5\}$. Δηλαδή για το $x=\frac{5y}{y-1}\in\mathbb{R}-\{5\}$ έχουμε $g(x)=y$.
Άρα το σύνολο τιμών της g είναι υπερσύνολο $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ και επειδή είναι και υποσύνολο του $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, συμπεραίνουμε ότι είναι ίσο με το $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
3)
Αρχικά θα ελέγξουμε αν ορίζεται η σύνθεση $f\circ h$. Για να το ελέγξουμε πρέπει να βρούμε το π.ο. της (που συμβολίζουμε με $D_{f\circ h}$) και να βεβαιωθούμε ότι δεν είναι το κενό σύνολο. Πράγματι,
$D_{f\circ h}=\left\{x\in D_h : h(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}: h(x)\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}\neq\varnothing$ άρα ορίζεται η σύνθεση $f\circ h$ με τύπο $(f\circ h)(x)=f(h(x))=f(x^2-1)=2(x^2-1)-3=2x^2-5$.
Στην ουσία ελέγχουμε εάν το πεδίο τιμών της $h(x)$, που είναι το $R_h=[-1,\infty)$, έχει κοινά στοιχεία με το πεδίο ορισμού της $f(x)$, που είναι το $D_f=\mathbb{R}$. Και αφού η τομή των δύο αυτών συνόλων δεν είναι το κενό σύνολο συμπεραίνουμε ότι ορίζεται η σύνθεση $f\circ h$.

Παρόμοια, στη συνέχεια θα ελέγξουμε αν ορίζεται η σύνθεση $h \circ f$. Ισχύει

$D_{h\circ f} = \left\{ x \in D_f : f(x) \in D_h \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \neq \varnothing$ άρα ορίζεται η σύνθεση $h \circ f$ με τύπο

$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x-3) = (2x-3)^2 - 1 = 4x^2 - 12x + 9 - 1 = 4x^2 - 12x + 8$.

Στην ουσία ελέγχουμε εάν το πεδίο τιμών της $f(x)$, που είναι το $R_f = \mathbb{R}$, έχει κοινά στοιχεία με το πεδίο ορισμού της $h(x)$, που είναι το $D_h = \mathbb{R}$. Και αφού η τομή των δύο αυτών συνόλων δεν είναι το κενό σύνολο συμπεραίνουμε ότι ορίζεται η σύνθεση $h \circ f$.

Τέλος, έχουμε $f \circ h \neq h \circ f$ αφού για παράδειγμα $(f \circ h)(0) = -5 \neq 8 = (h \circ f)(0)$.

B)

1) Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή του κλάσματος με τον συζυγή του παρανομαστή έχουμε

$$\frac{z}{1+2i} = \frac{(-1+i\sqrt{3})(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{-1+2\sqrt{3}+i(2+\sqrt{3})}{1+4} = \frac{-1+2\sqrt{3}}{5} + \frac{2+\sqrt{3}}{5}i.$$

2) Για να βρούμε την τριγωνομετρική μορφή του $z = -1 + i\sqrt{3}$, βρίσκουμε πρώτα το μέτρο του

$$\rho = |z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2.$$

Για το όρισμα θ του z έχουμε $\cos\theta = \frac{-1}{2},\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Από τις σχέσεις αυτές συμπεραίνουμε ότι $\cos\theta = \cos\frac{2\pi}{3},\ \sin\theta = \sin\frac{2\pi}{3}$ και άρα $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$. Επειδή για το (πρωτεύον, όπως συνήθως λέγεται,) όρισμα μιγαδικού αριθμού ισχύει $0 \le \theta < 2\pi$, έχουμε $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Άρα η ζητούμενη τριγωνομετρική μορφή είναι

$$z = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}).$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα De Moivre (Θεώρημα 9, ΕΔΥ Κεφ1) έχουμε

$$z^{2011} = \left(2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})\right)^{2011} = 2^{2011}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{2011} =$$

$$2^{2011}(\cos(2011\frac{2\pi}{3}) + i\sin(2011\frac{2\pi}{3})).$$

Επειδή $2011\frac{2\pi}{3} = 670(2\pi) + \frac{2\pi}{3}$, έχουμε $\cos(2011\frac{2\pi}{3}) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ και $\sin(2011\frac{2\pi}{3}) = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Άρα $z^{2011} = -2^{2010} + i2^{2010}\sqrt{3}$.

3) Είδαμε πριν ότι $z = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 10, ΕΔΥ Κεφ1, οι ζητούμενες λύσεις είναι οι

$$w_k = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}\right), \quad k = 0,1,2,3\,.$$

Δηλαδή,

$$w_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right),$$

$$w_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$w_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) =$$

$$= \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right),$$

$$w_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Άσκηση 2 (20 μον)

A) (8 μον) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x - y + z + w &= 1 \\ 2x - y + 2z - w &= 2 \\ 5x - 3y + 5z - w &= a. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο επίλυσης γραμμικών συστημάτων απαλοιφής του Gauss για να καθορίσετε όλες τις τιμές του a, για τις οποίες το σύστημα είναι συμβιβαστό. Για τις τιμές εκείνες του a που το σύστημα είναι συμβιβαστό, βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου πίνακα του συστήματος και τις λύσεις του συστήματος.

B) Έστω $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1) (2 μον) Υπολογίστε όποιες από τις ακόλουθες παραστάσεις ορίζονται $AB, BA, B^tB, A+B^tB$. Σημείωση: Με B^t συμβολίζουμε τον ανάστροφο του B, στη βιβλιογραφία συμβολίζεται και ως B^T.
2) (3 μον) Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, δείξτε ότι $A^n = \begin{pmatrix} 1-2n & 4n \\ -n & 2n+1 \end{pmatrix}$ για κάθε θετικό ακέραιο n.
3) (2 μον) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του προηγούμενου υποερωτήματος ή διαφορετικά, δείξτε ότι $A^{n+2}+A^n=2A^{n+1}$ για κάθε θετικό ακέραιο n.
4) (5 μον) Να βρεθούν όλοι οι πίνακες $C \in M_2(\mathbb{R})$ τέτοιοι ώστε $AC = CA$.

Λύση

Α) Εφαρμόζοντας την απαλοιφή Gauss στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος έχουμε

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 5 & -1 & a \end{array}\right) \overset{\Gamma_2\to\Gamma_2-2\Gamma_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 5 & -3 & 5 & -1 & a \end{array}\right) \overset{\Gamma_3\to\Gamma_3-5\Gamma_1}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & a-5 \end{array}\right) \overset{\Gamma_3\to\Gamma_3-2\Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array}\right).$$

Από την τελευταία γραμμή του δεξιού πίνακα παρατηρούμε ότι το σύστημα είναι ασυμβίβαστο αν $a-5\neq 0$, δηλαδή αν $a\neq 5$.
Έστω ότι $a=5$. Συνεχίζοντας την απαλοιφή Gauss έχουμε

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\Gamma_1\to\Gamma_1+\Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή (σημειώνονται οι οδηγοί).
Το σύστημα που αντιστοιχεί σε αυτόν είναι

$$\begin{aligned} x \quad\;\; + z - 2w &= 1 \\ y \quad\;\; - 3w &= 0. \end{aligned}$$

Αυτό έχει τις λύσεις

$$(x,y,z,w) = (1-z+2w, 3w, z, w), \text{ όπου } z,w\in\mathbb{R}.$$

Τελικά το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν $a=5$. Στην περίπτωση αυτή έχει άπειρες λύσεις που δίνονται από τον παραπάνω τύπο.

Β)

1) Ο A είναι 2×2 πίνακας, ο B είναι 2×3 και ο B^t είναι 3×2.
Άρα το γινόμενο AB ορίζεται (και είναι 2×3 πίνακας)

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 12 & -1 \\ -7 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

Το BA δεν ορίζεται και το B^tB ορίζεται και είναι 3×3 πίνακας.

$$B^tB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \\ -6 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Το άθροισμα $A+B^tB$ δεν ορίζεται αφού οι A, B^tB δεν έχουν ίδια διάσταση (ή δεν είναι του ιδίου τύπου, σύμφωνα με την ορολογία του βιβλίου).

2) Η αποδεικτέα σχέση ισχύει για $n=1$ καθώς $A^1 = \begin{pmatrix} 1-2 & 4 \\ -1 & 2+1 \end{pmatrix} = A$.

Έστω ότι για κάποιο θετικό ακέραιο n έχουμε

$$A^n = \begin{pmatrix} 1-2n & 4n \\ -n & 2n+1 \end{pmatrix}.$$

Τότε

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1-2n & 4n \\ -n & 2n+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (1-2n)(-1)+4n(-1) & (1-2n)4+4n3 \\ (-n)(-1)+(2n+1)(-1) & (-n)4+(2n+1)3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2(n+1) & 4(n+1) \\ -(n+1) & 2(n+1)+1 \end{pmatrix},$$

δηλαδή

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1-2(n+1) & 4(n+1) \\ -(n+1) & 2(n+1)+1 \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή, υποθέτοντας ότι ισχύει η αποδεικτέα σχέση για κάποιο n, δείξαμε ότι αυτή ισχύει και για το $n+1$. Από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής έπεται ότι $A^n = \begin{pmatrix} 1-2n & 4n \\ -n & 2n+1 \end{pmatrix}$ για κάθε θετικό ακέραιο n.

3) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος έχουμε

$$A^{n+2} + A^n = \begin{pmatrix} 1-2(n+2) & 4(n+2) \\ -(n+2) & 2(n+2)+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-2n & 4n \\ -n & 2n+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4n-2 & 8n+8 \\ -2n-2 & 4n+6 \end{pmatrix}$$

και

$$2A^{n+1} = 2\begin{pmatrix} 1-2(n+1) & 4(n+1) \\ -(n+1) & 2(n+1)+1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2(1-2(n+1)) & 2(4(n+1)) \\ 2(-(n+1)) & 2(2(n+1)+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4n-2 & 8n+8 \\ -2n-2 & 4n+6 \end{pmatrix}.$$

Άρα $A^{n+2} + A^n = 2A^{n+1}$.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε δείξουμε το ζητούμενο χωρίς τη χρήση αποτελέσματος του ερωτήματος 2) ως εξής: Αποδεικνύουμε με άμεσο υπολογισμό ότι $A^2 + I = 2A$. Πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της σχέσης αυτής με τον A^n προκύπτει το ζητούμενο.

4) Έστω $C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. Τότε

$$AC = CA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x+4z & -y+4w \\ -x+3z & -y+3w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-y & 4x+3y \\ -z-w & 4z+3w \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+4z = -x-y \\ -y+4w = 4x+3y \\ -x+3z = -z-w \\ -y+3w = 4z+3w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+4z = 0 \\ x+y-w = 0 \\ x-4z-w = 0 \\ y+4z = 0. \end{cases}$$

Ζητάμε τις λύσεις του συστήματος που είναι γραμμικό και ομογενές. Εφαρμόζουμε απαλοιφή Gauss στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3}{\overset{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\Gamma_4 \to \Gamma_4 + \Gamma_2}{\overset{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\Gamma_2 \to (-1)\Gamma_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Το ομογενές σύστημα που αντιστοιχεί στον τελευταίο πίνακα είναι το $\begin{matrix} x+y-w=0 \\ y+4z=0 \end{matrix}$

που έχει λύσεις τις $(x, y, z, w) = (4z+w, -4z, z, w),\ z, w \in \mathbb{R}$. Άρα οι ζητούμενοι

πίνακες είναι οι $C = \begin{pmatrix} 4z+w & -4z \\ z & w \end{pmatrix}$, όπου $z, w \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 3 (20 μον)

A) Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $A = \begin{pmatrix} 3 & a & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1) (8 μον) Υπολογίστε την ορίζουσα του A και όλες τις τιμές του a τέτοιες ώστε ο A να είναι αντιστρέψιμος. Για τις τιμές αυτές, υπολογίστε τον A^{-1}.
2) (2 μον) Έστω ότι $a=1$. Με χρήση του υπολογισμού της $\det(A)$, υπολογίστε την $\det(A^{2011})$.
3) (2 μον) Έστω ότι υπάρχει πίνακας στήλη $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ με $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Τι συμπεραίνετε για το a;

Β) (5 μον) Χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις πράξεις γραμμών ή στηλών, υπολογίστε την ορίζουσα

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 10 \\ a & b & c & d \\ 2a+1 & 2b+2 & 2c-3 & 2d-3 \\ 3 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

όπου $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

Γ) (3 μον) Έστω $B \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε $B^3 - 2B + 5I = 0$. Δείξτε ότι ο B είναι αντιστρέψιμος.

Λύση

Α)

1) Αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή έχουμε

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 3 & a & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3\det\begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - a\det\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -6 + a^2.$$

Ο A είναι αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow -6 + a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm\sqrt{6}$.

Έστω ότι $a \neq \pm\sqrt{6}$. Θα υπολογίσουμε τον A^{-1} χρησιμοποιώντας τον προσαρτημένο πίνακα $adjA$ του A (βλ. Ορισμό 4 και Θεώρημα 7 ΕΔΥ, Κεφ4). Έστω A_{ij} ο 2×2 πίνακας που προκύπτει από τον A διαγράφοντας την i γραμμή του A και τη j στήλη του A. Έχουμε

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_{23} = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{31} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & a \end{pmatrix}, A_{32} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, A_{33} = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ξέρουμε ότι $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\left((-1)^{i+j}\det A_{ji}\right)$ (βλ. Θεώρημα 10 ΕΔΥ Κεφ4).

Αντικαθιστώντας και υπολογίζοντας τις παραστάσεις $(-1)^{i+j}\det A_{ji}$ βρίσκουμε

$$A^{-1} = \frac{1}{-6+a^2}\begin{pmatrix} -2 & a & a^2 \\ a & -3 & -3a \\ -2 & a & 6 \end{pmatrix}.$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσε να υπολογιστεί ο A^{-1} με τον αλγόριθμο που περιγράφεται στη σελίδα 43 του ΣΕΥ Πίνακες (βλ. Παράδειγμα 3.4.10). Πιο αναλυτικά:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma1 \leftrightarrow \Gamma3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a & 0 & 1 & 0 \\ 3 & a & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma3 \to \Gamma3 - 3\Gamma1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 3 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma2 \to \Gamma2/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{a}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & a & 3 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma3 \to \Gamma3 - a\Gamma2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{a}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3-\frac{a^2}{2} & 1 & \frac{-a}{2} & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma3 \to \Gamma3/(6-a^2)/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{a}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{6-a^2} & \frac{-a}{6-a^2} & \frac{-6}{6-a^2} \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma2 \to \Gamma2 - a/2 \cdot \Gamma3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-\alpha}{6-a^2} & \frac{3}{6-a^2} & \frac{3\alpha}{6-a^2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{6-a^2} & \frac{-a}{6-a^2} & \frac{-6}{6-a^2} \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma1 \to \Gamma1 + \Gamma3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{6-a^2} & \frac{-a}{6-a^2} & \frac{-a^2}{6-a^2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-\alpha}{6-a^2} & \frac{3}{6-a^2} & \frac{3\alpha}{6-a^2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{6-a^2} & \frac{-a}{6-a^2} & \frac{-6}{6-a^2} \end{array}\right)$$

Οπότε έχουμε ότι

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{6-a^2} & \frac{-a}{6-a^2} & \frac{-a^2}{6-a^2} \\ \frac{-\alpha}{6-a^2} & \frac{3}{6-a^2} & \frac{3\alpha}{6-a^2} \\ \frac{2}{6-a^2} & \frac{-a}{6-a^2} & \frac{-6}{6-a^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{-6+a^2} \begin{pmatrix} -2 & a & a^2 \\ a & -3 & -3a \\ -2 & a & 6 \end{pmatrix}$$

2) Έστω ότι $a=1$. Είδαμε πριν ότι $\det A = -6 + a^2 = -5$. Άρα $\det(A^{2011}) = (\det A)^{2011} = (-5)^{2011} = -5^{2011}$.

3) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε από $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ παίρνουμε

$$A^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$ άτοπο. Άρα ο A δεν είναι αντιστρέψιμος και συνεπώς $\det A = 0$, δηλαδή $a = \pm\sqrt{6}$ από το πρώτο ερώτημα.

B) Η ιδέα εδώ είναι να συγκρίνουμε το αποτέλεσμα αν από τη γραμμή 3 αφαιρέσουμε το διπλάσιο της γραμμής 2 με τη διαφορά των γραμμών 4 και 1. Έχουμε διαδοχικά

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 10 \\ a & b & c & d \\ 2a+1 & 2b+2 & 2c-3 & 2d-3 \\ 3 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_3\to\Gamma_3-2\Gamma_2}{=} \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 10 \\ a & b & c & d \\ 1 & 2 & -3 & -3 \\ 3 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_4\to\Gamma_4-\Gamma_1}{=}$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 10 \\ a & b & c & d \\ 1 & 2 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_4\to\Gamma_4-\Gamma_3}{=} \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 10 \\ a & b & c & d \\ 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Άρα

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 10 \\ a & b & c & d \\ 2a+1 & 2b+2 & 2c-3 & 2d-3 \\ 3 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 10 \\ a & b & c & d \\ 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

γιατί μια γραμμή του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 & 10 \\ a & b & c & d \\ 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι μηδενική.

Γ) Έχουμε

$$B^3 - 2B + 5I = 0 \Rightarrow B^3 - 2B = -5I \Rightarrow \frac{1}{5}(-B^3 + 2B) = I \Rightarrow$$

$$B(\frac{1}{5}(-B^2 + 2I)) = (\frac{1}{5}(-B^2 + 2I))B = I$$

Από τον ορισμό συμπεραίνουμε ότι ο B είναι αντιστρέψιμος (και μάλιστα $B^{-1} = \frac{1}{5}(-B^2 + 2I)$).

Μια άλλη λύση είναι:

$$B^3 - 2B + 5I = 0 \Rightarrow B(B^2 - 2I) = -5I \Rightarrow \det(B(B^2 - 2I)) = \det(-5I) \Rightarrow$$

$$(\det B)(\det(B^2 - 2I)) = (-5)^n \neq 0 \Rightarrow \det B \neq 0$$

και άρα ο B είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 4 (20 μον)

Α) (4 μον) Εξετάστε αν τα διανύσματα $(1,0,2,1),(0,2,1,0),(1,0,0,2)$ του $\mathbb{R}^4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Β) (4 μον) Αφού δικαιολογήστε γιατί τα διανύσματα $(1,1,1),(2,1,0),(1,1,0)$ αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$, παραστήστε το $(0,1,2)$ ως γραμμικό συνδυασμό αυτών.

Γ) (12 μον) Εξετάστε ποια από τα σύνολα

$$\left\{\left(x, y, y^2\right) \mid x, y \in \mathbb{R}\right\},\quad \left\{\left(x, y, 1\right) \mid x, y \in \mathbb{R}\right\},\quad \left\{(x, 3y, x-y) \middle| x, y \in \mathbb{R}\right\}$$

είναι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$. Σε περίπτωση που κάποιο σύνολο είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, βρείτε μια βάση και τη διάστασή του.

Λύση

A) Έστω $a,b,c\in\mathbb{R}$ με $a(1,0,2,1)+b(0,2,1,0)+c(1,0,0,2)=(0,0,0,0)$. Τότε $(a+c,2b,2a+b,a+2c)=(0,0,0,0)$ οπότε έχουμε το σύστημα $\begin{cases} a+c=0 \\ 2b=0 \\ 2a+b=0 \\ a+2c=0 \end{cases}$ και εύκολα βλέπουμε ότι αυτό έχει τη μοναδική λύση $a=b=c=0$. Άρα τα $(1,0,2,1),(0,2,1,0),(1,0,0,2)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Εναλλακτικά, τα δοσμένα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν ο πίνακας που έχει γραμμές αυτά έχει rank το πλήθος των διανυσμάτων, δηλαδή αν και μόνο αν $rank\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=3$. Το rank μπορεί να υπολογιστεί με την μέθοδο απαλοιφής Gauss.

Εναλλακτικά μπορούμε να γράψουμε τα διανύσματα σε στήλες και να φέρουμε σε κλιμακωτή μορφή.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma4\to\Gamma4-\Gamma1]{\Gamma3\to\Gamma3-2\Gamma1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma2\to\Gamma2/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma3\to\Gamma3-\Gamma2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma4\to\Gamma4+\Gamma3/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Επειδή η $1^η$, $2^η$ και $3^η$ στήλες του τελικού πίνακα έχουν μη μηδενικά οδηγά στοιχεία η $1^η$, $2^η$ και $3^η$ στήλες του αρχικού πίνακα αποτελούν γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

B) Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 5, ΕΔΥ Κεφ5, (βλ. και την παρατήρηση που έπεται του πορίσματος) έχουμε $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=1\neq 0$ και επομένως τα δοσμένα διανύσματα αποτελούν μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

Ο υπολογισμός της ορίζουσας μπορεί να γίνει με βάση τις ιδιότητες οριζουσών, για παράδειγμα:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{\Gamma2\to\Gamma2-2\Gamma1 \\ \Gamma3\to\Gamma3-\Gamma1}}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-1)=1$$

Εναλλακτικά γράφουμε τα διανύσματα ως στήλες ενός πίνακα και το φέρουμε σε κλιμακωτή μορφή.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma3\to\Gamma3-\Gamma1]{\Gamma2\to\Gamma2-\Gamma1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma3\to\Gamma3-2\Gamma2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Επειδή η $1^η$, $2^η$ και $3^η$ στήλες του τελικού πίνακα έχουν μη μηδενικά οδηγά στοιχεία η $1^η$, $2^η$ και $3^η$ στήλες του αρχικού πίνακα αποτελούν γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Οπότε τρία γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ αποτελούν και βάση του.

Άρα υπάρχουν $a,b,c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $(0,1,2)=a(1,1,1)+b(2,1,0)+c(1,1,0)$. Άρα

$$(0,1,2)=(a+2b+c,a+b+c,a) \Rightarrow \begin{cases} a+2b+c=0 \\ a+b+c=1 \\ a=2 \end{cases}$$ και λύνοντας το σύστημα

βρίσκουμε $a=2, b=-1, c=0.$ Συνεπώς $(0,1,2)=2(1,1,1)-(2,1,0)$.

Γ) Το σύνολο $\left\{\left(x,y,y^2\right) \mid x,y\in\mathbb{R}\right\}$ δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Για

παράδειγμα, ενώ $(1,1,1)\in \quad x,y,y^2 \quad | x,y\in\mathbb{R}$, έχουμε

$$-(1,1,1)=(-1,-1,-1)\notin \quad x,y,y^2 \quad | x,y\in\mathbb{R} \quad .$$

Το σύνολο $\left\{(x,y,1) \mid x,y\in\mathbb{R}\right\}$ δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Για

παράδειγμα, $(0,0,0)\notin\left\{(x,y,1) \mid x,y\in\mathbb{R}\right\}$.

Για το τρίτο σύνολο παρατηρούμε ότι

$$(x,3y,x-y)=(x,0,x)+(0,3y,-y)=x(1,0,1)+y(0,3,-1).$$

Συνεπώς το σύνολο αυτό είναι η γραμμική θήκη στο $\mathbb{R}^3$ των διανυσμάτων $(1,0,1),(0,3,-1)$, οπότε είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι το τρίτο σύνολο είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.3.1 του βιβλίου.

Τα $(1,0,1),(0,3,-1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, γιατί αν

$$\lambda(1,0,1)+\mu(0,3,-1)=(0,0,0), \text{ όπου } \lambda,\mu\in\mathbb{R},$$

τότε $(\lambda,3\mu,\lambda-\mu)=(0,0,0)\Rightarrow\lambda=3\mu=\lambda-\mu=0\Rightarrow\lambda=\mu=0.$ Τα $(1,0,1),(0,3,-1)$ παράγουν το διανυσματικό χώρο $\left\{(x,3y,x-y) \middle| x,y\in\mathbb{R}\right\}$ και είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα αποτελούν μια βάση του $\left\{(x,3y,x-y) \middle| x,y\in\mathbb{R}\right\}$ και η διάστασή του είναι 2.

Άσκηση 5 (20 μον)

Έστω U ο διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα $(1,1,1,0), (2,1,0,1), (4,3,2,1), (0,1,2,-1)$ και έστω V ο διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που δίνεται από $V=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \middle| x-y-z+w=x+y+z=2x+w=0\right\}$.

1) (8 μον) Βρείτε μια βάση B και τη διάσταση του U.
2) (8 μον) Βρείτε μια βάση B' και τη διάσταση του V.
3) (4 μον) Δείξτε ότι το σύνολο $B\cup B'$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^4$.

Λύση

1) Θα βρούμε μια κλιμακωτή μορφή του πίνακα που έχει γραμμές τα δοσμένα διανύσματα. Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 4\Gamma_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 + \Gamma_2}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_2 \to (-1)\Gamma_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή (σημειώνονται οι οδηγοί) και άρα μια βάση του U αποτελούν οι μη μηδενικές γραμμές του, δηλαδή μια βάση του U είναι το σύνολο $B = \{(1,1,1,0),(0,1,2,-1)\}$. Άρα $\dim U = 2$.

Εναλλακτικά, θα μπορούσε να απαντηθεί το ερώτημα με τον αλγόριθμο που περιγράφεται στο τέλος της σελίδας 112 του βιβλίου. Δηλαδή, γράφουμε τα διανύσματα ως στήλες ενός πίνακα και το φέρουμε σε κλιμακωτή μορφή.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_2 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 + \Gamma_2}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επειδή η $1^η$ και η $2^η$ στήλες του τελικού πίνακα έχουν μη μηδενικά οδηγά στοιχεία η $1^η$ και η $2^η$ στήλες του αρχικού πίνακα αποτελούν γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Δηλαδή μια βάση του U είναι το σύνολο $B = \{(1,1,1,0),(2,1,0,1)\}$. Άρα $\dim U = 2$.

2) Έχουμε $(x,y,z,w) \in V \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z + w = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + w = 0. \end{cases}$ Θα λύσουμε το σύστημα με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών. Δημιουργούμε τον επαυξημένο πίνακα των στοιχείων του και έχουμε διαδοχικά :

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&-1&1&0\\1&1&1&0&0\\2&0&0&1&0\end{array}\right)\overset{\substack{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1\\ \Gamma_3\to\Gamma_3-2\Gamma_1}}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&-1&1&0\\0&2&2&-1&0\\0&2&2&-1&0\end{array}\right)\overset{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&-1&1&0\\0&2&2&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\overset{\Gamma_2\to(\frac{1}{2})\Gamma_2}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&-1&1&0\\0&1&1&\frac{-1}{2}&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\overset{\Gamma_1\to\Gamma_1+\Gamma_2}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&1&\frac{-1}{2}&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

Το σύστημα που αντιστοιχεί στο τελευταίο πίνακα είναι το $\begin{cases}x+\frac{1}{2}w=0\\ y+z-\frac{1}{2}w=0\end{cases}$ και οι λύσεις του είναι $(x,y,z,w)=(-\frac{1}{2}w,-z+\frac{1}{2}w,z,w)=w(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,1)+z(0,-1,1,0)$. Άρα το V παράγεται από τα $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,1),(0,-1,1,0)$.

Εύκολα επαληθεύεται ότι τα $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,1),(0,-1,1,0)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Πράγματι, αν $\lambda(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,1)+\mu(0,-1,1,0)=(0,0,0,0)$ με $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, τότε

$(-\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}-\mu,\mu,\lambda)=(0,0,0,0)$ και άρα $\lambda=\mu=0.$

Τελικά, επειδή το σύνολο $B'=\{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,1),(0,-1,1,0)\}$ παράγει το V και είναι γραμμικά ανεξάρτητα, είναι βάση του V και $\dim V=2$.

3) Το σύνολο $B\cup B'$ περιέχει 4 στοιχεία. Θα δείξουμε ότι η ορίζουσα του πίνακα με γραμμές τα στοιχεία του $B\cup B'$ είναι μη μηδενική. Αναπτύσσοντας την 4×4 ορίζουσα ως προς την πρώτη στήλη έχουμε

$$\det\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&2&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&1\\0&-1&1&0\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&2&-1\\\frac{1}{2}&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}=\text{(ανάπτυξη 3ης στήλης)}$$

$$-\det\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\-1&1\end{pmatrix}-\det\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}-3-1=-\frac{9}{2}\neq 0.$$

Από το Πόρισμα 5, ΕΔΥ Κεφ5 έπεται ότι το $B\cup B'$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^4$.

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι το σύνολο $B\cup B'$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο χρησιμοποιώντας απαλοιφή Gauss: Με πράξεις θα βρίσκαμε μια κλιμακωτή μορφή του παραπάνω 4×4 πίνακα η οποία θα είχε 4 μη μηδενικές γραμμές ή να δουλέψουμε με στήλες.

Για παράδειγμα ας γράψουμε τα τέσσερα διανύσματα ως στήλες ενός πίνακα και τον φέρουμε σε κλιμακωτή μορφή.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_2 \\ \Gamma_4 \to \Gamma_4 + \Gamma_2}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \overset{\Gamma_4 \to \Gamma_4 + 4\Gamma_2/3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Επειδή η 1^{η} ,2^{η},3^{η} και η 4^{η} στήλες του τελικού πίνακα έχουν μη μηδενικά οδηγά στοιχεία η 1^{η} ,2^{η},3^{η} και η 4^{η} στήλες του αρχικού πίνακα αποτελούν γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Άρα $B \cup B'$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^4$ μιας και αποτελείται από 4 γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

Για τον προγραμματισμό της μελέτης σας υπάρχει το Χρονοδιάγραμμα Μελέτης που περιέχεται στον Οδηγό Σπουδών της ΘΕ. Ο ακόλουθος πίνακας δεν έχει σκοπό να υποκαταστήσει το Χρονοδιάγραμμα Μελέτης αλλά να υποδείξει ορισμένα σημεία του διδακτικού υλικού που σχετίζονται άμεσα με τις ασκήσεις της Εργασίας 1.

Άσκηση	**Θεωρία**	**Συναφείς Ασκήσεις**	**Άλλες Ασκήσεις**
1Α)	Για τις πλέον βασικές έννοιες σχετικές με συναρτήσεις παραπέμπουμε στο ΕΔΥ Κεφ1 και ΣΕΥ Συναρτήσεις §4.3 και §4.4.	Εισαγωγικές Έννοιες της ΘΕ Παραδείγματα 1.2.2, ΣΕΥ Συναρτήσεις Παράδειγμα 4.4.2.	ΕΔΥ Κεφ1 Ασκ2,4.
1Β)	Για τους μιγαδικούς αριθμούς μπορείτε να διαβάσετε το ΕΔΥ Κεφ1 και ΣΕΥ Σύνολα Αριθμών §1.11-1.16.	ΣΕΥ Σύνολα Αριθμών Παράδειγμα 1.15.5 2i) και Παράδειγμα 1.16.2ii).	ΣΕΥ Σύνολα Αριθμών Παράδειγμα 1.15.5 3).
2Α)	Για την επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη μέθοδο της απαλοιφής Gauss βλ. Βιβλίο §1.4 και ΕΔΥ Κεφ3.	Βιβλίο Παράδ 3 σελ. 50, ΕΔΥ Κεφ3 Άσκ8, Εργασία1 2010 Ασκ2.	
2Β)	Η άσκηση 2Β) αναφέρεται στις πράξεις πινάκων. Βλ. Βιβλίο §1.1. Για τη μαθηματική επαγωγή βλ. ΣΕΥ Σύνολα Αριθμών §1.8.	ΕΔΥ Κεφ3 Ασκ3, Εργασία1 2010 Ασκ3α, ΕΔΥ Κεφ3 Ασκ2.	ΕΔΥ Κεφ3 Ασκ4-5.
3Α)	Η άσκηση 3 αναφέρεται σε αντιστρέψιμους πίνακες και ορίζουσες. Η σχετική θεωρία υπάρχει στο Βιβλίο §1.2-1.3.	Εργασία1 2010 Ασκ3β, ΕΔΥ Κεφ5 Ασκ5, ΣΕΥ Πίνακες Παράδειγμα 3.4.10 1).	ΣΕΥ Πίνακες Παράδειγμα 3.4.10 3) και 3.4.5.
3Β)	Βιβλίο §1.3.	ΕΔΥ Κεφ4 Ασκ2	ΕΔΥ Κεφ4 Ασκ7,8,13.
4	Τα ερωτήματα αυτά αναφέρονται στις θεμελιώδες έννοιες γραμμική ανεξαρτησία, παραγωγή διανυσματικού χώρου και βάση διανυσματικού χώρου με έμφαση στους χώρους $\mathbb{R}^n$. Η θεωρία περιέχεται στο Κεφ 2 του βιβλίου, ειδικά §2.1-2.4 και ΣΕΥ Διανυσματικοί Χώροι. Κρίνεται σκόπιμο να μελετηθεί το ΣΕΥ Χώροι $\mathbb{R}^n$ §5.1 πριν το Κεφ2 του Βιβλίου.	ΕΔΥ Κεφ5 Ασκ1-5,8, ΣΕΥ Διανυσματικοί Χώροι Παραδ.6.2.5 3) και 4).	ΣΕΥ Χώροι $\mathbb{R}^n$ Παραδείγματα 5.1.14, ΕΔΥ Κεφ6 Ασκ1,2,9, ΣΕΥ Διανυσματικοί Χώροι Ασκ. 6.5.6 2,3,7,11.
5	Ο κύριος σκοπός της άσκησης είναι η εύρεση βάσεων σε διανυσματικούς χώρους που ορίζονται μέσω γεννητόρων ή λύσεων ομογενούς γραμμικού συστήματος. Η σχετική θεωρία υπάρχει στο Βιβλίο §2.5 και κυρίως §2.6.	ΕΔΥ Κεφ7 Ασκ 5,6, Εργασία1 2010 Ασκ5β, ΕΔΥ Κεφ7 Ασκ13, ΕΔΥ Κεφ 7 Ασκ5γ.	ΕΔΥ Κεφ 7 Ασκ8, 11, 24.

Σημείωση: Οι παραπάνω παραπομπές αναφέρονται στο βιβλίο «Γραμμική Άλγεβρα» των Γρ. Καμβύσα και Μ. Χατζηνικολάου (αναφέρεται ως ‘Βιβλίο’ στον προηγούμενο πίνακα) και στο υλικό που υπάρχει αναρτημένο στην ιστοσελίδα http://edu.eap.gr/pli/pli12/ . Για παράδειγμα, η παραπομπή ‘Εργασία1 2010 Ασκ5β’ αναφέρεται στην Άσκηση 5β της Εργασίας 1 του ακαδημαϊκού έτους 2010-11. Όλες οι παραπομπές σε Ασκήσεις του ΕΔΥ αναφέρονται στις Λυμένες Ασκήσεις.