ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 3η

Ημερομηνία Αποστολής στο Φοιτητή: Δευτέρα 9 Ιανουαρίου 2012

Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: Τρίτη 14 Φεβρουαρίου 2012.

Πριν από τη λύση κάθε άσκησης καλό είναι να μελετούνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις από τις παραπομπές στα συγγράμματα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της 3ης εργασίας αναφέρονται στα:

Ενότητα 2 (Συναρτήσεις – Ακολουθίες – Όρια)
Ενότητα 3 (Σειρές) και
Ενότητα 4 (Όριο και συνέχεια συνάρτησης)
του συγγράμματος του ΕΑΠ «Γενικά Μαθηματικά Ι – Τόμος Α’ - Λογισμός μιας Μεταβλητής» του Γ. Δάσιου.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής να συμβουλευθείτε επίσης το **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στο http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm ως εξής:

Συνοδευτικό Εκπαιδευτικό Υλικό: **Λογισμός**
Ακολουθίες, Σειρές, Όρια και Συνέχεια.

Στόχοι:

Κατανόηση και εμπέδωση των παρακάτω εννοιών:
Ακολουθίες (έμφαση στην έννοια της ακολουθίας, στο όριο και τα κριτήρια σύγκλισης ακολουθίας, στις φραγμένες, μονότονες και απειριζόμενες ακολουθίες).
Σειρές (έμφαση στην έννοια της σειράς, στις ειδικές κατηγορίες σειρών και στα κριτήρια σύγκλισης σειρών)
Όριο και συνέχεια συνάρτησης, πλευρικό όριο και πλευρική συνέχεια, μονοτονία συναρτήσεων.

Άσκηση 1 (20 μον.)

1) (8 μον.) Να εξετασθεί αν οι παρακάτω ακολουθίες είναι μονότονες.

i) $a_n = 2\cos(n\pi)$, ii) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

2) (12 μον.) Δίνεται η αναδρομική ακολουθία:

$$a_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{a_n}, \text{ με } a_1 = \sqrt{2}.$$

Να εξετασθεί αν είναι μονότονη, φραγμένη και αν συγκλίνει. Σε περίπτωση που συγκλίνει να προσδιορισθεί το όριό της.

(Υπόδειξη: Αν $x, a \in \mathbb{R}$, $a < e$ και $1 < x \le a$, η λύση της εξίσωσης $x^a = a^x$ είναι $x = a$. Επίσης, χρησιμοποιείστε το ότι η συνάρτηση $f(x) = a^x$ για $a > 1$, είναι αύξουσα.)

Λύση.

1) i. Για την $a_n = 2\cos(n\pi)$, παρατηρούμε ότι (Λογισμός μιας Μεταβλητής, Ενότ. 2, §2.4, σελ. 21, ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες, §2.6.1-2.6.2)

$$a_{n+1} - a_n = 2\cos(n+1)\pi - 2\cos n\pi = 2(\cos(n+1)\pi - \cos n\pi) =$$

$$= \begin{cases} 2(\cos 0 - \cos\pi), & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ 2(\cos\pi - \cos 0), & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases} = \begin{cases} 2(1-(-1)), & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ 2((-1)-1), & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4, & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ -4, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Αφού το $a_{n+1} - a_n$ δεν διατηρεί πρόσημο, η ακολουθία a_n δεν είναι μονότονη,.

ii. Επειδή $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, είναι φανερό ότι $a_n > 0$. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου (Λογισμός μιας Μεταβλητής, Ενότ. 2, §2.4, σελ. 21, ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες, §2.6.1-2.6.2), έχουμε:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1} n!}{2^n (n+1)!} = \frac{2^n 2 n!}{2^n n!(n+1)} = \frac{2}{n+1} \le 1$$

γιατί $n \ge 1 \Leftrightarrow n+1 \ge 2 \Leftrightarrow 1 \ge \dfrac{2}{n+1} \Leftrightarrow \dfrac{2}{n+1} \le 1$.

Συνεπώς, ισχύει ότι $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le 1 \Rightarrow a_{n+1} \le a_n$, γιατί, όπως είπαμε, $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άρα η ακολουθία a_n είναι (μη γνησίως) φθίνουσα άλλα ***τελικά*** γνησίως φθίνουσα καθώς $a_{n+1} < a_n$, για n>1.

2) Όσον αφορά τη μονοτονία (Λογισμός μιας Μεταβλητής, Ενότ. 2, §2.4, σελ. 21, ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες, §2.6.1-2.6.2), θα αποδείξουμε επαγωγικά ότι η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα. Δηλαδή θα αποδείξουμε ότι ισχύει $a_k < a_{k+1}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Για $k = 1$:

$a_1 = \sqrt{2} = \left(\sqrt{2}\right)^1 < \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}} = a_2$ επειδή $f(x) = a^x$ για $a > 1$, είναι αύξουσα. Άρα η σχέση ισχύει για $k = 1$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $k = n$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ δηλαδή $a_n < a_{n+1}$.

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $k = n+1$,δηλαδή $a_{n+1} < a_{n+2}$.

Από την υπόθεση έχουμε ότι $a_n < a_{n+1}$, συνεπώς επειδή $f(x) = a^x$ για $a > 1$, είναι αύξουσα. θα έχουμε ότι $\left(\sqrt{2}\right)^{a_n} < \left(\sqrt{2}\right)^{a_{n+1}}$ δηλαδή $a_{n+1} < a_{n+2}$.

Επομένως η σχέση $a_k < a_{k+1}$ ισχύει για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα η a_n είναι γνησίως αύξουσα.

Θα εξετάσουμε στη συνέχεια αν η ακολουθία μας είναι φραγμένη (Λογισμός μιας Μεταβλητής, Ενότ. 2, §2.4, σελ. 21, ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες §2.3).

Αφού η ακολουθία είναι (γνησίως) αύξουσα ένα κάτω φράγμα είναι ο πρώτος όρος $a_1 = \sqrt{2}$, δηλαδή ισχύει $a_1 < a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ με $k > 1$. Εύκολα αυτό αποδεικνύεται αυστηρά με επαγωγή ως εξής: για $k = 2$ ισχύει αφού $a_1 < a_2$ (a_n γνησίως αύξουσα) και αν υποθέσουμε ότι $a_1 < a_n$ τότε επειδή $a_n < a_{n+1}$ (a_n γνησίως αύξουσα) από μεταβατική ιδιότητα της ανισότητας έχουμε ότι $a_1 < a_{n+1}$. Άρα η σχέση μας ισχύει για κάθε $n > 1$ και συνεπώς η a_n είναι κάτω φραγμένη.

Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε επαγωγικά ότι η a_n είναι και άνω φραγμένη με άνω φράγμα το 2. Δηλαδή θα αποδείξουμε ότι ισχύει $a_k < 2$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Για $k = 1$ έχουμε ότι $a_1 = \sqrt{2} < 2$. Άρα η σχέση μας ισχύει.

Υποθέτουμε ότι ισχύει επίσης για $k = n$, δηλαδή $a_n < 2$.

Θα αποδείξουμε ότι και για $k = n+1$ ισχύει ότι $a_{n+1} < 2$. Έχουμε ότι $a_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{a_n}$. Από την υπόθεση όμως $a_n < 2$. Από τις δύο προηγούμενες σχέσεις συμπεραίνουμε ότι $a_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{a_n} < \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

Επομένως η σχέση $a_k < 2$, $k \in \mathbb{N}$, ισχύει για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα η a_n είναι άνω φραγμένη.

Επειδή η a_n είναι αύξουσα και (άνω) φραγμένη, θα συγκλίνει (Λογισμός μιας Μεταβλητής, Ενότ. 2, §2.4, σελ. 23 - Θεώρημα). Συνεπώς υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x = \lim a_n$.

Για να προσδιορίσουμε αυτό το όριο εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των ορίων (ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες, §2.4.1-2.4.4, §2.4.7):

$x = \lim a_{n+1} = \lim\left(\left(\sqrt{2}\right)^{a_n}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^{\lim a_n} = \left(\sqrt{2}\right)^x$. Το όριο είναι η λύση της εξίσωσης $x = \left(\sqrt{2}\right)^x$ ή $x^2 = 2^x$. Με δεδομένο ότι, λόγω των φραγμάτων της ακολουθίας, η λύση της εξίσωσης αυτής θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε $1 < x \le 2$ συμπεραίνουμε ότι $x = \lim a_n = 2$.

Για την ισοδύναμη μορφή της παραπάνω εξίσωσης χρησιμοποιήσαμε τις ακόλουθες ισοδυναμίες:

$$x = \left(\sqrt{2}\right)^x \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2 = \left(\left(\sqrt{2}\right)^x\right)^2 \overset{\left(a^m\right)^n = a^{mn}}{\Leftrightarrow} x^2 = \left(\sqrt{2}\right)^{2x} \Leftrightarrow x^2 = \left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^x \Leftrightarrow x^2 = 2^x$$

Άσκηση 2 (20 μον.)
Να υπολογισθούν τα όρια των ακολουθιών:

i) $a_n = \left(\dfrac{7n+1}{7n-1}\right)^n$, ii) $a_n = \dfrac{n^{1/3}\cos n}{n+1}$,

ii) $a_n = \dfrac{\sin(1)}{n^2+1} + \dfrac{\sin(2)}{n^2+2} + \ldots + \dfrac{\sin(n)}{n^2+n}$, iv) $a_n = n\sqrt{2n+3} - n\sqrt{2n}$.

Λύση.
i) Ο γενικός όρος της ακολουθίας γράφεται ως εξής (ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες, §2.4.1-2.4.4, §2.4.7):

$$a_n = \left(\frac{7n+1}{7n-1}\right)^n = \left(\frac{1+\dfrac{1}{7n}}{1-\dfrac{1}{7n}}\right)^n = \frac{\left(1+\dfrac{1}{7n}\right)^n}{\left(1-\dfrac{1}{7n}\right)^n} = \frac{\left(1+\dfrac{1/7}{n}\right)^n}{\left(1+\dfrac{(-1/7)}{n}\right)^n}$$

Είναι γνωστό ότι (Λογισμός μιας Μεταβλητής, Ενότ. 2, §2.4, σελ. 24 - Παράδειγμα – ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες, §2.9):

$$\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x, \text{ για } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Εφαρμόζοντας την σχέση αυτή για $x = 1/7$ και $x = -1/7$, έχουμε ότι:

$$\lim a_n = \frac{\lim\left(1+\dfrac{1/7}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\dfrac{(-1/7)}{n}\right)^n} = \frac{e^{1/7}}{e^{-1/7}} = e^{2/7}.$$

ii) Η ακολουθία μας γράφεται ως εξής:

$$a_n = \frac{n^{1/3}\cos n}{n+1} = \frac{n^{1/3}}{n+1}\cos n.$$

Η ακολουθία $\cos n$ είναι απολύτως φραγμένη αφού $|\cos n| \le 1$, συνεπώς είναι και φραγμένη.

Έστω η ακολουθία $b_n = \dfrac{n^{1/3}}{n+1}$. Το όριό της είναι:

$$\lim b_n = \lim\frac{n^{1/3}}{n+1} = \lim\frac{1}{\dfrac{n+1}{n^{1/3}}} = \lim\frac{1}{\dfrac{n}{n^{1/3}}+\dfrac{1}{n^{1/3}}} = \lim\frac{1}{n^{2/3}+\dfrac{1}{n^{1/3}}} =$$

$$= \frac{1}{\lim n^{2/3} + \lim\dfrac{1}{n^{1/3}}} = \frac{1}{\lim n^{2/3}+0} = \lim\frac{1}{n^{2/3}} = 0.$$

Εναλλακτικά,

$$\lim b_n = \lim\frac{n^{1/3}}{n+1} = \lim\frac{\dfrac{n^{1/3}}{n}}{\dfrac{n+1}{n}} = \lim\frac{\dfrac{1}{n^{2/3}}}{1+\dfrac{1}{n}} = \frac{\lim\dfrac{1}{n^{2/3}}}{\lim 1+\lim\dfrac{1}{n}} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

Οπότε, η ακολουθία a_n, ως γινόμενο μιας μηδενικής επί μία φραγμένη ακολουθία είναι μηδενική (ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες, §2.4.3, §2.4.7). Συνεπώς, $\lim a_n = 0$.

iii) Για $j = 0,1,2,3,\ldots$ έχουμε ότι $0 < |\sin(j)| \le 1$.

Επίσης από τη σχέση $n^2 + j \geq n^2 > 0$ έχουμε ότι $\frac{1}{n^2+j} \leq \frac{1}{n^2}$

Συνεπώς $\left|\frac{\sin(j)}{n^2+j}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ και

$$|a_n| \leq \left|\frac{\sin(1)}{n^2+1}\right| + \left|\frac{\sin(2)}{n^2+2}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin(n)}{n^2+n}\right| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \ldots \frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Όμως η $\frac{1}{n}$ είναι μηδενική ακολουθία άρα $\lim a_n = 0$ (ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες, §2.4 Πρόταση 2.4.6).

iv) Αν επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε απ' ευθείας το όριο της a_n, θα έχουμε ότι $\lim a_n = \lim\left[n\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n}\right)\right] = \lim n\left[\sqrt{2\lim n+3}-\sqrt{2\lim n}\right] = +\infty(+\infty-\infty)$ που είναι απροσδιόριστο. Όμως, αν πολλαπλασιάσουμε και διαιρέσουμε επί την συζυγή παράσταση της $\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n}$ (ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες, §2.4.7 Παράδειγμα 3x), θα έχουμε ότι:

$$\lim a_n = \lim\left[n\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n}\right)\right] = \lim n\frac{\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n}\right)\left(\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n}\right)}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n}} =$$

$$= \lim n\frac{\left(\sqrt{2n+3}\right)^2-\left(\sqrt{2n}\right)^2}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n}} = \lim n\frac{2n+3-2n}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n}} = \lim n\frac{3}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n}} =$$

$$= \lim\left[n\frac{3}{n^{1/2}\sqrt{\frac{2n+3}{n}}+n^{1/2}\sqrt{\frac{2n}{n}}}\right] = \lim\left[n^{1/2}\frac{3}{\sqrt{2+\frac{3}{n}}+\sqrt{2}}\right] =$$

$$= \lim n^{1/2}\lim\frac{3}{\sqrt{2+\lim\frac{3}{n}}+\sqrt{2}} = +\infty\frac{3}{2\sqrt{2}} = +\infty.$$

Άσκηση 3 (20 μον.)

1) (15 μον.) Να εξετασθούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω σειρές:

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^2}$, ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+5}$, iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{10^n}$.

2) (5 μον.) Να εξετασθεί αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2e^n}{5^n}$ συγκλίνει και, αν ναι, να υπολογισθεί το άθροισμά της.

Λύση.

1)

i) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^2}$ δεν συγκλίνει, διότι αν εφαρμόσουμε το Κριτήριο του d'Alembert (βιβλίο Γ. Δάσιου, Λογισμός μιας Μεταβλητής, Ενότητα 3, σελ. 37, κριτήριο λόγου (d'Alembert) και ΣΕΥ Λογισμός, Σειρές, §3.4) θα έχουμε:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{e^n}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{n+1}n^2}{e^n(n+1)^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{n+1}n^2}{e^n(n+1)^2} = e\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} =$$

$$= e\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = e\cdot 1 = e > 1$$

Επομένως, η σειρά αποκλίνει.

ii) Η σειρά αυτή είναι εναλλάσσουσα. Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του Leibnitz (ΣΕΥ Λογισμός, Σειρές, §2.4). Για την ακολουθία $a_n = \frac{1}{n+5}$ έχουμε ότι:

α) Έχει θετικούς όρους, αφού $a_n = \frac{1}{n+5} > 0$.

β) Είναι φθίνουσα, αφού $a_{n+1} < a_n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Πράγματι

$$a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)+5} < \frac{1}{n+5} \Leftrightarrow n+5 < n+6 \Leftrightarrow 5 < 6,$$

που ισχύει.

γ) Συγκλίνει στο 0, αφού $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+5} = 0$.

Συνεπώς η σειρά μας συγκλίνει.

iii) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του Cauchy (ΣΕΥ Λογισμός, Σειρές, §3.3). Για την ακολουθία $a_n = \frac{n^{10}}{10^n}$ που παράγει τη σειρά, έχουμε:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^{10}}{10^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^{10}}}{\sqrt[n]{10^n}} = \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{10}}{10}$$

και

$$\lim\sqrt[n]{a_n} = \lim\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{10}}{10} = \frac{1}{10}\lim\left(\sqrt[n]{n}\right)^{10} = \frac{1}{10}\left(\lim\sqrt[n]{n}\right)^{10} = \frac{1}{10}(1)^{10} = \frac{1}{10} < 1$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το ότι $\lim\sqrt[n]{n} = 1$ (ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες, §2.5 Πρόταση 2.5.4). Συνεπώς, η σειρά μας συγκλίνει.

2) Η σειρά αυτή γράφεται ως εξής:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2e^n}{5^n} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{5^n} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e}{5}\right)^n.$$

Η $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e}{5}\right)^n$ είναι γεωμετρική γιατί είναι της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty}r^n$ με $r = \frac{e}{5}$. Αυτή η σειρά συγκλίνει γιατί ισχύει $|r| = \left|\frac{e}{5}\right| < 1$ (ΣΕΥ Λογισμός, Σειρές, §2.1).

Το άθροισμά της είναι ίσο με $\frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{e}{5}} = \frac{5}{5-e}$.

Συνεπώς και η αρχική σειρά μας $2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e}{5}\right)^n$ θα συγκλίνει και το άθροισμά της θα είναι:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2e^n}{5^n} = 2\frac{5}{5-e} = \frac{10}{5-e}$$

Άσκηση 4 (20 μονάδες)

Να υπολογισθούν τα όρια

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sin x}$, ii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-4}$,

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cos 4x-\sin 3x}{x^2}$, iv) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[4]{2x^3-x^2+5}-\sqrt[3]{8x^3-3x^2+2x-5}\right)$.

Λύση.

i) Παρατηρούμε ότι, αν επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε αυτό το όριο με βάση τους συνήθεις κανόνες υπολογισμού ορίων (ΣΕΥ Λογισμός, Όρια και Συνέχεια συνάρτησης, §5.1.6), έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sin x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)}{\lim\limits_{x\to 0}\sin x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2+1}-\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}\sin x}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}x^2+1}-1}{\lim\limits_{x\to 0}\sin x}=$$
$$=\frac{\sqrt{0+1}-1}{0}=\frac{0}{0}$$

που είναι απροσδιόριστο. Αν όμως πολλαπλασιάσουμε επί τη συζυγή παράσταση του αριθμητή, θα πάρουμε ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\sin x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-1}{\sin x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1-1}{\sin x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin x}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}x}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=$$
$$=\frac{0}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}x^2+1}+1}=\frac{0}{\sqrt{0+1}+1}=\frac{0}{2}=0$$

ii) Αν επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε το παραπάνω όριο με βάση τους συνήθεις κανόνες ~~υπολογισμούς~~ ορίων (ΣΕΥ Λογισμός, Όρια και Συνέχεια συνάρτησης, §5.1.6) θα έχουμε

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+6x}{x^2-4}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3-5x^2+6x\right)}{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-4\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}\left(5x^2\right)+\lim\limits_{x\to 2}\left(6x\right)}{\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}4}=$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-5\lim\limits_{x\to 2}x^2+6\lim\limits_{x\to 2}x}{\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}4}=\frac{2^3-5\cdot 2^2+6\cdot 2}{2^2-4}=\frac{0}{0}$$

το οποίο είναι απροσδιόριστο. Αν όμως παραγοντοποιήσουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+6x}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x\left(x^2-5x+6\right)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x\left(x^2-5x+6\right)}{x^2-4}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-3)}{(x+2)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left[x(x-3)\right]}{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x\lim\limits_{x\to 2}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}=$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x\left(\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}3\right)}{\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}2}=\frac{2(2-3)}{2+2}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

iii) Αν επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε το παραπάνω όριο με βάση τους συνήθεις κανόνες υπολογισμού ορίων (ΣΕΥ Λογισμός, Όρια και Συνέχεια συνάρτησης, §5.1.6) θα έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cos 4x-\sin 3x}{x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(\sin 3x\cos 4x-\sin 3x)}{\lim\limits_{x\to 0}x^2}=$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(\sin 3x\cos 4x)-\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x}{\lim\limits_{x\to 0}x^2}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x\lim\limits_{x\to 0}\cos 4x-\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x}{\lim\limits_{x\to 0}x^2}=\frac{0\cdot 1-0}{0}=\frac{0}{0}$$
το οποίο είναι απροσδιόριστο. Παρατηρούμε όμως ότι στον αριθμητή του ορίου μας εμφανίζονται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\sin 3x$ και $\cos 4x$ και στον παρονομαστή το x^2. Γνωρίζοντας λοιπόν ότι $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$ και $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\cos z-1}{z}=0$ (ΣΕΥ Λογισμός, Όρια και Συνέχεια συνάρτησης, §5.1.13), κάνουμε τα εξής:
$$\frac{\sin 3x\cos 4x-\sin 3x}{x^2}=\frac{\sin 3x(\cos 4x-1)}{x\cdot x}=\frac{\sin 3x}{x}\frac{\cos 4x-1}{x}=12\frac{\sin 3x}{3x}\frac{\cos 4x-1}{4x}$$
οπότε
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cos 4x-\sin 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(12\frac{\sin 3x}{3x}\frac{\cos 4x-1}{4x}\right)=12\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-1}{4x}$$
Θέτουμε $u=3x$ και $v=4x$. Αφού, όταν $x\to 0$, $u=3x\to 0$ και $v=4x\to 0$, θα έχουμε ότι
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cos 4x-\sin 3x}{x^2}=12\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\lim_{v\to 0}\frac{\cos v-1}{v}=12\cdot 1\cdot 0=0$$
iv) Θα έχουμε:
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{2x^3-x^2+5}-\sqrt[3]{8x^3-3x^2+2x-5}\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^4\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^4}\right)}-\sqrt[3]{x^3\left(8-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)}\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt[4]{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^4}}-x\sqrt[3]{8-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3}}\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^4}}-\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{8-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3}}\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[4]{\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x^4}}-\sqrt[3]{8-\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x^3}}\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[4]{0-0+0}-\sqrt[3]{8-0+0-0}\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x(0-2)=(+\infty)(-2)=-\infty.$$

Άσκηση 5 (20 μον.)

1) (10 μον.) Να βρεθούν τα $a,b\in R$, ώστε $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-ax+b-1}{x-3}=5$.

2) (10 μον.) Να εξετασθεί αν η παρακάτω συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο $x=2$:
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-4|+|x-2|}{|x+1|-3}, & x<2\\ 6, & x=2\\ -\dfrac{|x^2-4|+|x-2|}{|x+1|-3}, & x>2\end{cases}.$$

Λύση.

1) Το όριο του αριθμητή της συνάρτησης $\frac{x^2-ax+b-1}{x-3}$ όταν $x\to 3$ είναι ένα πραγματικός αριθμός αφού το $x^2-ax+b-1$ είναι ένα πολυώνυμο. Το όριο του

παρονομαστή της είναι το 0. Είναι φανερό λοιπόν ότι το όριο $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-ax+b-1}{x-3}$ θα είναι ένας πραγματικός αριθμός μόνο αν $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-ax+b-1\right)=0$. Αλλιώς, αν $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-ax+b-1\right)$ είναι κάποιος πραγματικός αριθμός διάφορος του 0, το αρχικό όριο θα ισούται με άπειρο.

Συνεπώς, θα έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 3}\left(x^2-ax+b-1\right)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 3}x^2-a\lim_{x\to 3}x+b-1=0 \Leftrightarrow 9-3a+b-1=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow b=3a-8$$

Αντικαθιστώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα στη σχέση της εκφώνησης έχουμε:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-ax+3a-8-1}{x-3}=5 \Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{x^2-ax+3a-9}{x-3}=5 \Rightarrow$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9-ax+3a}{x-3}=5 \Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)-a(x-3)}{x-3}=5 \Rightarrow$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)-a(x-3)}{x-3}=5 \Rightarrow \lim_{x\to 3}((x+3)-a)=5 \Rightarrow$$
$$\lim_{x\to 3}x+3-a=5 \Rightarrow 3+3-a=5 \Rightarrow a=1.$$

Οπότε $b=3a-8=3-8=-5$ και συνεπώς, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-ax+b-1}{x-3}=5$ όταν $a=1$ και $b=-5$.

2) Για να είναι η $f(x)$ συνεχής, θα πρέπει $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=f(2)$ (ΣΕΥ Λογισμός, Όρια και Συνέχεια συνάρτησης, §5.1.9, §5.3.1). Υπολογίζουμε τα δύο πλευρικά όρια:

Όταν $x\to 2^-$, τότε $x<2 \Rightarrow x-2<0 \Rightarrow |x-2|=-x+2$. Επίσης, επειδή $x<2$ και το x είναι στην περιοχή του 2 (δηλαδή κοντά στο 2), θα έχουμε ότι $x<2 \Rightarrow x^2<4 \Rightarrow x^2-4<0 \Rightarrow |x^2-4|=-x^2+4$. Στην ίδια περιοχή $x+1>0$, οπότε $|x+1|=x+1$. Συνεπώς:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|x^2-4|+|x-2|}{|x+1|-3}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-x^2+4-x+2}{x+1-3}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-x^2-x+6}{x-2}=-\lim_{x\to 2^-}\frac{(x+3)(x-2)}{x-2}=$$
$$=-\lim_{x\to 2^-}(x+3)=-5$$

Όταν $x\to 2^+$, τότε $x>2 \Rightarrow x-2>0 \Rightarrow |x-2|=x-2$. Επίσης, επειδή $x>2$, θα έχουμε ότι $x>2 \Rightarrow x^2>4 \Rightarrow x^2-4>0 \Rightarrow |x^2-4|=x^2-4$, ενώ $x+1>0$, οπότε $|x+1|=x+1$. Συνεπώς:

$$\lim_{x\to 2^+}\left[-\frac{|x^2-4|+|x-2|}{|x+1|-3}\right]=-\lim_{x\to 2^+}\frac{|x^2-4|+|x-2|}{|x+1|-3}=-\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4+x-2}{x+1-3}=$$
$$=-\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+x-6}{x-2}=-\lim_{x\to 2^+}\frac{(x+3)(x-2)}{x-2}=-\lim_{x\to 2^+}(x+3)=-5$$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=-5$. Όμως, $f(2)=6\neq -5$. Συνεπώς η $f(x)$ δεν είναι συνεχής στο $x=2$.

Για τον προγραμματισμό της μελέτης σας υπάρχει το Χρονοδιάγραμμα Μελέτης που περιέχεται στον Οδηγό Σπουδών της ΘΕ. Ο ακόλουθος πίνακας δεν έχει σκοπό να υποκαταστήσει το Χρονοδιάγραμμα Μελέτης αλλά να υποδείξει ορισμένα σημεία του διδακτικού υλικού που σχετίζονται άμεσα με τις ασκήσεις της Εργασίας 3.

Άσκ.	Θεωρία	Συναφείς Ασκήσεις	Άλλες Ασκήσεις
1	Η άσκηση αναφέρεται στη μελέτη των ακολουθιών. Συγκεκριμένα εξετάζεται η μονοτονία, η ύπαρξη φραγμάτων, η σύγκλιση και ο υπολογισμός του ορίου μιας ακολουθίας. Θα πρέπει να μελετήσετε τα εξής: Βιβλίο Ενότητα 2, §2.4. ΣΕΥ Λογισμός, -Ακολουθίες, §2.3, §2.4, §2.5, §2.6.	ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες §2.6.2 Παραδείγματα Εργασία3 2010 Ασκ2 Εργασία3 2009 Ασκ3β Εργασία3 2008 Ασκ4β	ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες §2.3.8 Παραδείγματα Εργασία3 2010 Ασκ3iv Εργασία3 2008 Ασκ3β
2	Η άσκηση αναφέρεται στον υπολογισμό του ορίου μιας ακολουθίας. Θα πρέπει να μελετήσετε τα εξής: Βιβλίο Ενότητα 2, §2.4. ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες, §2.4, §2.5, §2.9.	ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες §2.3.8-1ii Παράδειγμα § 2.4.7-3vi , 2.4.7-3vii, 2.4.7-3x, 2.4.7-3xi, 2.4.7-3xii Παραδείγματα §2.10.6 Παράδειγμα 1 Εργασία3 2008, Ασκ4αi	ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες §2.5.3 Παραδείγματα 1,2,6 §2.4.7 Παραδείγματα §2.10.6 Παραδείγματα Εργασία3 2010 Ασκ3iv
3	Η άσκηση αναφέρεται στη μελέτη των σειρών. Συγκεκριμένα εξετάζεται η σύγκλιση και ο υπολογισμός του αθροίσματος μιας σειράς. Θα πρέπει να μελετήσετε τα εξής: Βιβλίο Ενότητα 3. ΣΕΥ Λογισμός, Σειρές.	ΣΕΥ Λογισμός, Σειρές, §2.4 Παραδείγματα §3.4 Παραδείγματα §3.3 Παραδείγματα 1-6 Εργασία3 2010 Ασκ4i-ii Εργασία3 2009 Ασκ5αii, Ασκ5αiii ΣΕΥ Λογισμός, Σειρές, §2.1 Παραδείγματα 1,2	Εργασία3 2008 Ασκ5 ΣΕΥ Λογισμός, Σειρές, §3.3 Παράδειγμα 7 Εργασία3 2010 Ασκ4iii Εργασία3 2009 Ασκ5αi ΣΕΥ Λογισμός, Σειρές, §2.1 Παράδειγμα 3
4	Η άσκηση αναφέρεται στη μελέτη των ορίων συνάρτησης. Θα πρέπει να μελετήσετε τα εξής: Βιβλίο Ενότητα 4, §4.1. ΣΕΥ Λογισμός, Όρια και Συνέχεια συνάρτησης, §5.1, §5.2.	ΣΕΥ Λογισμός, Όρια και συνέχεια συνάρτησης §5.2.7 Παράδειγμα 2i Εργασία3 2009 Ασκ6α ΣΕΥ Λογισμός, Όρια και συνέχεια συνάρτησης §5.1.7 Παράδειγμα 2i §5.1.18 Παραδείγματα §5.2.15 Παραδείγματα 2,3	ΣΕΥ Λογισμός, Όρια και συνέχεια συνάρτησης §5.2.7 Παραδείγματα §5.1.7 Παράδειγμα 2 Εργασία3 2010 Ασκ6α Εργασία3 2008 Ασκ6α ΣΕΥ Λογισμός, Όρια και συνέχεια συνάρτησης §5.2.15 Παράδειγμα 1
5	Η άσκηση αναφέρεται στη μελέτη των ορίων και τη συνέχεια συνάρτησης. Συγκεκριμένα εξετάζεται η ύπαρξη ορίου τα πλευρικά όρια και οι συνθήκες συνέχειας συνάρτησης. Θα πρέπει να μελετήσετε τα εξής: Βιβλίο Ενότητα 4, §4.1-§4.3. ΣΕΥ Λογισμός, Όρια και Συνέχεια συνάρτησης, §5.1,§5.2, §5.3.	ΣΕΥ Λογισμός, Όρια και συνέχεια συνάρτησης §5.3.3 Παραδείγματα 3,4 Εργασία3 2009 Ασκ6γ Εργασία3 2010 Ασκ5	ΣΕΥ Λογισμός, Όρια και συνέχεια συνάρτησης §5.3.3 Παραδείγματα Εργασία3 2008 Ασκ6β

Σημείωση: Οι παραπάνω παραπομπές αναφέρονται στο βιβλίο «Λογισμός μιας μεταβλητής» του Γ. Δάσιου (αναφέρεται ως 'Βιβλίο' στον προηγούμενο πίνακα), στο υλικό ΣΕΥ και στις εργασίες παλαιοτέρων ετών που υπάρχουν αναρτημένα στην ιστοσελίδα http://edu.eap.gr/pli/pli12/