ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (Θ.Ε. ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 4η

Ημερομηνία Αποστολής στον Φοιτητή: 13 Φεβρουαρίου 2012
Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 16 Μαρτίου 2012

Πριν από την λύση κάθε άσκησης καλό είναι να μελετώνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις των υποδείξεων και παραπομπών στα συγγράμματα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της τέταρτης εργασίας αναφέρονται στα:

Ενότητα 5 (Παράγωγος)
Ενότητα 6 (Βασικά Θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού)
Ενότητα 7 (Ακρότατα)
Ενότητα 8 (Το ανάπτυγμα Taylor)

του συγγράμματος του ΕΑΠ «**Λογισμός Μιας Μεταβλητής**» του Γ. Δάσιου.

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα συμβουλευθείτε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στη http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm ως εξής:

Συνοδευτικό **Ε**κπαιδευτικό **Υ**λικό :

Λογισμός Παράγωγοι, Βασικά Θεωρήματα Διαφορικού Λογισμού, Σειρές Taylor.

Στόχοι:

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η κατανόηση της έννοιας της παραγώγου και των εφαρμογών της στον υπολογισμό ορίων, εύρεσης ακρότατων και μελέτης συνάρτησης. Επίσης σκοπός είναι η κατανόηση ανάπτυξης και εφαρμογής της πολυωνυμικής προσέγγισης μέσω των σειρών Taylor.

Άσκηση 1 (25 μονάδες)

α) (Μον. 10) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b, & \text{εάν } x\le 4 \\ \sqrt{x^2+9}, & \text{εάν } x>4 \end{cases}$.

Να προσδιορισθούν τα $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη για κάθε x $\in\mathbb{R}$.

β) (Μον. 9) Να βρείτε, όπου ορίζεται, την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων

i) $g(x)=\dfrac{x^2-5}{\ln x}$ ii) $h(x)=\left(\dfrac{1+x}{1+x^2}\right)^2$ iii) $k(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$

γ) (Μον. 6) Να υπολογίσετε την δεύτερη παράγωγο l''(x) της συνάρτησης $l(x)=x^m\cos(nx)$ όπου m, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί και στην συνέχεια τις τιμές $l'(0)$, $l''(0)$, $l'(\pi)$, $l''(\pi)$.

Λύση

α) Για όλα τα x με $x\neq 4$ η f είναι παραγωγίσιμη. Αναγκαία συνθήκη ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=4$ είναι να είναι συνεχής στο σημείο αυτό. Συνεπώς θα πρέπει:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^+} f(x)=f(4) \qquad (1)$$

Όμως

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4}(x^2+ax+b)=16+4a+b=f(4)$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4}(\sqrt{x^2+9})=5$$

Επομένως η συνθήκη (1) ισχύει αν και μόνο αν

$$16+4a+b=5 \Leftrightarrow 4a+b=-11 \qquad (2)$$

Για την παραγωγισιμότητα στο 4 αρκεί να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$ στο $\mathbb{R}$, δηλαδή αρκεί να υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$ και $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$ στο $\mathbb{R}$ και να είναι ίσα:

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4^-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} \qquad (3)$$

Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4^+}\frac{\sqrt{x^2+9}-(16+4a+b)}{x-4}\overset{4a+b=-11}{=}\lim_{x\to 4^+}\frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x-4}=$$

$$=\lim_{x\to 4^+}\frac{(\sqrt{x^2+9}-5)(\sqrt{x^2+9}+5)}{(x-4)(\sqrt{x^2+9}+5)}=\lim_{x\to 4^+}\frac{x^2+9-25}{(x-4)(\sqrt{x^2+9}+5)}=$$

$$=\lim_{x\to 4^+}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(\sqrt{x^2+9}+5)}=\lim_{x\to 4^+}\frac{x+4}{\sqrt{x^2+9}+5}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

και

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4^-}\frac{x^2+ax+b-(16+4a+b)}{x-4}=(x^2+ax+b)'$$

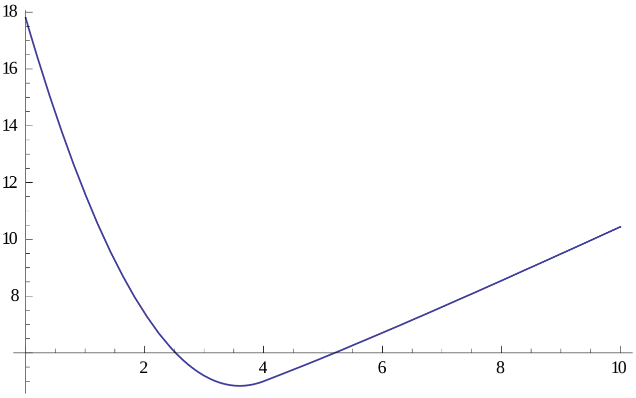
$$=\lim_{x\to 4^-}\frac{x^2-16+ax-4a}{x-4}=\lim_{x\to 4^-}\frac{(x-4)(x+4)+a(x-4)}{x-4}=$$

$$=\lim_{x\to 4^-}\frac{(x-4)(x+4+a)}{x-4}=\lim_{x\to 4^-}(x+4+a)=8+a$$

Η (3) ισχύει αν και μόνο αν $8+a=\frac{4}{5}$ δηλαδή

$a=-\frac{36}{5}$ και μετά από αντικατάσταση του α στην (2)

προκύπτει $b=\frac{89}{5}$.



Εικόνα 1. Γραφική παράσταση της *f* στο [0,10]

β) i) Ο αριθμητής είναι πολυωνυμική συνάρτηση ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη παντού στο $\mathbb{R}$. Η συνάρτηση στον παρονομαστή ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ όμως μηδενίζεται στο 1 άρα η g ορίζεται στο $(0,+\infty)\setminus\{1\}$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό με

$$g'(x)=\frac{\left(x^2-5\right)'\ln\left(x\right)-\left(x^2-5\right)\left(\ln\left(x\right)\right)'}{\ln^2\left(x\right)}=\frac{2x\ln\left(x\right)-\dfrac{x^2-5}{x}}{\ln^2\left(x\right)}=\frac{2x^2\ln\left(x\right)-x^2+5}{x\ln\left(x\right)^2}$$

(ii) Η h είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο αυτό ως σύνθεση παραγωγίσιμων στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεων με παράγωγο

$$h'(x)=2\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)'=2\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)\frac{(1+x)'\left(1+x^2\right)-(1+x)\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$=2\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2-2x(1+x)}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2(1+x)(-x^2-2x+1)}{\left(1+x^2\right)^3}$$

(iii) Η συνάρτηση k ορίζεται όταν $\frac{x^2+1}{x^2-1}\geq 0$ και $x^2-1\neq 0$ και $\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}>0$, δηλαδή $x^2-1>0$ που ισχύει αν και μόνο αν $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. Στο σύνολο αυτό η συνάρτηση γράφεται:

$k(x)=\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)=\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)\right]$ είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$k'(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2-1}\right]=\frac{1}{2}\frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{2x\left(x^2-1-x^2-1\right)}{2(x^4-1)}=\frac{-2x}{x^4-1}$$

γ) $l'\left(x\right)=(x^m)'\cos\left(nx\right)+x^m(\cos\left(nx\right))'=mx^{m-1}\cos\left(nx\right)+x^m n(-\sin\left(nx\right))=mx^{m-1}\cos\left(nx\right)-nx^m\sin\left(nx\right)$.

Ειδικότερα, για m=1: $l'(x)=\cos(nx)-nx\sin(nx)$.

$$l''\left(x\right)=[mx^{m-1}\cos\left(nx\right)-nx^m\sin\left(nx\right)]'=m(x^{m-1}\cos\left(nx\right))'-n(x^m\sin\left(nx\right))'$$

$$=m(m-1)x^{m-2}\cos(nx)-2mnx^{m-1}\sin(nx)-n^2x^m\cos(nx).$$

Ειδικότερα, για m=1: $l''(x)=-2n\sin(nx)-n^2x\cos(nx)$

και για m=2: $l''(x)=2\cos(nx)-4nx\sin(nx)-n^2x^2\cos(nx)$.

Από τα παραπάνω έχουμε: $l'(0)=0$ αν $m>1$, ενώ αν $m=1$, $l'(0)=\cos(0)=1$,

$l''(0)=0$ αν $m>2$, ενώ αν $m=2$, $l''(0)=2$, και αν $m=1$, $l''(0)=0$.

$l'(\pi)=m\pi^{m-1}\cos\left(n\pi\right)=(-1)^n m\pi^{m-1}$

$l''(\pi)=m(m-1)\pi^{m-2}\cos(n\pi)-n^2\pi^m\cos(n\pi)=(-1)^n\left[m(m-1)\pi^{m-2}-n^2\pi^m\right]$.

Άσκηση 2 (15 μονάδες)

α. (Μον. 7) Με χρήση του θεωρήματος μέσης τιμής να αποδείξετε ότι ισχύει

$$\cos(2x) < \frac{\sin(2x)}{2x} < 1, \text{ για κάθε } \; x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

β. (Μον. 8) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2$.

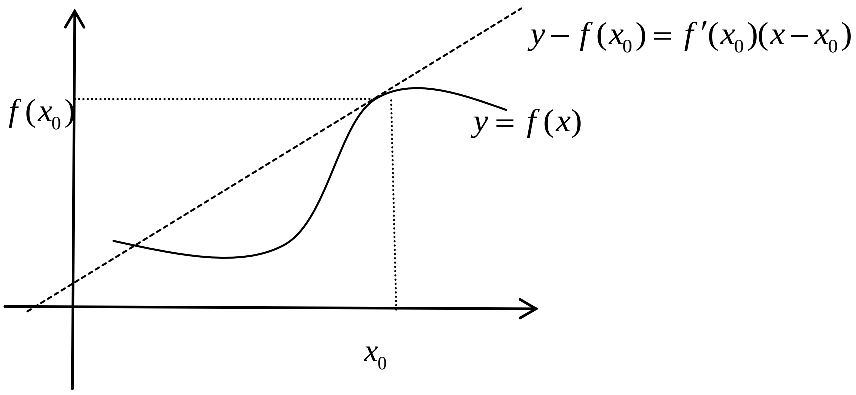
i) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας *T* που εφάπτεται στο γράφημα της f (σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων O*xy*) στο σημείο $(t,\ f(t))$ όπου *t*>0.

ii) Στη συνέχεια, να δείξετε ότι η ευθεία *T* τέμνει τον άξονα των *x* σε μοναδικό σημείο με γνήσια θετική τετμημένη. Την τετμημένη αυτή να την ονομάσετε *g*(*t*) και να καθορίσετε τον τύπο της.

iii) Να δείξετε ότι ορίζεται ακολουθία θετικών αριθμών με δεδομένο x_1>2 και τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = g(x_n)$, *n*=1,2,3,…. Δείξτε ότι η ακολουθία αυτή είναι κάτω φραγμένη από το $\sqrt{2}$, φθίνουσα και βρείτε το όριό της.

Υπόδειξη:

Η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο γράφημα της $y = f(x)$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Δηλαδή η εφαπτομένη ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης (κλίση) $f\,'(x_0)$.



Λύση

α) Για $x = \pi/2$, η αποδεικτέα γράφεται $\cos(\pi) < \frac{\sin(\pi)}{\pi} < 1$**,** δηλαδή −1<0<1 που ισχύει. Για $x \in (0, \pi/2)$ θεωρούμε τη συνάρτηση $f(a) = \sin(2a), a \in [0, x]$ που είναι συνεχής στο $[0, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$. Συνεπώς από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (0, x)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, δηλαδή $2\cos(2\xi) = \frac{\sin(2x)}{x}$ το οποίο γράφεται $\cos(2\xi) = \frac{\sin(2x)}{2x}$. Όμως, επειδή $0 < \xi < x < \frac{\pi}{2}$, δηλαδή $0 < 2\xi < 2x < \pi$ έχουμε ότι $\cos 0 > \cos(2\xi) > \cos(2x) > \cos\pi$, καθώς η συνάρτηση cos είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, \pi]$. Από την τελευταία σχέση με αντικατάσταση του $\cos(2\xi)$ με $\frac{\sin(2x)}{2x}$ προκύπτει η ζητούμενη διπλή ανισότητα: $\cos(2x) < \frac{\sin(2x)}{2x} < 1$ και για $x \in (0, \pi/2)$.

β)

i) Καθώς $f\,'(x) = 2x$ η εξίσωση της ευθείας *T* είναι $y - (t^2 - 2) = 2t(x - t)$.

ii) Για το σημείο τομής με τον άξονα των *x* έχουμε (*x*,*y*)=(*g*(*t*),0) και από την εξίσωση της ευθείας έχουμε $0 - (t^2 - 2) = 2\,t\,(g(t) - t)$ και, λύνοντας ως προς *g*(*t*), βρίσκουμε $g(t) = \frac{2 + t^2}{2t}$.

iii) Ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας είναι $x_{n+1} = g(x_n) = \frac{2 + {x_n}^2}{2x_n}$, με x_1>2. Πρώτα θα αποδείξουμε ότι $x_n > 2^{1/2}$, για κάθε *n*=1,2,…, με μαθηματική επαγωγή: η σχέση ισχύει για *n*=1 καθώς x_1=2> $2^{1/2}$. Υποθέτουμε ότι για *n* =κ≥1 ισχύει (υπόθεση επαγωγής) και θα δείξουμε ότι ισχύει για *n* =κ+1.

Πράγματι ισχύουν οι ισοδυναμίες: $x_{\kappa+1} > \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{2 + {x_\kappa}^2}{2x_\kappa} > \sqrt{2} \Leftrightarrow 2 + {x_\kappa}^2 > 2\sqrt{2}x_\kappa$ καθώς $x_\kappa > 2^{1/2} > 0$. Η τελευταία σχέση ισοδυναμεί με $2 + {x_\kappa}^2 - 2\sqrt{2}x_\kappa > 0$ δηλαδή $(\sqrt{2} - x_\kappa)^2 > 0$ που ισχύει λόγω της υπόθεσης επαγωγής.

Αρα η ακολουθία έχει κάτω φράγμα το $2^{1/2}$. Θα δείξουμε ότι είναι φθίνουσα: πράγματι $x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{2+x_n^2}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - 2 - x_n^2}{2x_n} = \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} > 0$, καθώς ο παρονομαστής είναι θετικός και, για τον αριθμητή, αφού αποδείξαμε πριν ότι $x_n > 2^{1/2}$, καθώς τα μέλη είναι θετικά, υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε: $x_n^2 > 2$. Αρα $x_n > x_{n+1}$ για κάθε n φυσικό. Συνεπώς, η ακολουθία ως φθίνουσα και κάτω φραγμένη (άρα και φραγμένη) είναι συγκλίνουσα στο $\mathbb{R}$. Εστω α το όριό της που βρίσκεται στο διάστημα $[2^{1/2}, x_1]$ λόγω των φραγμάτων (προφανές άνω φράγμα ο πρώτος όρος). Από τον αναδρομικό τύπο και αφού κάθε υπακολουθία της τείνει στο ίδιο με αυτή όριο, για το όριο έχουμε την εξίσωση: $\alpha = \frac{2+\alpha^2}{2\alpha}$ και αφού α διάφορο του μηδενός $\alpha^2 - 2 = 0$ που έχει λύσεις $\alpha = \pm\sqrt{2}$. Τελικά $\alpha = \sqrt{2}$ καθώς η αρνητική ρίζα απορρίπτεται επειδή $\alpha > 0$.

Άσκηση 3. (20 μονάδες)

α) (Μον. 16) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$, **ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(bx)}{x^a}$, $a, b>0$, **iii)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}$, **iv)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin(x)}{2x+\cos(x)}$.

β) (Μον. 4) Εφόσον υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)^{\frac{1}{x}}$, να δείξετε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1} = 1$.

Λύση

α)

i) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$$

όπου η $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ ορίζεται για $x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. Αλλά

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \overset{+\infty\times 0}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x-1}{x+1}\left(\frac{-2}{(x-1)^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-2}{x^2-1}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-1} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^2)'}{(x^2-1)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{2x} = 2$$

Συνεπώς

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = e^2 \approx 7.38906$$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(bx)}{x^a} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(bx))'}{(x^a)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{ax^a} = 0$

iii) Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left((\ln x)^2\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(\ln x)\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$$

iv) Έχουμε

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\le\left|\frac{1}{x}\right|\Leftrightarrow-\frac{1}{|x|}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{|x|}$$

και επειδή

$$\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{|x|}=0=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|}$$

θα έχουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

Παρόμοια μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=0$$

Το όριο υπολογίζεται (μετά από παραγοντοποίηση αριθμητή και παρονομαστή) ως εξής :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{2x+\cos x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)}{\cancel{x}\left(2+\frac{\cos x}{x}\right)}=\frac{1-0}{2+0}=\frac{1}{2}$$

Στο ερώτημα αυτό δεν μπορεί να εφαρμοσθεί **άμεσα** ο κανόνας de l'Hospital. Για να εφαρμοστεί ο κανόνας de l'Hospital θα πρέπει να υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sin x)'}{(2x+\cos x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cos x}{2-\sin x}$$

το οποίο όμως δεν υπάρχει. Για να το δείξουμε μπορούμε να πάρουμε τις ακολουθίες $x_n=2\pi n\overset{n\to+\infty}{\to}+\infty$ και $y_n=2\pi n+\frac{\pi}{2}\overset{n\to+\infty}{\to}+\infty$ και να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cos x_n}{2-\sin x_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cos(2n\pi)}{2-\sin(2n\pi)}=\frac{1-1}{2-0}=0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cos y_n}{2-\sin y_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{2-\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1-0}{2-1}=1$$

Επειδή τα παραπάνω όρια είναι διαφορετικά όρια, άρα δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\cos x}{2-\sin x}$ και συνεπώς δεν μπορεί να εφαρμοσθεί ο κανόνας D' Hospital.

β) Έχουμε ότι

$$\sqrt[n]{n+1}=(n+1)^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{\ln(n+1)}{n}}\quad\text{και}\quad\lim_{x\to+\infty}(x+1)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln(x+1)}.$$

Συνεπώς αρκεί να βρούμε το όριο της

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}.$$

Με τη βοήθεια του κανόνα L'Hospital έχουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln(x+1)\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=0\times1=0.$$

Άρα

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln(x+1)}=e^0=1.$$

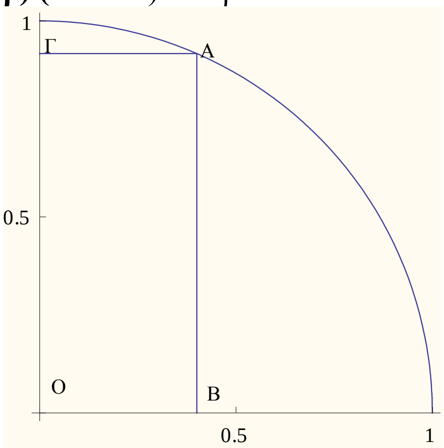
Συνεπώς, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n}}=e^0=1$ (βλ. παρόμοια άσκηση στο βιβλίο σ. 134).

Άσκηση 4 (25 μονάδες)

α) (Μον.15) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, με $x\in(-\infty,+\infty)$. Να προσδιορίσετε:

i) Τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της στα οποία είναι **α)** αύξουσα, **β)** φθίνουσα
ii) Τα τοπικά ακρότατά αυτής (μέγιστα και ελάχιστα).
iii) Τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της στα οποία **α)** στρέφει τα κοίλα άνω, **β)** στρέφει τα κοίλα κάτω.
iv) Τα σημεία καμπής.
v) Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων *Oxy*.
vi) Τις ασύμπτωτες της *f*.
vii) Συνοψίστε σε έναν πίνακα τα παραπάνω στοιχεία και δώστε μία γραφική παράσταση της συνάρτησης.

β) (Μον.10) Σε ορθοκανονικό σύστημα O*xy* θεωρούμε σημείο A στο πρώτο τεταρτημόριο του μοναδιαίου κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και τις προβολές αυτού B και Γ στους άξονες των *x*, *y* αντίστοιχα.



Να βρεθεί η θέση του A ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΟΓ να είναι μέγιστο.
Υπόδειξη: Για τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου ισχύει ΟΒ^2+ΟΓ^2=1 (Πυθαγόρειο Θεώρημα).

Λύση

α)

i) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παρονομαστή μη μηδενιζόμενο και

$$f'(x)=\frac{(x^2-1)'(x^2+1)-(x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

Αρα έχουμε: $f'(x)<0$ αν $x<0$ και $f'(x)>0$ αν $x>0$. Επομένως, η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$.

ii) Εφόσον η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$, έχουμε τοπικό αλλά και ολικό ελάχιστο την τιμή -1 στο x=0.

Αν δεν είχαμε την πληροφορία για το πρόσημο της πρώτης παραγώγου θα εργαζόμαστε ως εξής:
Πιθανό τοπικό ακρότατο έχουμε όταν η πρώτη παράγωγος της f μηδενίζεται :

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$$

Έχουμε επίσης ότι

$$f''(x)=\left(\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}\right)'=\frac{(4x)'\left(x^2+1\right)^2-(4x)\left(\left(x^2+1\right)^2\right)'}{\left(\left(x^2+1\right)^2\right)^2}=\frac{4\left(x^2+1\right)^2-8x\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^4}=$$

$$=\frac{4\left(x^2+1\right)-16x^2}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{4-12x^2}{\left(x^2+1\right)^3}$$

Για $x=0$, $f''(0)=4>0$ άρα στο σημείο $\left(0, f(0)=-1\right)$ έχουμε τοπικό ελάχιστο.

(iii) Εξετάζουμε το πρόσημο της δευτέρας παραγώγου:

$$f''(x)=\left(\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}\right)'=\frac{4\left(x^2+1\right)^2-8x\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^4}==\frac{4\left(x^2+1\right)-16x^2}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{4-12x^2}{\left(x^2+1\right)^3}$$

Ο παρονομαστής είναι πάντα θετικός, ενώ για τον αριθμητή έχουμε την παραγοντοποίηση :

$$4-12x^2=4\left(1-3x^2\right)=4\left(1-\sqrt{3}x\right)\left(1+\sqrt{3}x\right)$$

από την οποία φτιάχνοντας τον παρακάτω πίνακα προσήμων των παραγόντων

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}/3$		$\sqrt{3}/3$		$+\infty$
πρόσημο $\left(1-\sqrt{3}x\right)$		+		+	0	−	
πρόσημο $\left(1+\sqrt{3}x\right)$		−	0	+		+	
Πρόσημο f''		−	0	+	0	−	
Στροφή κοίλων της f		$\cap$		$\cup$		$\cap$	

συμπεραίνουμε το πρόσημο της f'' και τελικά ότι:

η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στα διαστήματα $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$, $(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ όπου $f''<0$

και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο διάστημα $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ όπου $f''>0$.

iv) Από τον παραπάνω πίνακα αλλαγής της στροφής των κοίλων της f έχουμε ότι τα σημεία

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{1}{2}\right),\quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{1}{2}\right)$$

είναι τα μόνα σημεία καμπής της f.

(v) Η συνάρτηση τέμνει τον άξονα των x στα σημεία όπου $y=f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$ δηλαδή στα σημεία $(-1,0),(1,0)$ και επειδή $f(0)=\frac{0^2-1}{0^2+1}=-1$ τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $(0, -1)$.

vi) Η συνάρτηση δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτο αφού για κάθε $a\in\mathbb{R}$ είναι $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)\neq\pm\infty$. Έχει όμως οριζόντια ασύμπτωτο την $y(x)=1$ αφού,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

και

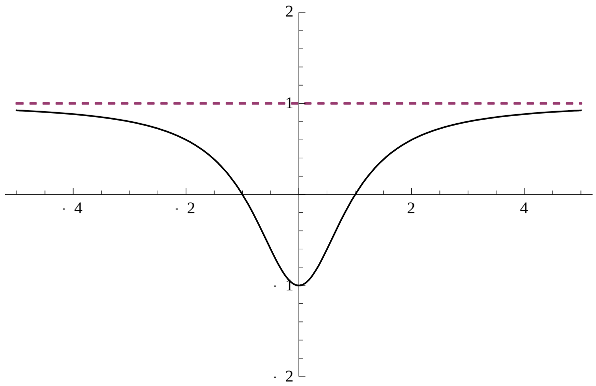
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1-0}{1+0} = 1 .$$

vii) Τα παραπάνω συνοψίζονται στον επόμενο πίνακα :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-		-		-	0	+		+		+	
$f''(x)$		-		-	0	+		+	0	-		-	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
					σ.κ.		τ.ε.		σ.κ.				

Μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι $f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1} = f(x)$ και συνεπώς η συνάρτηση είναι άρτια και άρα το γράφημα της είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα $y'y$.

Από την παραπάνω μελέτη προκύπτει η ακόλουθη μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ (συνεχής γραμμή) και της οριζόντια ασύμπτωτης $y(x)$ σ’ αυτή (διακεκομμένη γραμμή) :



Εικόνα 2. Γραφική παράσταση της f (συνεχής γραμμή) και της οριζόντια ασύμπτωτης σ’ αυτή (διακεκομμένη γραμμή)

β) Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΟΓ ισούται προς xy και, καθώς $x^2+y^2=1$ με x, y μη αρνητικά, παίρνει την μορφή $x\sqrt{1-x^2}$ **.** Εχουμε λοιπόν να μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση $g(x) = x\sqrt{1-x^2}$ στο διάστημα [0, 1]. Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο της g: $g'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1+x\sqrt{2})(1-x\sqrt{2})}{\sqrt{1-x^2}}$ στο διάστημα (0,1). Καθώς ο παρονομαστής έχει θετικό πρόσημο, το πρόσημό της είναι το πρόσημο του αριθμητή που είναι

θετικό στο διάστημα (0, $\sqrt{2}/2$) και αρνητικό στο διάστημα ($\sqrt{2}/2$, 1). Άρα η συνάρτηση έχει ολικό μέγιστο στο σημείο $\sqrt{2}/2$ την τιμή $g(2^{1/2}/2)=1/2$. Δηλαδή το ορθογώνιο έχει μέγιστο εμβαδόν όταν γίνεται τετράγωνο.

x	0		$\sqrt{2}/2$		1
πρόσημο $\left(1-x\sqrt{2}\right)$		+	0	–	
πρόσημο $\left(1+x\sqrt{2}\right)$		+		+	
Πρόσημο g'		+	0	–	

Άσκηση 5 (15 μονάδες**)**

α) (Μον. 6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$. Να δείξετε ότι η n-οστής τάξης παράγωγός της είναι $f^{(k)}(x)=\dfrac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}, k\in\mathbb{N}$.

β) (Μον. 6) Να υπολογίσετε το ανάπτυγμα Maclaurin της f καθώς και τις τιμές του x για τις οποίες υπάρχει απόλυτη σύγκλιση.

γ) (Μον. 3) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα, να υπολογιστεί το άθροισμα της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n-1}}$$

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι για $k = 1$ ισχύει, εφ' όσον είναι γνωστό ότι

$$\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' \overset{\left(\frac{1}{f}\right)'=-\frac{f'}{f^2}}{=} -\frac{\left[(1-x)^2\right]'}{\left[(1-x)^2\right]^2}=-\frac{2(1-x)(1-x)'}{\left[(1-x)^2\right]^2}=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $k = n$, δηλ.

$$f^{(n)}(x)=\frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}, n\in\mathbb{N}.$$

Δείχνουμε ότι ισχύει για $k = n+1$:

$$f^{(n+1)}(x)=\left[f^{(n)}(x)\right]'=\left[\frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}\right]'=(n+1)!\left[\frac{1}{(1-x)^{n+2}}\right]'=(n+1)!\frac{-[(1-x)^{n+2}]'}{(1-x)^{2(n+2)}}$$

$$=(n+1)!\frac{-(n+2)(1-x)^{n+1}(1-x)'}{(1-x)^{2n+4}}=\frac{(n+2)!}{(1-x)^{n+3}}.$$

β) Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $f(0)=1, f'(0)=2!, f''(0)=3!,\ldots, f^{(n)}(0)=(n+1)!$,

για κάθε $n\in\mathbb{N}$ οπότε $\dfrac{1}{(1-x)^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ και τελικά

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι

$$R=\left[\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!}}\right]^{-1}=\left[\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)!}{n!}}\right]^{-1}=\left[\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}\right]^{-1}=1^{-1}=1,$$

δηλ. συγκλίνει για κάθε $x\in(-1, 1)$. Το παραπάνω όριο το είδαμε και στην άσκηση 3β.

γ) Από το προηγούμενο ερώτημα και το γεγονός έχουμε

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}.$$

Για $x = 1/3$, έχουμε $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{9}{4}$

Όμως, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n-1}}=\frac{9}{4}$.

Για τον προγραμματισμό της μελέτης σας υπάρχει το Χρονοδιάγραμμα Μελέτης το οποίο περιέχεται στον Οδηγό Σπουδών της Θ.Ε. Ο ακόλουθος πίνακας δεν έχει σκοπό να υποκαταστήσει το Χρονοδιάγραμμα Μελέτης, αλλά να υποδείξει ορισμένα σημεία του διδακτικού υλικού τα οποία σχετίζονται αμέσως με τις ασκήσεις της 4^{ης} Γ.Ε.

Άσκηση	**Θεωρία**	**Συναφείς Ασκήσεις**	**Άλλες Ασκήσεις**
1	Η άσκηση αναφέρεται στην έννοια της παραγώγου και σε εφαρμογή των κανόνων παραγώγισης..Η αντίστοιχη θεωρία είναι: Ενότητα 5 του βιβλίου (Παράγωγοι) και ειδικότερα οι §§ 1,2,3. Σ.Ε.Υ.: Λογισμός. Παράγωγοι (Κεφ.6)	Εργασία 4,2010-11,Ασκ1(ι,ιι) Εργασία 4,2009-10,Ασκ1(ι,ιι) Εργασία 4,2008-09,Ασκ1(ι,ιι) Εργασία 4 ,2007-08 Ασκ.2. Εργασία 4 ,2006-07 Ασκ.2β Ασκ.4α. Εργασία 4, 2002-3, Άσκ.1	Σ.Ε.Υ. Ασκήσεις του αρχείου: Παράγωγοι (Κεφ.6) Εργασία 4,2007-08 Ασκ2 Ασκ. αυτοαξιολόγησης της ενότητας 5 του βιβλίου
2	Για το α ερώτημα εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την απόδειξη ανισώσεων . Στο ερώτημα β τίθεται το θέμα του προσεγγιστικού υπολογισμού ριζών μέσω επαναληπτικής μεθόδου. Η σχετική θεωρία είναι: Ενότητα 6 του βιβλίου (Βασικά Θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού) και ειδικότερα η § 6.1 και η § 6.2.	Παράδειγμα σελ.94, άσκηση αυτοαξιολόγησης 1 σελ.96 του βιβλίου. Εργασία 4, 2010-11,Ασκ1(ιιι) Εργασία 4, 2009-10,Ασκ1(ιιι) Εργασία 4, 2008-09,Ασκ1(ιιι) Εργασία 4 ,2005-06,Ασκ. 7 Εργασία 4 ,2002-03,Ασκ. 5 Εργασία 4 2004-5 Άσκ.3 Εργασία 4, 2006-07,Ασκ.7	Σ.Ε.Υ. Ασκήσεις του αρχείου: Βασικά Θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού (Κεφ.7) και ειδικότερα της § 7.1.4 Εργασία 4 ,2006-07 Ασκ.4β, Ασκ. 7 Εργασία 4, 2001-02,Ασκ1
3	Η άσκηση αναφέρεται σε εφαρμογή της παραγώγου στον υπολογισμό ορίων. Η αντίστοιχη θεωρία βρίσκεται στην § 6.3 του βιβλίου και στην § 7.8 του αρχείου «Βασικά Θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού» στο Σ.Ε.Υ.	Σ.Ε.Υ. Παραδείγματα 7.8.2 – 7.8.8. Εργασία4 2010 Ασκ2(i) Εργασία4 2009 Ασκ2(i) Εργασία4 2008 Ασκ2	Εργασία 4 2004 Ασκ6(γ)
4	Το α ερώτημα αφορά την μελέτη συνάρτησης (Διαστήματα μονοτονίας, τοπικά και ολικά ελάχιστα-μέγιστα, σημεία καμπής, κυρτότητα καμπύλης, ασύμπτωτες) Ενότητα 7 του βιβλίου (Ακρότατα). Στο β ερώτημα έχουμε μία εφαρμογή εύρεσης μεγίστου σε γεωμετρικό πρόβλημα.	Σ.Ε.Υ. Κεφ. 7.2, 7.3, 7.4(πρδ. 7.4.3), 7.5 (Πρδ. 7.5.1), 7.6 (Πρδ. 7.5.1, 7.5.2) Εργασία 4, 2010, Ασκ. 3 Εργασία 4, 2009, Ασκ. 3 Εργασία 4, 2008, Ασκ. 3 Εργασία 4, 2007, Ασκ. 3 Εργασία 4, 2006, Ασκ. 5 Εξετ. 2010-11(α), Άσκ. 4^{Α} Εξετ. 2009-10(α), Άσκ.4ii(a,b) Εργασία 4 2005-6 Άσκ. 5^{α} Εργασία 4, 2007, Ασκ. 4β	Εργασία 4, 2007, Ασκ.4 Εργασία 4, 2008, Ασκ.2γ Εργασία 4, 2006, Ασκ.6 Εξετ. 2010-11(β), Άσκ.4Α Εξετ. 2009-10(β), Άσκ.4α
5	Οι βασικές έννοιες για την πολυωνυμική προσέγγιση συναρτήσεων υπάρχουν στην Ενότητα 8 του βιβλίου μας και στο Σ.Ε.Υ. (σειρές Taylor).	Σ.Ε.Υ. Παραδείγματα 1, 3(α), Εργασία4 2010 Ασκ. 4, Εργασία4 2009 Ασκ. 4, Εργασία6 2008 Ασκ. 5(δ), Εργασία4 2008 Ασκ. 4, Εργασία5 2007 Ασκ. 1, Εργασία4 2005 Ασκ. 6, Εργασία6 2004 Ασκ. 9(α).	Εργασία5 2001 Ασκ. 1(α), Εργασία6 2001 Ασκ. 10, Εργασία5 2002 Ασκ. 1, Εργασία6 2002 Ασκ. 10, Εργασία4 2003 Ασκ. 9, Εργασία4 2003 Ασκ. 10, Εργασία6 2003 Ασκ. 10, Εργασία4 2004 Ασκ. 6(β)(γ).

Σημείωση: Οι παραπάνω παραπομπές αναφέρονται στο βιβλίο «Λογισμός μίας μεταβλητής», Τόμος Α' του Γεωργ. Δάσιου (αναφέρεται ως 'Βιβλίο' στον προηγούμενο πίνακα) και στο υλικό που υπάρχει αναρτημένο στην ιστοσελίδα http://edu.eap.gr/pli/pli12/ . Για παράδειγμα, η παραπομπή 'Εργασία1 2010 Ασκ5β' αναφέρεται στην Άσκηση 5β της Εργασίας 1 του ακαδημαϊκού έτους 2010-11. Όλες οι παραπομπές σε Ασκήσεις του Σ.Ε.Υ. αναφέρονται σε λυμένες ασκήσεις.