ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 2η

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: 28 Νοεμβρίου 2011

Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 6 Ιανουαρίου 2012

Οι ασκήσεις της δεύτερης εργασίας αναφέρονται στην ακόλουθη ύλη:
Διανυσματικοί χώροι,
Χώροι με εσωτερικό γινόμενο
Γραμμικοί μετασχηματισμοί
Ιδιοτιμές-Ιδιοδιανύσματα-Διαγωνοποίηση πίνακα
Τετραγωνικές μορφές

Για την κατανόηση της ύλης αυτής μπορείτε να συμβουλευθείτε τα **Κεφάλαιο 2** (παράγραφοι 2.8 - 2.9) και **Κεφάλαια 3, 4, 5** του συγγράμματος του ΕΑΠ «Γραμμική Άλγεβρα» των Γρ. Καμβύσα και Μ. Χατζηνικολάου.

Επίσης μπορείτε να συμβουλευθείτε από το **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στη http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm τα ακόλουθα:
Εναλλακτικό **Δ**ιδακτικό **Υ**λικό: Κεφάλαια 6-11.
Συνοδευτικό **Ε**κπαιδευτικό **Υ**λικό: Γραμμικές Απεικονίσεις, Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα, Διαγωνοποίηση, Τετραγωνικές Μορφές.

Συμβολισμός: Στα παρακάτω, $M_n(\mathbb{R})$ συμβολίζει το σύνολο των $n\times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{R}$.

Άσκηση 1 (20 μον.)

Δίνονται οι διανυσματικοί υπόχωροι W_1 και W_2 του $M_2(\mathbb{R})$:

$$W_1 = \{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},\ x,y,z,w \in \mathbb{R}:\quad x = y + 2z - w\},$$

$$W_2 = \{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},\ x,y,z,w \in \mathbb{R}:\quad x - 2w = y - z = 0\}.$$

i) (8 μον.) Βρείτε βάσεις για τους διανυσματικούς υποχώρους W_1 και $W_1 \cap W_2$ του $M_2(\mathbb{R})$.

ii) (4 μον.) Βρείτε τις διαστάσεις των διανυσματικών υποχώρων W_2 και $W_1 + W_2$.

iii) (8 μον.) Δικαιολογήστε γιατί ισχύει $M_2(\mathbb{R}) = W_1 + W_2$, ενώ ο $M_2(\mathbb{R})$ δεν είναι το ευθύ άθροισμα των W_1, W_2. Δείξτε ότι για τον διανυσματικό υπόχωρο $W_3 = span\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$ ισχύει $M_2(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_3$.

Λύση

i) ► Επειδή ένα τυχαίο στοιχείο $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in W_1$, λόγω της ιδιότητας $x = y + 2z - w$, γράφεται

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+2z-w & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2z & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -w & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

για κάθε $y,z,w \in \mathbb{R}$, από όπου συμπεραίνουμε ότι

$$W_1 = span\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}.$$

Επειδή για $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lambda_1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

είναι φανερό ότι τα διανύσματα $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άρα μία βάση του W_1 είναι $B_{W_1} = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ με $\dim(W_1) = 3$.

► Τα στοιχεία του $W_1 \cap W_2$ πρέπει να ικανοποιούν τις ιδιότητες των W_1 και W_2 επομένως είναι:

$$W_1 \cap W_2 = \{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},\ x,y,z,w \in \mathbb{R}:\quad x = y + 2z - w \text{ και } x - 2w = y - z = 0\}$$

Για να βρούμε μία βάση του $W_1 \cap W_2$ πρέπει να λύσουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{aligned} x - y - 2z + w &= 0 \\ x \qquad\quad - 2w &= 0 \\ y - z \qquad &= 0 \end{aligned}$$

Λύνοντας άμεσα το σύστημα ως προς τις δύο τελευταίες του εξισώσεις ή κάνοντας τις ακόλουθες γραμμοπράξεις:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to -r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to -r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \to -\frac{1}{3} r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

καταλήγουμε στο σύστημα

$$\left. \begin{array}{r} x - y - 2z + w = 0 \\ y + 2z - 3w = 0 \\ z - w = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2w \\ y = w \ , \quad w \in \mathbb{R}, \\ z = w \end{array}$$

από όπου μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2w & w \\ w & w \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, w \in \mathbb{R}$$

Άρα $W_1 \cap W_2 = span\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}$. Προφανώς $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο στοιχείο του $W_1 \cap W_2$. Άρα, μία βάση του $W_1 \cap W_2$ είναι $B_{W_1 \cap W_2} = \{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}$, με $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$.

ii) Με όμοιο τρόπο όπως στο (i) βρίσκουμε μία βάση του W_2.

Ένα τυχαίο στοιχείο $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in W_2$, λόγω των ιδιοτήτων $x - 2w = 0$ και $y - z = 0$, γράφεται

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2w & z \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z \\ z & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2w & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z, w \in \mathbb{R}$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι $W_2 = span\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$.

Επειδή για $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2\lambda_2 & \lambda_1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

είναι φανερό ότι τα διανύσματα $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Μία βάση του W_2 είναι $B_{W_2} = \{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$, άρα $\dim(W_2) = 2$.

Επειδή $\dim(W_2) = 2$ και από το (i) έχουμε $\dim(W_1) = 3$ και $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, αντικαθιστώντας στο Θεώρημα 2.5.1 (θεώρημα διαστάσεων, βλέπε βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, σελ. 100) έχουμε:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2) = 3 + 2 - 1 = 4.$$

iii) Αφού $\dim(W_1 + W_2) = 4$ και ο $W_1 + W_2$ είναι υπόχωρος του $M_2(\mathbb{R})$ ο οποίος έχει $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$, έχουμε $W_1 + W_2 = M_2(\mathbb{R})$ (Πόρισμα 6, σελ. 99, , βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας).

Επειδή $W_1 \cap W_2 \neq \{\mathbf{0}\}$, ο $M_2(\mathbb{R})$ **δεν** είναι το ευθύ άθροισμα των υποχώρων W_1, W_2, (βλέπε Θεώρημα 2.5.2, σελ. 101, βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας).
Επιπλέον ισχύει

$$W_1 \cap W_3 = \{\mathbf{0}\}, \qquad (1)$$

εφόσον ο πίνακας $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ που παράγει τον χώρο W_3 δεν ανήκει στον W_1 μιας και τα στοιχεία του $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ δεν ικανοποιούν την ιδιότητα $x = y + 2z - w$.

Επίσης τα διανύσματα $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, διότι για $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & \lambda_1 + \lambda_4 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

από όπου είναι φανερό ότι, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.
Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.4.7(α)[1] τα διανύσματα $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ αποτελούν βάση του $M_2(\mathbb{R})$, άρα

$$M_2(\mathbb{R}) = W_1 + W_3 \ , \qquad (2)$$

Οι (1) με (2) επαληθεύουν τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες του Θεωρήματος 2.5.2[2], άρα $M_2(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_3$.

<u>Β' τρόπος:</u>

Από τους ορισμούς των W_1, W_3 έπεται άμεσα ότι ο υπόχωρος W_3 δεν είναι υποσύνολο του W_1. Από αυτήν την παρατήρηση έπονται τα ακόλουθα:

i) $\dim(W_1 + W_3) > \dim W_1 = 3$. Επειδή $W_1 + W_3$ υπόχωρος του $M_2(\mathbb{R})$ και $\dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$, έχουμε $\dim(W_1 + W_3) = 4$, οπότε σύμφωνα με το Πόρισμα 6(β)[3] είναι $W_1 + W_3 = M_2(\mathbb{R})$.

ii) $W_1 \cap W_3 = \{\mathbf{0}\}$, αφού το W_3 δεν είναι υποσύνολο του W_1.

Οι (i) και (ii) επαληθεύουν τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες του Θεωρήματος 2.5.2[2], άρα $M_2(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_3$.

Άσκηση 2 (20 μον)

i) (8 μον.) Αποδείξτε ότι για τα διανύσματα $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ και $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ του $\mathbb{R}^3$ η σχέση

$$\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y} = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 3x_3y_3$$

[1] Βλέπε βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, Γ.Καμβύσα, Μ.Χατζηνικολάου, σελ 99.
[2] Βλέπε βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, Γ.Καμβύσα, Μ.Χατζηνικολάου, σελ 101.
[3] Βλέπε βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, Γ.Καμβύσα, Μ.Χατζηνικολάου,σελ 99.

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$.

ii) (6 μον.) Δίνεται ο διανυσματικός υπόχωρος $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\quad x-2y=0\}$ του $\mathbb{R}^3$. Βρείτε μία ορθοκανονική βάση του W ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$.

iii) (6 μον.) Βρείτε μία βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος $W^{\perp}$ ως προς το εσωτερικό γινόμενο που ορίστηκε στο (i).

Λύση

i) Για να αποτελεί η δοθείσα σχέση εσωτερικό γινόμενο αρκεί να επαληθεύει τις ιδιότητες του Ορισμού 3.1.1[4]. Πράγματι, για $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ και $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{R}^3$ είναι

$$\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}=\lambda(x_1,x_2,x_3)+\mu(y_1,y_2,y_3)=\left(\lambda x_1+\mu y_1,\,\lambda x_2+\mu y_2,\,\lambda x_3+\mu y_3\right)=(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\tilde{a}_3)$$

οπότε κάνοντας πράξεις έχουμε

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}_1)\quad (\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y})\circ\boldsymbol{z}&=4\tilde{a}_1z_1+2\tilde{a}_1z_2+2\tilde{a}_2z_1+2\tilde{a}_2z_2+\tilde{a}_2z_3+\tilde{a}_3z_2+3\tilde{a}_3z_3\\&=4(\lambda x_1+\mu y_1)z_1+2(\lambda x_1+\mu y_1)z_2+2(\lambda x_2+\mu y_2)z_1\\&\quad+2(\lambda x_2+\mu y_2)z_2+(\lambda x_2+\mu y_2)z_3+(\lambda x_3+\mu y_3)z_2+3(\lambda x_3+\mu y_3)z_3\\&=\lambda(4x_1z_1+2x_1z_2+2x_2z_1+2x_2z_2+x_2z_3+x_3z_2+3x_3z_3)\\&\quad+\mu(4y_1z_1+2y_1z_2+2y_2z_1+2y_2z_2+y_2z_3+y_3z_2+3y_3z_3)\\&=\lambda(\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{z})+\mu(\boldsymbol{y}\circ\boldsymbol{z})\end{aligned}$$

η αντιμεταθετική ιδιότητα που ισχύει στην πρόσθεση και στον πολλαπλασιασμό των πραγματικών αριθμών δίνει

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}_2)\quad \boldsymbol{y}\circ\boldsymbol{x}&=4y_1x_1+2y_1x_2+2y_2x_1+2y_2x_2+y_2x_3+y_3x_2+3y_3x_3\\&=4x_1y_1+2x_2y_1+2x_1y_2+2x_2y_2+x_3y_2+x_2y_3+3x_3y_3\\&=4x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+2x_2y_2+x_2y_3+x_3y_2+3x_3y_3=\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

Τέλος

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}_3)\quad \boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{x}&=4x_1^2+2x_1x_2+2x_2x_1+2x_2^2+x_2x_3+x_3x_2+3x_3^2\\&=4x_1^2+4x_1x_2+2x_2^2+2x_2x_3+3x_3^2\\&=(2x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+2x_3^2\geq 0\end{aligned}$$

Ειδικά, όταν $\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{x}=0\Leftrightarrow(2x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+2x_3^2=0$ συμπεραίνουμε ότι $2x_1+x_2=0$, $x_2+x_3=0$ και $x_3=0$, από όπου προκύπτει $x_1=x_2=x_3=0$, Άρα $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

ii) Επειδή $x-2y=0$ το τυχαίο $(x,y,z)\in W$ γράφεται

$$(x,y,z)=(2y,y,z)=y(2,1,0)+z(0,0,1),\ \text{για κάθε } y,z\in\mathbb{R},$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι

$$W=span\{(2,1,0),\,(0,0,1)\}.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι τα διανύσματα $(2,1,0),(0,0,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα μία βάση του W είναι $B_W=\{(2,1,0),\,(0,0,1)\}$ με $\dim(W)=2$.

Για να ορθοκανονικοποιήσουμε τα στοιχεία της βάσης B_W, $\boldsymbol{u}_1=(2,1,0)$ και $\boldsymbol{u}_2=(0,0,1)$, εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο των Gram-Schmidt[5], χρησιμοποιώντας το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο[6] του $\mathbb{R}^3$. Παρατηρούμε ότι

[4] Βλέπε βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, Γ.Καμβύσα, Μ.Χατζηνικολάου, σελ 144.

$\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = (2,1,0)\cdot(0,0,1) = 2\cdot 0 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$,

$\|\boldsymbol{u}_1\| = \sqrt{2^2+1^2+0^2} = \sqrt{5}$ και $\|\boldsymbol{u}_2\| = \sqrt{0^2+0^2+1^2} = 1$.

Έτσι, η ορθοκανονική βάση είναι $\hat{B}_W = \{\hat{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0),\ \hat{\boldsymbol{u}}_2 = (0,0,1)\}$.

iii) Έστω $W^{\perp} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y,z)\circ \boldsymbol{w} = 0, \text{ για κάθε } \boldsymbol{w}\in W\}$.

Παρατηρήστε ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα στοιχεία της βάσης B_W προκειμένου να υπολογίσουμε το ορθογώνιο συμπλήρωμα του W, οπότε επιλύοντας το αντίστοιχο σύστημα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}(x,y,z)\circ \boldsymbol{u}_1 = 0\\ (x,y,z)\circ \boldsymbol{u}_2 = 0\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned}(x,y,z)\circ(2,1,0) = 0\\ (x,y,z)\circ(0,0,1) = 0\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned}8x+2x+4y+2y+z = 0\\ y+3z = 0\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned}10x+6y+z = 0\\ y+3z = 0\end{aligned}\right\}$$

από όπου συμπεραίνουμε $x = \frac{17}{10}z,\ \ y = -3z,\ z\in\mathbb{R}$.

Έτσι $W^{\perp} = span\{(17,-30,10)\}$, άρα μία βάση του $W^{\perp}$ είναι $B_{W^{\perp}} = \{(17,-30,10)\}$.

Άσκηση 3 (20 μον.)

A) Να εξετάσετε ποιες από τις ακόλουθες απεικονίσεις είναι γραμμικές :

i) (2 μον.) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, με $f(x,y) = (2x+3y, x+y+2xy, 4x-5y)$

ii) (2 μον.) $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, με $g(x,y,z) = (2x+y-z, 2x-2z, x+4+5z)$

iii) (2 μον.) $h: M_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^2$, με $h(\begin{pmatrix} x & y\\ z & w\end{pmatrix}) = (x-4y-3z, 2z-w)$

B) Έστω $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ γραμμική απεικόνιση για την οποία ισχύουν:

$$f(1,0,0) = (-1,2,1),\quad f(0,1,0) = (1,0,4) \text{ και } f(0,0,1) = (-1,-2,-9)$$

i) (3 μον.) Βρείτε τον τύπο της f και γράψτε τον πίνακα αναπαράστασης της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

ii) (3 μον.) Βρείτε μία βάση και τη διάσταση της εικόνας της f.

iii) (3 μον.) Βρείτε μία βάση και τη διάσταση του πυρήνα της f.

iv) (3 μον.) Βρείτε τις ιδιοτιμές της f.

v) (2 μον.) Να ορίσετε την απεικόνιση f^{-1}, αν υπάρχει.

Λύση

A) i) Η f δεν είναι γραμμική. Για παράδειγμα,

$$f(1,0) = (2,1,4),\quad f(0,1) = (3,1,-5),\quad f(1,1) = (5,4,-1)$$

---

[5] Βλέπε βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, Γ.Καμβύσα, Μ.Χατζηνικολάου, σελ 167.

[6] Βλέπε βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, Γ.Καμβύσα, Μ.Χατζηνικολάου, σελ 146.

Αν ήταν γραμμική έπρεπε να ισχύει $f(1,0)+f(0,1)=f(1,1)$. Όμως,

$$f(1,0)+f(0,1)=(2,1,4)+(3,1,-5)=(5,2,-1)\neq f(1,1).$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε εδώ ότι η ποσότητα xy είναι αυτή που κάνει τη συνάρτηση μη γραμμική.

ii) Η g δεν είναι γραμμική, διότι για κάθε γραμμική απεικόνιση ισχύει $g(0,0,0)=(0,0,0)$, ενώ η δοθείσα δίνει $g(0,0,0)=(0,0,4)$.

iii) Η h είναι γραμμική, επειδή για κάθε $k,\lambda\in\mathbb{R}$ και $X,Y\in M_2(\mathbb{R})$ με $X=\begin{pmatrix} x_1 & y_1\\ z_1 & w_1\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} x_2 & y_2\\ z_2 & w_2\end{pmatrix}$ επαληθεύεται η ισότητα (3) της Παρατήρησης 2 του Ορισμού 4.1.1[7], διότι ισχύει:

$$\begin{aligned}
h(kX+\lambda Y) &= h(k\begin{pmatrix} x_1 & y_1\\ z_1 & w_1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} x_2 & y_2\\ z_2 & w_2\end{pmatrix})\\
&= h(\begin{pmatrix} kx_1 & ky_1\\ kz_1 & kw_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \lambda x_2 & \lambda y_2\\ \lambda z_2 & \lambda w_2\end{pmatrix})\\
&= h(\begin{pmatrix} kx_1+\lambda x_2 & ky_1+\lambda y_2\\ kz_1+\lambda z_2 & kw_1+\lambda w_2\end{pmatrix})\\
&= (kx_1+\lambda x_2-4(ky_1+\lambda y_2)-3(kz_1+\lambda z_2),\ 2(kz_1+\lambda z_2)-(kw_1+\lambda w_2))\\
&= (kx_1-4ky_1-3kz_1,\ 2kz_1-kw_1)+(\lambda x_2-4\lambda y_2-3\lambda z_2,\ 2\lambda z_2-\lambda w_2)\\
&= k(x_1-4y_1-3z_1,\ 2z_1-w_1)+\lambda(x_2-4y_2-3z_2,\ 2z_2-w_2)\\
&= kh(\begin{pmatrix} x_1 & y_1\\ z_1 & w_1\end{pmatrix})+\lambda h(\begin{pmatrix} x_2 & y_2\\ z_2 & w_2\end{pmatrix})\\
&= kh(X)+\lambda h(Y)
\end{aligned}$$

Β)i) Θεωρούμε τα διανύσματα της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0),\quad \boldsymbol{e}_2=(0,1,0),\quad \boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$$

οπότε ένα τυχαίο διάνυσμα $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ γράφεται : $(x,y,z)=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$. Επειδή η f είναι γραμμική απεικόνιση για κάθε $x,y,z\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x,y,z)=f(x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3)=xf(\boldsymbol{e}_1)+yf(\boldsymbol{e}_2)+zf(\boldsymbol{e}_3)\qquad (1)$$

Οπότε αντικαθιστώντας στην (1) τις δοθείσες εικόνες της f υπολογίζεται ο τύπος της f, που είναι

$$f(x,y,z)=x(-1,2,1)+y(1,0,4)+z(-1,-2,-9)=(-x+y-z,2x-2z,x+4y-9z)$$

Ο πίνακας αναπαράστασης της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι ο πίνακας με στήλες τα διανύσματα $f(\boldsymbol{e}_1)=(-1,2,1)$, $f(\boldsymbol{e}_2)=(1,0,4)$ και $f(\boldsymbol{e}_3)=(-1,-2,-9)$, δηλαδή είναι:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -2\\ 1 & 4 & -9\end{pmatrix}$$

[7] Βλέπε βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, Γ.Καμβύσα, Μ.Χατζηνικολάου, σελ. 192.

Θα μπορούσαμε επίσης πρώτα να βρούμε τον πίνακα A της αναπαράστασης της f ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ και στη συνέχεια να βρούμε τον τύπο της από τη σχέση

$$f(x,y,z) = A(x,y,z)^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y-z \\ 2x-2z \\ x+4y-9z \end{pmatrix}.$$

ii) Από την (1) είναι φανερό ότι $\operatorname{Im} f = \operatorname{span}\{f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), f(\boldsymbol{e}_3)\}$. Ακολουθώντας το δεύτερο αλγόριθμο[8] και επειδή

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_1 + r_3]{r_2 \to 2r_1 + r_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \to \frac{1}{2} r_2]{r_1 \to -r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to -5r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

είναι φανερό πως μόνο τα διανύσματα $f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα αποτελούν μία βάση της εικόνας της f, δηλαδή $B_{\operatorname{Im} f} = \{f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2)\}$ με $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$.

iii) Επειδή η διάσταση του $\mathbb{R}^3$ είναι 3, από την ισότητα

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) \Rightarrow \dim(\ker f) = 1.$$

Αν θεωρήσουμε ότι $(x,y,z) \in \ker f$, για να βρούμε μία βάση του πρέπει να λύσουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{aligned} -x + y - z &= 0 \\ 2x \quad - 2z &= 0 \\ x + 4y - 9z &= 0 \end{aligned}$$

Κάνοντας τις ίδιες γραμμοπράξεις όπως στη (2) καταλήγουμε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις που δίνονται:

$$\left.\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= z \\ y &= 2z \end{aligned} \quad \Rightarrow \ (x,y,z) = (z, 2z, z) = z(1,2,1): \ z \in \mathbb{R}$$

Άρα $\ker f = span\{(1,2,1)\}$, προφανώς το $(1,2,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, άρα μία βάση του πυρήνα της f είναι το $B_{\ker f} = \{(1,2,1)\}$ με $\dim(\ker f) = 1$.

iv) Συνδυάζοντας τους Ορισμούς 5.1.1 και 5.1.2[9], είναι φανερό ότι οι ιδιοτιμές της f είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα αναπαράστασης A, όπως αυτός υπολογίστηκε στο (i). Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A (αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή), δίνεται από τη σχέση:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ 1 & 4 & -9-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 4 & -9-\lambda \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -9-\lambda \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= -(\lambda+1)[\lambda^2 + 9\lambda + 8] - (-2\lambda - 16) - (\lambda + 8) = -(\lambda+1)^2(\lambda+8) + (\lambda+8) \\ &= (\lambda+8)[1 - (\lambda+1)^2] \\ &= -\lambda(\lambda+8)(\lambda+2) \end{aligned}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\chi_A(\lambda) = 0$, δηλαδή είναι:

---

[8] Βλέπε, βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, Γ.Καμβύσα, Μ.Χατζηνικολάου, σελ 112, 2^{ος} αλγόριθμος (στηλών) .

[9] Βλέπε, βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, Γ.Καμβύσα, Μ.Χατζηνικολάου, σελ 263, 265, αντίστοιχα .

$$\lambda_1 = -8, \ \lambda_2 = -2 \ \text{ και } \lambda_3 = 0 \ .$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές της f είναι $\lambda_1 = -8$, $\lambda_2 = -2$ και $\lambda_3 = 0$.

v) Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.3.1 (βλ. βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, σελ. 219) και το αποτέλεσμα του ερωτήματος (iii) συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση f είναι ιδιάζουσα, (δεν είναι αντιστρέψιμη), άρα **δεν** υπάρχει η απεικόνιση f^{-1}.

<u>Β' τρόπος:</u>

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα[10] που αναφέρεται στην σχέση ορίζουσας και ιδιοτιμών του πίνακα, έχουμε από το (iii) ότι :

$$\det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = (-8)\cdot(-2)\cdot 0 = 0 \, ,$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας A δεν αντιστρέφεται, το ίδιο ισχύει και για τη γραμμική απεικόνιση f .

Άσκηση 4 (20 μον)

Δίνεται ο τετραγωνικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -6 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

i) (8 μον.) Βρείτε το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο. Δεδομένου ότι μία ιδιοτιμή του πίνακα A είναι 1, βρείτε όλες τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά του.

ii) (4 μον.) Εξετάστε αν ο πίνακας A διαγωνοποιείται. Εάν ναι, βρείτε έναν αντιστρέψιμο πίνακα P και ένα διαγώνιο πίνακα D έτσι ώστε να ισχύει $A = PDP^{-1}$.

iii) (8 μον.) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο ερώτημα (ή αλλιώς) βρείτε τις ιδιοτιμές, και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $B = A^3 - 16A^{-2}$.

Λύση

i) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A δίνεται από τη σχέση[11]:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ -3 & 2-\lambda & 1 \\ -6 & -4 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -4 & 6-\lambda \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 6-\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -3 & 2-\lambda \\ -6 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)[(2-\lambda)(6-\lambda)+4] + 2[-3(6-\lambda)+6] + 1[(-3)(-4)-(-6)(2-\lambda)]$$

$$= (1-\lambda)(12 - 8\lambda + \lambda^2 + 4) + 2(3\lambda - 12) + (24 - 6\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12 + 4)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda - 4)^2$$

---

[10] Βλέπε, βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, Γ.Καμβύσα, Μ.Χατζηνικολάου, σελ.281.

[11] Η ορίζουσα αναπτύσσεται ως προς την πρώτη γραμμή, δεν κάνουμε όλες τις πράξεις προκειμένου να οδηγηθούμε σε πιο εύκολη παραγοντοποίηση.

Εναλλακτικά, αν δεν παρατηρούσε κανείς ότι οι δύο τελευταίες παρενθέσεις απλοποιούνται, θα έβρισκε το $-\lambda^3+9\lambda^2-24\lambda-16$, δοκιμάζοντας τους διαιρέτες του 16 ως πιθανές ρητές ρίζες θα έβρισκε ως μία ρίζα $\lambda=1$[12] και στη συνέχεια διαιρώντας με $\lambda-1$ θα προέκυπτε πηλίκο $-\lambda^2+8\lambda-16=-(\lambda-4)^2$.

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\chi_A(\lambda)=0$, άρα οι ιδιοτιμές είναι:

$$\lambda_1=1,\ \lambda_{2,3}=4 \text{ (διπλή)}.$$

Εναλλακτικά, αφού $\lambda_1=1$ και γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$trace(A)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$

$\det(A)=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3$

Αφού υπολογίσουμε την

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&-2&1\\-3&2&1\\-6&-4&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-2&1\\-2&2&1\\0&-4&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-2&1\\0&0&2\\0&-4&6\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}0&2\\-4&6\end{vmatrix}=2(0+8)=16$$

Οδηγούμαστε στο σύστημα

$$\left.\begin{matrix}1+\lambda_2+\lambda_3=9\\1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=16\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\lambda_3=8-\lambda_2\\\lambda_2\cdot\lambda_3=16\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\lambda_3=8-\lambda_2\\\lambda_2\cdot(8-\lambda)=16\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\lambda_3=8-\lambda_2\\\lambda_2{}^2-8\lambda_2+16=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}\lambda_3=8-\lambda_2\\(\lambda_2-4)^2=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\lambda_3=8-\lambda_2\\\lambda_2=4\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_3=4\\\lambda_2=4\end{cases}$$

Για να βρούμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα θα επιλύσουμε τα αντίστοιχα συστήματα:

$$A\boldsymbol{x}=\lambda_i\boldsymbol{x},\ i=1,2,3.$$

► Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=1$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&-2&1\\-3&2&1\\-6&-4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=x_1\\-3x_1+2x_2+x_3=x_2\\-6x_1-4x_2+6x_3=x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x_2+x_3=0\\-3x_1+x_2+x_3=0\\-6x_1-4x_2+5x_3=0\end{cases}$$

από όπου μετά από γραμμοπράξεις καταλήγουμε

$$\left.\begin{matrix}-3x_1+x_2+x_3=0\\-2x_2+x_3=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x_1=x_2\\x_3=2x_2\end{matrix}\right\},\text{ με } x_2\in\mathbb{R}.$$

Κατά συνέπεια το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1=1$ είναι το: $V_{\lambda_1}=\{\begin{pmatrix}x_2\\x_2\\2x_2\end{pmatrix}:\ x_2\in\mathbb{R}-\{0\}\}=\{\mu\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}:\ \mu\in\mathbb{R}-\{0\}\}$. Θεωρούμε το

[12] Βλέπε, ΣΕΥ «Σημειώσεις στους πραγματικούς και μιγαδικούς αριθμούς», Παράγραφος 1.17, Πρόταση 1.17.10, Παράδειγμα 1.17.11.

διάνυσμα $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ από το σύνολο V_{λ_1} ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 1$.

Άρα η ιδιοτιμή 1 έχει γεωμετρική και αλγεβρική πολλαπλότητα[13] ίση με 1.

► Για την ιδιοτιμή $\lambda_{2,3} = 4$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από τη λύση του παρακάτω συστήματος:

$$A\boldsymbol{x} = 4\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -6 & -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4x_1 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4x_2 \\ -6x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 4x_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_3 = 3x_1 + 2x_2.$$

Χρησιμοποιώντας τα x_1, x_2 ως ελεύθερους αγνώστους, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_{2,3} = 4$ είναι το:

$$V_{\lambda_{2,3}} = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \setminus \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \{k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} : k, \mu \in \mathbb{R}\} \setminus \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}..$$

Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_{2,3} = 4$.

Συνεπώς, η ιδιοτιμή 4 έχει γεωμετρική και αλγεβρική πολλαπλότητα ίση με 2.

ii) Αφού η γεωμετρική και η αλγεβρική πολλαπλότητα σε κάθε ιδιοτιμή του A συμπίπτουν συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας A διαγωνοποιείται με πίνακα ομοιότητας P, ο οποίος προκύπτει αν βάλουμε τα αντίστοιχα γραμμικώς ανεξάρτητα[14] ιδιοδιανύσματα, που βρήκαμε ως στήλες του. Έτσι έχουμε:

$$P = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

και αντίστοιχο διαγώνιο πίνακα (προσέχοντας ώστε η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι ιδιοτιμές στη διαγώνιο να αντιστοιχεί στην σειρά με την οποία τοποθετήσαμε τα ιδιοδιανύσματα ως στήλες στον P),

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Εύκολα επαληθεύεται η ισότητα $A = PDP^{-1}$.

[13] Βλέπε, βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, Γ.Καμβύσα, Μ.Χατζηνικολάου, Ορισμός 5.1. 6, σελ.278.

[14] Σημειώνεται ότι ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος γιατί έχει ως στήλες γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, βλέπε, βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, Γ.Καμβύσα, Μ.Χατζηνικολάου, Θεώρημα 2.6. 6, σελ.113.

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον P^{-1} για να κάνουμε την επαλήθευση, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των οριζουσών, έχουμε

$$\det(P)=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\2&3&2\end{vmatrix}=1.\begin{vmatrix}0&1\\3&2\end{vmatrix}-1.\begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix}=-3\,.$$

Άρα

$$P^{-1}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0&1\\3&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\3&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&0\\2&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&0\\2&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3&-2&1\\0&2&-1\\3&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2/3&-1/3\\0&-2/3&1/3\\-1&1/3&1/3\end{pmatrix}.$$

iii) Αντικαθιστώντας τη σχέση $A=PDP^{-1}$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned}B&=A^3-16A^{-2}\\&=(PDP^{-1})^3-16(PDP^{-1})^{-2}\\&=PD^3P^{-1}-16((P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1})^2\\&=PD^3P^{-1}-16(PD^{-1}P^{-1})^2\\&=PD^3P^{-1}-16PD^{-2}P^{-1}\\&=P(D^3-16D^{-2})P^{-1}\end{aligned}$$

Όμως ο πίνακας

$$D^3-16D^{-2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}^3-16\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}^{-2}=\begin{pmatrix}1^3-16\cdot1^{-2}&0&0\\0&4^3-16\cdot4^{-2}&0\\0&0&4^3-16\cdot4^{-2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-15&0&0\\0&63&0\\0&0&63\end{pmatrix}$$

είναι διαγώνιος και άρα από τη σχέση

$$B=P\cdot\begin{pmatrix}-15&0&0\\0&63&0\\0&0&63\end{pmatrix}\cdot P^{-1}$$

συμπεραίνουμε ότι ο B είναι διαγωνοποιήσιμος, οι ιδιοτιμές του είναι η -15 με αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα 1, και η 63 με αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα 2, και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι οι στήλες του πίνακα P, δηλαδή, για την ιδιοτιμή -15 το $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ (και τα μη μηδενικά πολλαπλάσιά του) και για την ιδιοτιμή 63 τα $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ και $\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ (και οι μη μηδενικοί γραμμικοί συνδυασμοί τους).

Άσκηση 5 (20 μον.)

Δίνεται η τετραγωνική μορφή του $\mathbb{R}^3$

$$q = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 12x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$$

i) (4 μον.) Βρείτε τον αντίστοιχο συμμετρικό πίνακα A της q έτσι ώστε $q = x^T Ax$, όπου $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$.

ii) (8 μον.) Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

iii) (8 μον.) Βρείτε έναν ορθογώνιο πίνακα Q και έναν διαγώνιο πίνακα D, έτσι ώστε να ισχύει $QDQ^T = A$.

Λύση

i) Η τετραγωνική μορφή του $\mathbb{R}^3$

$$q = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$$

αντιστοιχεί σε μοναδικό πραγματικό συμμετρικό πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ο οποίος επαληθεύει την ισοδύναμη έκφραση $q = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ με $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$. Στη δοθείσα τετραγωνική μορφή αντιστοιχεί ο ακόλουθος συμμετρικός πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

ο οποίος προκύπτει με τον εξής απλό κανόνα: το στοιχείο a_{ii} της διαγωνίου του A είναι ο συντελεστής του x_i^2, ενώ το στοιχείο που βρίσκεται στην i -γραμμή και j-στήλη $(i < j)$ είναι ίσο με το μισό του συντελεστή του γινομένου $x_i x_j$.

ii) Σε αυτό το σημείο υπενθυμίζουμε ότι οι ιδιοτιμές συμμετρικού πίνακα είναι πραγματικοί αριθμοί και ότι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι ορθογώνια (βλέπε 1η και 2η ιδιότητα στην §5.3.1 του βιβλίου Γραμμικής Άλγεβρας, σελ 289).

Η εξίσωση από την οποία προκύπτουν οι ιδιοτιμές είναι η εξής:

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι :

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 6 & 3 \\ 6 & 5-\lambda & 2 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 + 25\lambda - 33 = -(\lambda - 1)(\lambda + 3)(\lambda - 11)$$

Το πολυώνυμο $-\lambda^3 + 9\lambda^2 + 25\lambda - 33$ έχει πιθανές ακέραιες ρίζες τους διαιρέτες του

33[15] δηλαδή τους αριθμούς 1,3,11,33, και δοκιμάζοντας με $\lambda=1$ διαπιστώνουμε ότι είναι μία ρίζα του πολυωνύμου και στη συνέχεια διαιρώντας με $\lambda-1$ προκύπτει το πηλίκο $-\lambda^2+8\lambda+33=-(\lambda+3)(\lambda-11)$.

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\chi_A(\lambda)=0$, άρα οι ιδιοτιμές είναι:

$$\lambda_1=-3,\ \lambda_2=1 \text{ και } \lambda_3=11.$$

Για να βρούμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα θα επιλύσουμε τα αντίστοιχα συστήματα:

$$A\boldsymbol{x}=\lambda_i\boldsymbol{x},\ i=1,2,3.$$

► Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=-3$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από τη λύση του παρακάτω συστήματος:

$$A\boldsymbol{x}=-3\boldsymbol{x}\Leftrightarrow(A+3I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}5&6&3\\6&8&2\\3&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}5x_1+6x_2+3x_3=0\\6x_1+8x_2+2x_3=0\\3x_1+2x_2+5x_3=0\end{cases}$$

από όπου μετά από γραμμοπράξεις καταλήγουμε

$$\left.\begin{aligned}5x_1+6x_2+3x_3=0\\4x_2-8x_3=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}x_1=-3x_3\\x_2=2x_3\end{aligned}\right\},\ \text{με } x_3\in\mathbb{R}.$$

Κατά συνέπεια το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1=-3$ είναι το: $V_{\lambda_1}=\{\begin{pmatrix}-3x_3\\2x_3\\x_3\end{pmatrix}:\ x_3\in\mathbb{R}-\{0\}\}$. Θεωρούμε το διάνυσμα $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$ από το σύνολο V_{λ_1} ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_1=-3$.

► Για την ιδιοτιμή $\lambda_2=1$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από τη λύση του παρακάτω συστήματος:

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}\Leftrightarrow(A-I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&6&3\\6&4&2\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+6x_2+3x_3=0\\6x_1+4x_2+2x_3=0\\3x_1+2x_2+x_3=0\end{cases}$$

από όπου μετά από γραμμοπράξεις καταλήγουμε

$$\left.\begin{aligned}x_1+6x_2+3x_3=0\\2x_2+x_3=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}x_1=0\\x_3=-2x_2\end{aligned}\right\},\ \text{με } x_2\in\mathbb{R}.$$

Κατά συνέπεια το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2=1$ είναι το: $V_{\lambda_2}=\{\begin{pmatrix}0\\x_2\\-2x_2\end{pmatrix}:\ x_2\in\mathbb{R}-\{0\}\}$. Θεωρούμε το διάνυσμα $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ από το σύνολο V_{λ_2} ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_2=1$.

► Για την ιδιοτιμή $\lambda_3=11$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα προκύπτουν από τη λύση του παρακάτω συστήματος:

---

[15] Βλέπε, ΣΕΥ «Σημειώσεις στους πραγματικούς και μιγαδικούς αριθμούς» Πρόταση 1.17.10, Παράδειγμα 1.17.11.

$$A\boldsymbol{x}=11\boldsymbol{x}\Leftrightarrow(A-11I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-9&6&3\\6&-6&2\\3&2&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-9x_1+6x_2+3x_3=0\\6x_1-6x_2+2x_3=0\\3x_1+2x_2-9x_3=0\end{cases}$$

από όπου μετά από γραμμοπράξεις καταλήγουμε

$$\left.\begin{matrix}-3x_1+2x_2+x_3=0\\-x_2+2x_3=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x_1=\dfrac{5}{3}x_3\\x_2=2x_3\end{matrix}\right\},\ \text{με } x_3\in\mathbb{R}.$$

Κατά συνέπεια το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_3=11$ είναι το: $V_{\lambda_3}=\{\begin{pmatrix}\frac{5}{3}x_3\\2x_3\\x_3\end{pmatrix}:\ x_3\in\mathbb{R}-\{0\}\}$. Θεωρούμε το διάνυσμα $\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}5\\6\\3\end{pmatrix}$ από το σύνολο V_{λ_3} ως αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda_3=11$.

iii) Επειδή ο πίνακας A είναι συμμετρικός, σύμφωνα με το Θεώρημα 5.3.3[16] και τη «μεθοδολογία διαγωνοποίησης Ερμιτιανών πινάκων»[17] συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας A διαγωνοποιείται με πίνακα ομοιότητας P, ο οποίος προκύπτει αν βάλουμε τα αντίστοιχα γραμμικώς ανεξάρτητα[18] ιδιοδιανύσματα, που βρήκαμε στο (ii) ως στήλες του. Έτσι έχουμε:

$$P=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)=\begin{pmatrix}-3&0&5\\2&1&6\\1&-2&3\end{pmatrix}$$

και αντίστοιχο διαγώνιο πίνακα (προσέχοντας ώστε η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι ιδιοτιμές στη διαγώνιο να αντιστοιχεί στην σειρά με την οποία τοποθετήσαμε τα ιδιοδιανύσματα ως στήλες στον P),

$$D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&1&0\\0&0&11\end{pmatrix}.$$

Όμως ο πίνακας P δεν είναι ορθογώνιος, χρειάζεται να ορθοκανονικοποιήσουμε τη βάση του χώρου στηλών του ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$, ακολουθώντας τη μέθοδο Gram-Schmidt (βλέπε βήμα 3 στο σχετικό αλγόριθμο του βιβλίου, σελ. 294).

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $\boldsymbol{v}_1\circ\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_1\circ\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_2\circ\boldsymbol{v}_3=0$, όπου $\circ$ σημειώνεται το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$. Επομένως τα ιδιοδιανύσματα-στήλες του P είναι ανά δύο ορθογώνια. Το τελευταίο αποτέλεσμα ήταν γνωστό και από το Θεώρημα 5.3.2, διότι οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα A είναι διακεκριμένες[19]. Άρα, για να κατασκευάσουμε τον ορθογώνιο πίνακα Q από τον P χρειάζεται να διαιρέσουμε το κάθε ιδιοδιάνυσμα με το μέτρο του, τα οποία μέτρα των διανυσμάτων είναι:

---

[16] Βλέπε, βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, Γ.Καμβύσα, Μ.Χατζηνικολάου, σελ.293.

[17] Βλέπε, βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, Γ.Καμβύσα, Μ.Χατζηνικολάου, σελ.294.

[18] Σημειώνεται ότι ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος διότι $\det P=-52$, άρα έχει ως στήλες γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, βλέπε, βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, Γ.Καμβύσα, Μ.Χατζηνικολάου, Θεώρημα 2.6. 6, σελ.113.

[19] Βλέπε, βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, Γ.Καμβύσα, Μ.Χατζηνικολάου, Θεώρημα 5.3.2, σελ.291.

$\| \boldsymbol{v}_1 \| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1} = \sqrt{14}$

$\| \boldsymbol{v}_2 \| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

$\| \boldsymbol{v}_3 \| = \sqrt{5^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{70}$

Έτσι καταλήγουμε ότι ένας ορθογώνιος πίνακας Q είναι:

$$Q = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{14} & 0 & 5/\sqrt{70} \\ 2/\sqrt{14} & 1/\sqrt{5} & 6/\sqrt{70} \\ 1/\sqrt{14} & -2/\sqrt{5} & 3/\sqrt{70} \end{pmatrix}$$

Είναι γνωστό ότι για τον ορθογώνιο πίνακα Q ισχύει $Q^{-1} = Q^T$.

Τώρα εύκολα επαληθεύεται ότι ισχύει $A = QDQ^T$.

Για τον προγραμματισμό της μελέτης σας υπάρχει το Χρονοδιάγραμμα Μελέτης που περιέχεται στον Οδηγό Σπουδών της ΘΕ. Ο ακόλουθος πίνακας δεν έχει σκοπό να υποκαταστήσει το Χρονοδιάγραμμα Μελέτης αλλά να υποδείξει ορισμένα σημεία του διδακτικού υλικού που σχετίζονται άμεσα με τις ασκήσεις της Εργασίας 2.

Άσκηση	**Θεωρία**	**Συναφείς Ασκήσεις**	**Άλλες Ασκήσεις**
1	Ο σκοπός της άσκησης είναι η εύρεση βάσεων σε διανυσματικούς χώρους. Η σχετική θεωρία υπάρχει στο βιβλίο §2.5 και κυρίως §2.6. ΣΕΥ Κεφ 6, Διανυσματικοί χώροι, ειδικά §6.5	ΕΔΥ Κεφ 7 Άσκ11,14,16, Εργασία2 2003, Ασκ2. Εργασία1 2008, Ασκ5(ii).	ΕΔΥ Κεφ 7 Άσκ3,4,7,8,9,
2	Η άσκηση αναφέρεται σε διανυσματικούς χώρους με εσωτερικό γινόμενο. Η θεωρία περιέχεται στο Κεφ 3 του βιβλίου.	ΕΔΥ Κεφ 7 Άσκ13,17 Εργασία2 2005, Ασκ1,2 Εργασία2 2007, Ασκ1,3	Εργασία1 2006, Ασκ7
3	Η άσκηση 3 αναφέρεται σε γραμμικούς μετασχηματισμούς. Η σχετική θεωρία υπάρχει στο Κεφ 4 του βιβλίου. ΣΕΥ Κεφ 8, Γραμμικές απεικονίσεις	ΕΔΥ Κεφ 8 Άσκ1,6. ΣΕΥ Παραδείγματα 8.1.2, 8.1.11 Εργασία2 2010, Ασκ4.	ΕΔΥ Κεφ 8 Άσκ4,5,9 ΣΕΥ Παραδείγματα 8.2.8, Παράδειγμα 2. Εργασία2 2007, Ασκ5

4	Η άσκηση αναφέρεται στις έννοιες ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα, και χαρακτηριστικές τους ιδιότητες. Η θεωρία περιέχεται στο Κεφ 5 του βιβλίου, ειδικά §5.1-5.3 και §5.5 ΣΕΥ Κεφ 9, Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα και Κεφ 10, Διαγωνοποίηση Για τις πιθανές ακέραιες ρίζες μονικού πολυωνύμου δείτε: ΣΕΥ «Σημειώσεις στους πραγματικούς και μιγαδικούς αριθμούς», § 1.17, Πόρισμα 1.17.3, Πρόταση 1.17.10,	Παραδείγματα 9,10 σελ 274 - 278 του βιβλίου. ΕΔΥ Κεφ 9, Ασκ 4,7,13 ΕΔΥ Κεφ 10, Ασκ 8 ΣΕΥ Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα Παραδείγματα 9.1.13, 9.1.14, 9.2.3, 9.3.1.2.1, 9.3.1.2.2.	ΕΔΥ Κεφ 10, Ασκ 7,9, 10 ΣΕΥ Παράδειγμα 10.1.3, 10.1.6, ΣΕΥ §10.2 όλα τα παραδείγματα. Εργασία2 2006, Ασκ4 Εργασία2 2006, Ασκ5Α Εργασία2 2009, Ασκ3 Εργασία2 2010, Ασκ5 Για τις πιθανές ακέραιες ρίζες μονικού πολυωνύμου δείτε: ΣΕΥ «Σημειώσεις στους πραγματικούς και μιγαδικούς αριθμούς», Παραδείγματα 1.17.6, 1.17.9, 1.17.11.
5	Για τις πλέον βασικές έννοιες αναφορικά με τις τετραγωνικές μορφές παραπέμπουμε στο Βιβλίο §5.5.2. ΕΔΥ Κεφ. 11 ΣΕΥ Κεφ. 11, Πραγματικές τετραγωνικές μορφές	ΕΔΥ Κεφ 11 Ασκ 1,2 ΣΕΥ Παράδειγμα 11.1.1, 11.1.3, 11.2.2, 11.2.3	ΕΔΥ Κεφ 11, Ασκ 3 Εργασία2 2008, Ασκ5 ΣΕΥ Ασκήσεις 11.1 (1 & 2), Ασκήσεις 11.2

Σημείωση: Οι παραπάνω παραπομπές αναφέρονται στο βιβλίο «Γραμμική Άλγεβρα» των Γρ. Καμβύσα και Μ. Χατζηνικολάου (αναφέρεται ως 'Βιβλίο' στον προηγούμενο πίνακα) και στο υλικό που υπάρχει αναρτημένο στην ιστοσελίδα http://edu.eap.gr/pli/pli12/ . Για παράδειγμα, η παραπομπή 'Εργασία1 2010 Ασκ5β' αναφέρεται στην Άσκηση 5β της Εργασίας 1 του ακαδημαϊκού έτους 2010-11. Όλες οι παραπομπές σε Ασκήσεις του ΕΔΥ αναφέρονται στις Λυμένες Ασκήσεις.