Έντυπο Υποβολής – Αξιολόγησης Γ.Ε.

Ο φοιτητής συμπληρώνει την ενότητα «Υποβολή Εργασίας» και αποστέλλει το έντυπο σε δύο μη συρραμμένα αντίγραφα (ή ηλεκτρονικά) στον Καθηγητή-Σύμβουλο. Ο Καθηγητής-Σύμβουλος συμπληρώνει την ενότητα «Αξιολόγηση Εργασίας» και στα δύο αντίγραφα και επιστρέφει το ένα στον φοιτητή μαζί με τα σχόλια επί της Γ.Ε., ενώ κρατά το άλλο για το αρχείο του μαζί με το γραπτό σημείωμα του Συντονιστή, εάν έχει δοθεί παράταση.

*Σε περίπτωση ηλεκτρονικής υποβολής του παρόντος εντύπου, το όνομα του ηλεκτρονικού αρχείου πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με λατινικούς χαρακτήρες και να ακολουθεί την κωδικοποίηση του παραδείγματος: Π.χ., το όνομα του αρχείου για τη 5η Γ.Ε. του φοιτητή ΙΩΑΝΝΟΥ στη ΠΛΗ12 πρέπει να γραφεί: «**ioannou_ge5_plh12.doc**».*

ΥΠΟΒΟΛΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ονοματεπώνυμο Διεύθυνση Τηλ/φωνο Ηλ/νική διεύθυνση φοιτητή	

Κωδικός Θ.Ε.	ΠΛΗ 12
Κωδικός Τμήματος	
Ακ. Έτος	2011-12
α/α Γ.Ε.	5

Ονοματεπώνυμο Καθηγητή - Συμβούλου	
Καταληκτική ημερομηνία παραλαβής σύμφωνα με το ακ. ημερολόγιο (*ημέρα Τρίτη*)	24/04/2012
Ημερομηνία αποστολής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
Επισυνάπτεται (*σε περίπτωση που έχει ζητηθεί*) η άδεια παράτασης από τον Συντονιστή;	ΟΧΙ

Υπεύθυνη Δήλωση Φοιτητή: *Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη Θεματική Ενότητα..*

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ημερομηνία παραλαβής Γ.Ε. από τον φοιτητή	
Ημερομηνία αποστολής σχολίων στον φοιτητή	
Βαθμολογία *(αριθμητικώς, ολογράφως)*	

Υπογραφή Φοιτητή **Υπογραφή Καθηγητή-Συμβούλου**

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 5η

Ημερομηνία Αποστολής στο Φοιτητή: 19 Μαρτίου 2012

Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 20 Απριλίου 2012.

Πριν από τη λύση κάθε άσκησης καλό είναι να μελετούνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις από τις παραπομπές στα συγγράμματα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της 5ης εργασίας αναφέρονται στις ενότητες:

Ενότητα 9 (Το ολοκλήρωμα)
Ενότητα 10 (Γενικευμένη Ολοκλήρωση)
Ενότητα 11 (Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων**)**
Ενότητα 12: 12.1 – 12.4 (Σειρές Fourier**)**

του συγγράμματος του ΕΑΠ «**Λογισμός Μιας Μεταβλητής**» του Γ. Δάσιου

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα συμβουλευθείτε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στη http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm ως εξής:

Συνοδευτικό **Ε**κπαιδευτικό **Υ**λικό :
Λογισμός Ολοκληρώματα 1, Ολοκληρώματα 2, Σειρές Fourier

Στόχοι:

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι :
α) η κατανόηση βασικών τεχνικών ολοκλήρωσης και η εφαρμογή τους σε αόριστα και ορισμένα ολοκληρώματα

β) ο υπολογισμός γενικευμένων ολοκληρωμάτων και των τριών ειδών

γ) η κατανόηση των εφαρμογών των ολοκληρωμάτων
δ) ο υπολογισμός σειρών Fourier.

Άσκηση 1. (20 μονάδες)
Να υπολογίσετε τα (αόριστα) ολοκληρώματα:

(α) $I_1=\int \frac{\boldsymbol{x}^2-6\boldsymbol{x}+8}{\boldsymbol{x}^2+6\boldsymbol{x}+8}\boldsymbol{dx}$ (β) $I_2=\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$

(γ) $I_3=\int\left(x^2-1\right)\cdot 3^x dx$ (δ) $I_4=\int \frac{x+1}{x^2+4x+5}dx$

(Υπόδειξη: Στο (β) θέστε $\sqrt[6]{x}=t$. Στο (γ) χρησιμοποιήστε τη γνωστή σχέση παραγώγισης $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$ και στη συνέχεια κάνετε παραγοντική ολοκλήρωση. Στο (δ) κάντε συμπλήρωση τετραγώνου στον παρονομαστή και κατάλληλη αντικατάσταση.)

Λύση

(α) Η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι ρητή συνάρτηση του x (κλάσμα πολυωνύμων). Επειδή ο αριθμητής δεν είναι μικρότερου βαθμού από τον παρονομαστή εκτελώντας την διαίρεση,

$$\begin{array}{r|l} x^2-6x+8 & x^2+6x+8 \\ \hline -x^2-6x-8 & 1 \\ \hline -12x & \end{array}$$

έχουμε διαδοχικά, μετά από παραγοντοποίηση του παρονομαστή

$$\frac{x^2-6x+8}{x^2+6x+8}=\frac{(x^2+6x+8)-12x}{x^2+6x+8}=1-\frac{12x}{x^2+6x+8}=1-12\frac{x}{(x+2)(x+4)}$$

Αναλύουμε, στη συνέχεια, το γνήσιο κλάσμα (καθώς ο αριθμητής έχει βαθμό μικρότερο του παρονομαστή) που προέκυψε σε απλά κλάσματα (το σύμβολο ταυτότητας -τριπλή παύλα - σημαίνει ισότητα για κάθε επιτρεπόμενη τιμή της μεταβλητής):

$$\frac{x}{(x+2)(x+4)}\equiv\frac{\mathrm{A}}{x+2}+\frac{\mathrm{B}}{x+4}\Leftrightarrow\frac{x}{(x+2)(x+4)}\equiv\frac{A(x+4)+B(x+2)}{(x+2)(x+4)}\Leftrightarrow x\equiv(A+B)x+(4A+2B)$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}A+B=1\\4A+2B=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}A=-1\\B=2\end{array}\right\}\text{ δηλαδή }\frac{x}{(x+2)(x+4)}\equiv\frac{-1}{x+2}+\frac{2}{x+4}.$$

Οπότε $\mathrm{I}_1=\int\frac{x^2-6x+8}{x^2+6x+8}dx=\int dx-12\left(\int\frac{-1}{x+2}dx+\int\frac{2}{x+4}dx\right)\boxed{=x+12\ln|x+2|-24\ln|x+4|+c,\quad c\in\mathbb{R}.}$

(β) Θέτουμε $\sqrt[6]{x}=t$, δηλαδή $x=t^6$ και $dx=6t^5dt$. Επομένως είναι

$$I_2=\int\frac{6t^5}{t^3+t^2}\,dt=6\cdot\int\frac{t^5}{t^2(t+1)}\,dt=6\cdot\int\frac{t^3}{(t+1)}\,dt$$

Επειδή στη ρητή προς ολοκλήρωση συνάρτηση ο βαθμός του αριθμητή δεν είναι μικρότερος του βαθμού του παρονομαστή εκτελούμε την διαίρεση των πολυωνύμων

$$\begin{array}{r|l} t^3 & t+1 \\ \hline -t^3-t^2 & t^2-t+1 \\ \hline -t^2 & \\ t^2+t & \\ \hline t & \\ -t-1 & \\ \hline -1 & \end{array}$$

από την οποία έχουμε $t^3=(t+1)\cdot\left(t^2-t+1\right)-1$ οπότε:

$$I_2=6\cdot\int\frac{(t+1)\cdot\left(t^2-t+1\right)-1}{(t+1)}\,dt=6\cdot\int\left[\frac{(t+1)\cdot\left(t^2-t+1\right)}{(t+1)}-\frac{1}{(t+1)}\right]dt=$$

$$= 6 \cdot \int \left[\left(t^2 - t + 1\right) - \frac{1}{(t+1)} \right] dt = 6 \cdot \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| \right) + c = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + c$$

και τέλος με αντίστροφη αντικατάσταση: $\boxed{I_2 = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + c}$.

(γ) Θα εφαρμόσουμε διαδοχικά παραγοντική ολοκλήρωση

$$I_3 = \int \left(x^2 - 1\right) \cdot 3^x dx = \int \left(x^2 - 1\right) \cdot \left(\frac{3^x}{\ln 3} \right)' dx$$

$$= \left(x^2 - 1\right) \cdot \left(\frac{3^x}{\ln 3} \right) - \int \left(x^2 - 1\right)' \cdot \left(\frac{3^x}{\ln 3} \right) dx$$

$$= \frac{1}{\ln 3} \left(x^2 - 1\right) \cdot 3^x - \frac{1}{\ln 3} \int 2x 3^x dx$$

$$= \frac{1}{\ln 3} \left(x^2 - 1\right) \cdot 3^x - \frac{2}{\ln 3} \int x \cdot \left(\frac{3^x}{\ln 3} \right)' dx$$

$$= \frac{1}{\ln 3} \left(x^2 - 1\right) \cdot 3^x - \frac{2}{\ln 3} \left[\frac{x \cdot 3^x}{\ln 3} - \int x' \left(\frac{3^x}{\ln 3} \right) dx \right]$$

$$= \frac{1}{\ln 3} \left(x^2 - 1\right) \cdot 3^x - \frac{2x \cdot 3^x}{(\ln 3)^2} + \frac{2}{(\ln 3)^2} \int 3^x dx$$

$$= \frac{1}{\ln 3} \left(x^2 - 1\right) \cdot 3^x - \frac{2x \cdot 3^x}{(\ln 3)^2} + \frac{2}{(\ln 3)^2} \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + c \quad \boxed{= \frac{1}{\ln 3} \left(x^2 - 1\right) \cdot 3^x - \frac{2x \cdot 3^x}{\ln^2 3} + \frac{2 \cdot 3^x}{\ln^3 3} + c}$$

(δ)

Πρόκειται για ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης με βαθμό παρονομαστή μεγαλύτερο από το βαθμό αριθμητή και παρονομαστή ο οποίος δεν παραγοντοποιείται στους πραγματικούς (αφού δεν έχει πραγματικές ρίζες) καθώς η διακρίνουσα είναι αρνητική, $\Delta = -4$). Για να προχωρήσουμε πρέπει να κάνουμε συμπλήρωση τετραγώνου στον παρονομαστή:

$$x^2 + 4x + 5 = x^2 + 2(2)x + 2^2 + 1 = (x+2)^2 + 1$$

οπότε $I_4 = \int \frac{x+1}{(x+2)^2 + 1} dx$.

Στην συνέχεια θέτουμε, $u = x + 2$, ισοδύναμα $x = u - 2$ οπότε $du = dx$, αντικαθιστούμε, ολοκληρώνουμε ως προς *u* (λαβαίνοντας υπόψη ότι $u^2 + 1 > 0$) και στο τέλος εκτελούμε την αντίστροφη αντικατάσταση:

$$I_4 = \int \frac{u - 2 + 1}{u^2 + 1} dx = \int \frac{u - 1}{u^2 + 1} du = \int \frac{u}{u^2 + 1} du - \int \frac{1}{u^2 + 1} du$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2 + 1} d\left(u^2 + 1\right) - \int \frac{1}{u^2 + 1} du == \frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) - \arctan(u) + C \boxed{= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4x + 5) - \arctan(x+2) + C}$$

.

Άσκηση 2. (20 μονάδες)

(α) Να βρεθεί αναδρομικός τύπος, ως προς *n*, για το ορισμένο ολοκλήρωμα $I_n = \int_1^e (\ln x)^n\, dx,\ n\in\mathbb{N},$ και στη συνέχεια να υπολογιστεί το I_3.

(β) Με χρήση του αναπτύγματος Taylor με κέντρο το 0 της συνάρτησης $f(x) = \cos\left(\sqrt{x}\right)$ να υπολογιστεί προσεγγιστικά το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \cos\left(\sqrt{x}\right) dx$. Συγκεκριμένα, δείξτε ότι $\int_0^1 \cos\left(\sqrt{x}\right) dx \cong 0.763542$.

Λύση

(α)

Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε για $n \geq 1$:

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n\, dx = \int_1^e x'(\ln x)^n\, dx = \Big[x(\ln x)^n\Big]_{x=1}^{x=e} - \int_1^e x\left((\ln x)^n\right)' dx$$

$$= (e-0) - \int_1^e xn(\ln x)^{n-1}(\ln x)'\, dx = e - \int_1^e xn(\ln x)^{n-1}\frac{1}{x}\, dx = e - n\int_1^e (\ln x)^{n-1}\, dx = e - nI_{n-1}$$

Αρα ο αναδρομικός τύπος είναι $I_n = e - nI_{n-1}$ και ισχύει και για *n*=1, με $I_0 = \int_1^e dx = e - 1$.

$I_1 = e - I_0 = e - (e-1) = 1$, $I_2 = e - 2I_1 = e - 2$, $\boxed{I_3 = e - 3I_2 = e - 3(e-2)}$

(β) Θεωρούμε το ανάπτυγμα Taylor με κέντρο το 0 της συνάρτησης $\cos(x)$ (δείτε σύγγραμμα του ΕΑΠ «**Λογισμός Μιας Μεταβλητής**» Γ. Δάσιου, σελ. 127-128).

$f(x) = \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$ που ισχύει για κάθε πραγματική τιμή του *x*. Αντικαθιστώντας όπου x το $\sqrt{x}$ έχουμε ότι

$$\cos\left(\sqrt{x}\right) = 1 - \frac{\sqrt{x}^2}{2!} + \frac{\sqrt{x}^4}{4!} - \frac{\sqrt{x}^6}{6!} + \cdots = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \cdots$$

Οπότε

$$\int_0^1 \cos\left(\sqrt{x}\right) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \cdots\right) dx = \left[x - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} - \frac{x^4}{4\cdot 6!} + \cdots\right]_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2\cdot 2!} + \frac{1}{3\cdot 4!} - \frac{1}{4\cdot 6!} + \cdots = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{72} - \frac{1}{2880} + \cdots =$$

$$= 1 - 0.25 + 0.013889 - 0.000374 + \cdots \cong 0.763542$$

Άσκηση 3. (20 μονάδες)

Να υπολογισθούν τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

(α) $I_1=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+4)\cdot(2x+1)}dx$ (β) $I_2=\int_0^{3}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ (γ) $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x+3}{3\cos^2 x}dx$

(Υπόδειξη: Στο (β) χρησιμοποιήστε τριγωνομετρική αντικατάσταση, στο (γ) θεωρήστε την παράγωγο του αριθμητή του προς ολοκλήρωση κλάσματος.)

Λύση

(α) Το I_1 είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα α΄ είδους και έχουμε ότι:

$$I_1=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+4)\cdot(2x+1)}dx=\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A}\frac{1}{(x+4)\cdot(2x+1)}dx$$

Θα υπολογίσουμε πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$I=\int\frac{1}{(x+4)\cdot(2x+1)}dx$$

Αναλύουμε την προς ολοκλήρωση συνάρτηση σε απλά κλάσματα

$$\frac{1}{(x+4)\cdot(2x+1)}=\frac{A}{(x+4)}+\frac{B}{(2x+1)}\Leftrightarrow 1\equiv A\cdot(2x+1)+B\cdot(x+4)\Leftrightarrow 1\equiv x\cdot(2A+B)+(A+4B)$$

Για το σύστημα που προκύπτει για τους συντελεστές έχουμε: $\begin{cases}2A+B=0\\ A+4B=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-\frac{1}{7}\\ B=\frac{2}{7}\end{cases}$

Άρα

$$\frac{1}{(x+4)\cdot(2x+1)}=-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{(x+4)}+\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{(2x+1)}$$

Οπότε

$$I=\int\left[-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{(x+4)}+\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{(2x+1)}\right]dx=-\frac{1}{7}\int\frac{1}{(x+4)}dx+\frac{2}{7}\int\frac{1}{(2x+1)}dx$$

$$I=-\frac{1}{7}\cdot\left[\ln|x+4|\right]+\frac{1}{7}\cdot\left[\ln|2x+1|\right]+c$$

Συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψη ότι $x+4>0, 2x+1>0$ όταν $x\geq 0$, το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι:

$$\int_0^{A}\frac{1}{(x+4)\cdot(2x+1)}dx=-\frac{1}{7}\cdot\left[\ln(x+4)\right]_0^A+\frac{1}{7}\cdot\left[\ln(2x+1)\right]_0^A$$

$$=-\frac{1}{7}\cdot\left[\ln(A+4)-\ln 4\right]+\frac{1}{7}\cdot\left[\ln(2A+1)-0\right]$$

$$=\frac{1}{7}\cdot\ln\frac{(2A+1)}{(A+4)}+\frac{1}{7}\cdot\ln 4$$

Τελικά

$$I_1=\lim_{A\to+\infty}\left[\frac{1}{7}\cdot\ln\frac{(2A+1)}{(A+4)}+\frac{1}{7}\cdot\ln 4\right]=\frac{1}{7}\cdot\lim_{A\to+\infty}\left[\ln\frac{(2A+1)}{(A+4)}\right]+\frac{1}{7}\cdot\ln 4=\frac{1}{7}\cdot\ln 2+\frac{1}{7}\cdot\ln 4=\frac{3}{7}\cdot\ln 2$$

αφού η $\ln x$ είναι συνεχής συνάρτηση και $\lim_{A\to+\infty}\frac{(2A+1)}{(A+4)}=2$.

(β) Το I_2 είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα β΄ είδους και έχουμε ότι:

$$I_2=\int_0^{3}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx=\lim_{u\to 3^-}\int_0^{u}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$$

Για το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$ με $|x|<3$, με τριγωνομετρική αντικατάσταση

$x = 3\sin\theta \Rightarrow dx = 3\cos\theta d\theta$ και $\theta = \arcsin\frac{x}{3}$, έχουμε:

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{9-9\sin^2\theta}}3\cos\theta d\theta = \int \frac{1}{\sqrt{9-9\sin^2\theta}}3\cos\theta d\theta =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cos\theta d\theta =$$

$$= \int \frac{1}{\cos\theta}\cos\theta d\theta = \int d\theta = \theta + c = \arcsin\frac{x}{3} + c$$

Οπότε το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_0^u \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx = \left[\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^u = \arcsin\left(\frac{u}{3}\right),$$

Στη συνέχεια θεωρώντας το αντίστοιχο όριο έχουμε:

$$I_2 = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\, dx = \lim_{u\to 3^-}\int_0^u \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{u\to 3^-}\arcsin\left(\frac{u}{3}\right) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

(γ) $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x + 3}{3\cos^2 x}dx = \lim_{A\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^A \frac{\tan x+3}{3\cos^2 x}dx$

Παρατηρούμε ότι για $x = \pi/2$ ο παρανομαστής μηδενίζεται και ταυτόχρονα η συνάρτηση $\tan x$ απειρίζεται.

Για να υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα θέτουμε $u = \tan x + 3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow du = \frac{1}{\cos^2 x}dx$

οπότε

$$\int \frac{\tan x+3}{3\cos^2 x}dx = \int \frac{u}{3}du = \frac{1}{6}u^2 + c = \frac{1}{6}(\tan x + 3)^2 + c$$

άρα

$$\int_0^A \frac{\tan x+3}{3\cos^2 x}dx = \left[\frac{1}{6}(\tan x+3)^2\right]_0^A = \frac{1}{6}(\tan A + 3)^2 - \frac{3}{2}$$

Και συνεπώς

$$I_3 = \lim_{A\to\frac{\pi}{2}^-}\left[\frac{1}{6}(\tan A+3)^2 - \frac{3}{2}\right] = +\infty$$

Άσκηση 4. (20 μονάδες)

(α) Για κάθε φυσικό αριθμό n, θεωρούμε την επιφάνεια κάτω από την γραφική παράσταση της $f(x)=1/x$, πάνω από τον άξονα των x και μεταξύ των ευθειών $x=n$ και $x=n+1$.

i) Να δείξετε ότι για το εμβαδόν της, E_n, ισχύει: $\frac{1}{n+1} \le E_n \le \frac{1}{n}$.

ii) Αφού υπολογίσετε το E_n, δείξτε ότι $\ln(n+1) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le \ln(n+1) + \frac{n}{n+1}$.

(**Υπόδειξη:** Για το i) συγκρίνετε το εμβαδόν E_n με τα εμβαδά κατάλληλων ορθογωνίων, περιγεγραμμένου και εγγεγραμμένου.)

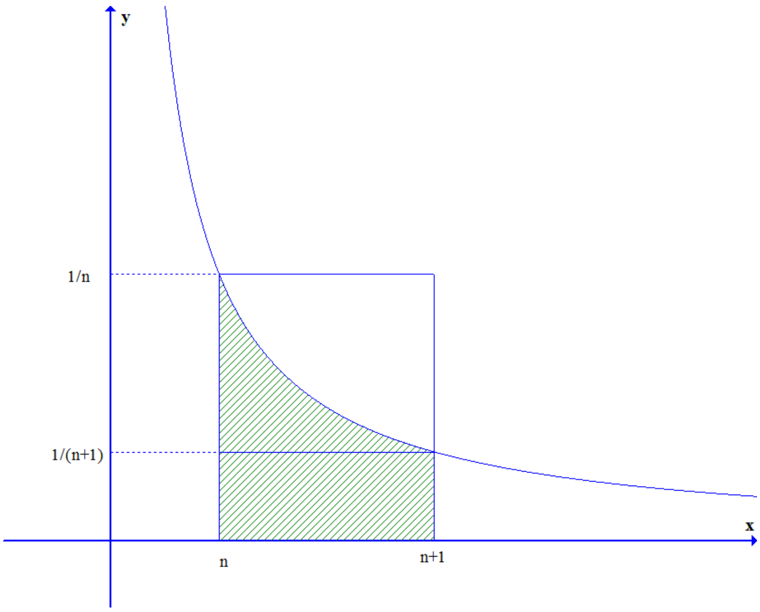
(β) Να βρεθεί το εμβαδόν της φραγμένης περιοχής που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $g(x)=x(4-x)$. Στη συνέχεια να προσδιορισθεί η τιμή του a ώστε η ευθεία $x=a$ να χωρίζει την περιοχή αυτή σε δύο ισεμβαδικά τμήματα.

Λύση

(α)

i) Το εμβαδόν του εγγεγραμμένου ορθογωνίου ισούται προς $\frac{1}{n+1}1=\frac{1}{n+1}$ και του περιγεγραμμένου $\frac{1}{n}1=\frac{1}{n}$. Επομένως

$$\frac{1}{n+1} \le E_n \le \frac{1}{n} \qquad (1).$$



ii) Υπολογίζουμε

$$E_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \ln(n+1) - \ln(n)$$

οπότε από την (1) έχουμε διαδοχικά τις ανισότητες:

$$\frac{1}{2} \le \ln(2) - \ln(1) \le 1$$

$$\frac{1}{3} \le \ln(3) - \ln(2) \le \frac{1}{2}$$

....

$$\frac{1}{n+1} \le \ln(n+1) - \ln(n) \le \frac{1}{n}$$

και θεωρώντας το άθροισμα κατά μέλη έχουμε (λόγω τηλεσκοπικής σειράς) την διπλή ανισότητα

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \le \ln(n+1) - \ln(1) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

από την οποία, αφ' ενός μεν (δεξιά ανισότητα) $\quad \ln(n+1) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad (2)$

αφ' ετέρου δε (αριστερή ανισότητα) $\quad \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \le \ln(n+1)$ η οποία ισοδύναμα γράφεται

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{n+1} \le \ln(n+1)$ και τελικά $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le \ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1} \qquad (3).$

Οι (2) και (3) δίνουν την ζητούμενη διπλή ανισότητα.

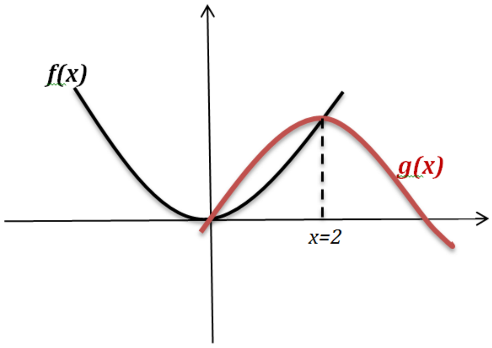
(β)

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που δίνονται τέμνονται στα σημεία που αντιστοιχούν στις τιμές x=0 και x=2 αφού: $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2 = x(4-x) \Leftrightarrow 2x^2-4x=0 \Leftrightarrow 2x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0\ ,\ x=2$.

Επίσης $f(x)<g(x) \Leftrightarrow x^2 < x(4-x) \Leftrightarrow 2x^2-4x<0 \Leftrightarrow 2x(x-2)<0 \Leftrightarrow x \epsilon [0,2]$

οπότε η γραφική παράσταση της $f(x)$ είναι κάτω από αυτήν της $g(x)$ στο διάστημα [0,2]

ενώ η $f(x)$ είναι μεγαλύτερη στα διαστήματα (-∞,0) και (2,+ ∞), όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα:



Από την μονοτονία και τα όρια των συναρτήσεων καθώς το x τείνει στο -∞ ή +∞, η φραγμένη περιοχή αντιστοιχεί για x στο διάστημα [0,2].

Το ζητούμενο εμβαδόν επομένως θα είναι:

$$E=\int_0^2 |g(x)-f(x)|dx = \int_0^2 (g(x)-f(x))dx = \int_0^2 (x(4-x)-x^2)dx = \int_0^2 (4x-2x^2)dx$$

$$= \left[2x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{8}{3}$$

Αν x=α είναι η ευθεία που χωρίζει την περιοχή σε δύο ισεμβαδικά τμήματα, θα πρέπει το πρώτο τμήμα να έχει εμβαδό ίσο με το μισό του συνολικού:

$$\int_0^\alpha (g(x)-f(x))dx = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \int_0^\alpha (x(4-x)-x^2)dx = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \int_0^\alpha (4x-2x^2)dx = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left[2x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_{x=0}^{x=\alpha} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 2\alpha^2-\frac{2}{3}\alpha^3 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \alpha^3-3\alpha^2+2=0 \Leftrightarrow (\alpha-1)(\alpha^2-2\alpha-2)=0 \Leftrightarrow \alpha=1$$

(αφού το α είναι πραγματικός αριθμός).

Άσκηση 5. (20 μονάδες)

Θεωρούμε την περιοδική συνάρτηση f με περίοδο T=4 , δηλαδή $f(x+T)=f(x)$ για κάθε πραγματικό αριθμό με τιμές στο διάστημα $-2\le x<2$ ως εξής: $f(x)=\begin{cases}0, & -2\le x<0\\ 2, & 0\le x<2\end{cases}$.

α) Να βρείτε την τριγωνομετρική σειρά Fourier της f. Πού συγκλίνει η σειρά Fourier της f, δηλαδή ποιά συνάρτηση παριστάνει η σειρά αυτή σε όλο το $\mathbb{R}$;

β) Μελετώντας την παραπάνω σειρά Fourier στο σημείο $x=1$ να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

Υπόδειξη: Η σειρά Fourier περιοδικής συνάρτησης f, με περίοδο T, δηλαδή $f(x+T)=f(x)$ για κάθε x , είναι η: $a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[\,a_n\cos(\frac{2\pi nx}{T})+b_n\sin(\frac{2\pi nx}{T})]$, όπου

$a_n=\frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T}f(x)\cos(\frac{2\pi nx}{T})dx$ $\quad b_n=\frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T}f(x)\sin(\frac{2\pi nx}{T})dx$ οι συντελεστές Fourier αυτής. Να σημειωθεί ότι τα παραπάνω ολοκληρώματα είναι ανεξάρτητα του x_0, λόγω περιοδικότητας της f.

Λύση:

Για τη συνάρτησή μας έχουμε περίοδο $T=4$, οπότε, καθώς γνωρίζουμε τον τύπο της f στο διάστημα [-2,2), επιλέγουμε x_0 = -2 και υπολογίζουμε τους συντελεστές

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T}f(x)dx=\frac{1}{\mathrm{T}}\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{4}\left[\int_{-2}^{0}0dx+\int_{0}^{2}2dx\right]=\frac{1}{4}2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=1$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T}f(x)\cos(\frac{2\pi nx}{T})dx=\frac{2}{4}\int_{-2}^{2}f(x)\cos(\frac{2\pi nx}{4})dx=\frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}0\cos(\frac{2\pi nx}{4})dx+\int_{0}^{2}2\cos(\frac{2\pi nx}{4})dx\right]=$$

$$=\frac{2}{2}\left[\int_0^2\cos(\frac{n\pi x}{2})dx\right]=\frac{2}{n\pi}\left[\int_0^2\left(\sin(\frac{n\pi x}{2})\right)'dx\right]=\frac{2}{n\pi}\left[\sin(\frac{n\pi x}{2})\right]_0^2=\frac{2}{n\pi}\left[\sin(n\pi)-\sin(0)\right]=0$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T}f(x)\sin(\frac{2\pi nx}{T})dx=\frac{2}{4}\int_{-2}^{2}f(x)\sin(\frac{2\pi nx}{4})dx=\frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}0\sin(\frac{2\pi nx}{4})dx+\int_{0}^{2}2\sin(\frac{2\pi nx}{4})dx\right]=$$

$$=\frac{2}{2}\left[\int_0^2\sin(\frac{n\pi x}{2})dx\right]=\frac{2}{n\pi}\left[\int_0^2\left(-\cos(\frac{n\pi x}{2})\right)'dx\right]=-\frac{2}{n\pi}\left[\cos(\frac{n\pi x}{2})\right]_0^2=-\frac{2}{n\pi}\left[\cos(n\pi)-\cos(0)\right]=$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{cases}0 & n=2k\\ \frac{4}{n\pi} & n=2k-1\end{cases}$$

Συνεπώς η σειρά Fourier είναι η

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[\,a_n\cos(\frac{2\pi nx}{T})+b_n\sin(\frac{2\pi nx}{T})]=1+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(\frac{(2k-1)\pi x}{2})$$

Τα σημεία ασυνέχειας της συνάρτησή μας είναι τα x=2 k , k ακέραιος. Εάν λάβουμε υπ' όψη τη σχέση (12.31) σελ. 194 του συγγράμματος του Ε.Α.Π. «**Λογισμός Μίας Μεταβλητής**» η σειρά αυτή, σε σημείο ασυνέχειας x της f, συγκλίνει προς την τιμή $\tilde{f}(x)=\frac{1}{2}\left(f(x-)+f(x+)\right)$.

Για το σημείο 0 (και λόγω περιοδικότητας στα σημεία $x=4k$, k ακέραιος) έχουμε

$$\tilde{f}(0)=\frac{1}{2}\left(f(0-)+f(0+)\right)=\frac{1}{2}\left(0+2\right)=1$$

Για το σημείο 2 (και λόγω περιοδικότητας στα σημεία $x=4k+2$, k ακέραιος) έχουμε

$$\tilde{f}(2)=\frac{1}{2}\left(f(2-)+f(2+)\right)=\frac{1}{2}\left(2+(0)\right)=1$$

Οπότε εάν θεωρήσουμε την περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T=4$ ορισμένη στο διάστημα $-2\le x<2$ ως εξής

$$g(x)=\begin{cases} 0, & -2<x<0 \\ 1, & x=0 \\ 2, & 0<x<2 \\ 1, & x=-2 \end{cases}$$

η σειρά που υπολογίσαμε συγκλίνει σε αυτή σε όλο το $\mathbb{R}$.

β) Για το β' ερώτημα, καθώς η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x=1$ και $f(1)=2$, έχουμε

$$f(1)=1+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right),$$

και αφού $\sin((2n-1)\pi/2)=\sin(n\pi-\pi/2)=\left(-1\right)^{n+1}$, για $n=1,2,3,\ldots$,

$2=1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{2n-1}$ που ισοδυναμεί με $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.

Για τον προγραμματισμό της μελέτης σας υπάρχει το Χρονοδιάγραμμα Μελέτης το οποίο περιέχεται στον Οδηγό Σπουδών της Θ.Ε. Ο ακόλουθος πίνακας δεν έχει σκοπό να υποκαταστήσει το Χρονοδιάγραμμα Μελέτης, αλλά να υποδείξει ορισμένα σημεία του διδακτικού υλικού τα οποία σχετίζονται αμέσως με τις ασκήσεις της 5ης Γ.Ε.

Άσκηση	**Θεωρία**	**Συναφείς Ασκήσεις**	**Άλλες Ασκήσεις**
1	Η άσκηση αναφέρεται στον υπολογισμό αόριστων ολοκληρωμάτων με διάφορες τεχνικές. Θα πρέπει να μελετήσετε τα εξής: Βιβλίο Ενότητα 9, §9,3 ΣΕΥ Λογισμός: Ολοκληρώματα 1 & 2	ΣΕΥ Λογισμός, Ολοκληρώματα 1, Παραδείγματα: 1 (σελ. 16), 3 (σελ. 18), Εργασία4 2008 Ασκ5 Εργασία4 2009 Ασκ5 Εργασία4 2010 Ασκ5	ΣΕΥ Λογισμός, Ολοκληρώματα 2, Παραδείγματα: 4.1 (σελ. 19) 4.3 (σελ. 20) 7.1 (σελ. 45) 11.5 (σελ. 86)
2	Η άσκηση αναφέρεται στον υπολογισμό ορισμένου ολοκληρώματος με χρήση αναγωγικών τύπων και σειρών Taylor. Θα πρέπει να μελετήσετε τα εξής: Βιβλίο Ενότητα 9, §9.1, 9.2 ΣΕΥ Λογισμός: Ολοκληρώματα 1 & 2, Σειρές Taylor	ΣΕΥ Λογισμός, Ολοκληρώματα 2, Παραδείγματα: 6.5 (σελ. 38) Εργασία5 2007 Ασκ4 Εργασία4 2008 Ασκ4 Εργασία4 2009 Ασκ4 Εργασία4 2010 Ασκ4 Εργασία6 2010 Ασκ3γ	ΣΕΥ Λογισμός, Ολοκληρώματα 1, Παραδείγματα: 2, 3 (σελ. 14) Ολοκληρώματα 2, Παραδείγματα: 6.6 (σελ. 39)
3	Η άσκηση αναφέρεται στον υπολογισμό γενικευμένων ολοκληρωμάτων. Βιβλίο Ενότητα 10, §10.1, 10.2	ΣΕΥ Λογισμός, Ολοκληρώματα 1, Παραδείγματα: 1 (σελ. 20), 2 (σελ. 21). Εργασία5 2010 Ασκ2 Εργασία5 2009 Ασκ2	ΣΕΥ Λογισμός, Ολοκληρώματα 2, Παραδείγματα: 7.5 (σελ. 49) 9.2 (σελ. 67)
4	Η άσκηση αυτή αναφέρεται στις εφαρμογές του ορισμένου ολοκληρώματος στον υπολογισμό εμβαδών. Θα πρέπει να μελετήσετε τα εξής: Βιβλίο Ενότητα 9, §9.1, 9.2 Ενότητα 11, §11.1 ΣΕΥ Λογισμός: Ολοκληρώματα 1 & 2	ΣΕΥ Λογισμός, Ολοκληρώματα 1, Παραδείγματα: σελ. 22 Εργασία5 2007 Ασκ2 Εργασία6 2010 Ασκ1	Εργασία6 2008 Ασκ1
5	Η άσκηση αυτή αναφέρεται στις Σειρές Fourier. Θα πρέπει να μελετήσετε τα εξής: Βιβλίο Ενότητα 12, § 12.1 – 12.4 ΣΕΥ Λογισμός: Σειρές Fourier	Εργασία6 2010 Ασκ2 Εργασία6 2009 Ασκ4β Εργασία6 2008 Ασκ2	ΣΕΥ Λογισμός Σειρές Fourier Παραδείγματα σελ. 2-5

Σημείωση: Οι παραπάνω παραπομπές αναφέρονται στο βιβλίο «Λογισμός μίας μεταβλητής», Τόμος Α' του Γεωργ. Δασίου (αναφέρεται ως 'Βιβλίο' στον προηγούμενο πίνακα) και στο υλικό που υπάρχει αναρτημένο στην ιστοσελίδα http://edu.eap.gr/pli/pli12/ . Για παράδειγμα, η παραπομπή 'Εργασία1 2010 Ασκ5β' αναφέρεται στην Άσκηση 5β της Εργασίας 1 του ακαδημαϊκού έτους 2010-11. Όλες οι παραπομπές σε Ασκήσεις του Σ.Ε.Υ. αναφέρονται σε λυμένες ασκήσεις.