ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ I (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΡΓΑΣΙΑ 6η

Ημερομηνία Αποστολής στο Φοιτητή: 23 Απριλίου 2012

Ημερομηνία παράδοσης της Εργασίας: 18 Μαΐου 2012.

Πριν από τη λύση κάθε άσκησης καλό είναι να μελετούνται τα παραδείγματα και οι λυμένες ασκήσεις από τις παραπομπές στα συγγράμματα και στο βοηθητικό υλικό.

Οι ασκήσεις της 6ης εργασίας αναφέρονται στα:

Ενότητα 2 (2.1 – 2.5**)** (Βασική Πιθανοθεωρία)
Ενότητα 3 (3.1, 3.3.1, 4.1, 4.4-4.6**)** (Τυχαίες μεταβλητές και χαρακτηριστικά των κατανομών τους – Χρήσιμα πρότυπα κατανομών)
του συγγράμματος του ΕΑΠ
«Βασικά Εργαλεία και Μέθοδοι για τον Έλεγχο της Ποιότητας» Τόμος Α' Πιθανότητες και Στατιστική I του κ. Ι. Κουτρουβέλη

Για την κατανόηση της ύλης αυτής θα συμβουλευθείτε επίσης το: **βοηθητικό υλικό** που υπάρχει στη http://edu.eap.gr/pli/pli12/students.htm ως εξής:

Συνοδευτικό **Ε**κπαιδευτικό **Υ**λικό :
Πιθανότητες Πιθανότητες Ι και Πιθανότητες ΙΙ

Στόχοι:

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι :
α) η κατανόηση της έννοιας της πιθανότητας καθώς και ο υπολογισμός της πιθανότητας ενδεχομένων βάσει προτάσεων από την αξιωματική θεωρία των πιθανοτήτων,
β) η κατανόηση της έννοιας της τυχαίας μεταβλητής και ο υπολογισμός βάσει κατάλληλων συναρτήσεων της συμπεριφοράς τυχαίων μεταβλητών που περιγράφουν τα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης.

Άσκηση 1. (20 μονάδες)

I) (10 μονάδες) Από τον έλεγχο που έγινε σε μια ημέρα σε ένα μεγάλο αριθμό οδηγών (δείγμα) βρέθηκε ότι το 70% των οδηγών δε φορούσε ζώνη ασφαλείας, το 40% των οδηγών δεν είχε πυροσβεστήρα στο αυτοκίνητο, ενώ στο 30% των οδηγών διαπιστώθηκαν και οι δύο παραβάσεις. Την επόμενη ημέρα ελέγχεται ένας οδηγός και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α={ο οδηγός δε φορά ζώνη ασφάλειας}, και

Β={ο οδηγός δεν έχει πυροσβεστήρα στο αυτοκίνητό του}.

Να διατυπωθούν τα ενδεχόμενα $A\cup B, A'\cap B', A\cap B', A\cup B', A'\cap B$, και να υπολογιστεί η πιθανότητα τους.

II) (10 μονάδες) Τα ποσοστά των φοιτητών του ΕΑΠ που πέρασαν τις Θεματικές Ενότητες Α, Β, Γ μετά την πρώτη εξεταστική είναι τα ακόλουθα: Α: 50%, Β: 40%, Γ: 30%, Α και Β: 35%, Α και Γ: 25%, Β και Γ: 20%, και τις τρείς Θεματικές Ενότητες: 15%. Να βρεθεί το ποσοστό των φοιτητών που πέρασαν τουλάχιστον ένα από τα τρία μαθήματα.

Λύση

I) Επειδή το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο, από το στατιστικό ορισμό πιθανότητας (βλέπε βιβλίο Ι. Κουτρουβέλη, σελ. 16) προκύπτει (προσεγγιστικά) ότι στον πληθυσμό των οδηγών οι πιθανότητες των ενδεχομένων A, B, $A\cap B$ είναι ίσες με

$$P(A)=0,7,\quad P(B)=0,4,\quad P(A\cap B)=0,3.$$

Τα ζητούμενα ενδεχόμενα είναι:

$A\cup B=$ {ο οδηγός δε φορά ζώνη ασφάλειας ή δεν έχει πυροσβεστήρα στο αυτοκίνητό του},

$A'\cap B'=$ {ο οδηγός φορά ζώνη ασφάλειας και έχει πυροσβεστήρα στο αυτοκίνητό του},

$A\cap B'=$ {ο οδηγός δε φορά ζώνη ασφάλειας και έχει πυροσβεστήρα στο αυτοκίνητό του},

$A\cup B'=$ {ο οδηγός δε φορά ζώνη ασφάλειας ή έχει πυροσβεστήρα στο αυτοκίνητό του}, και

$A'\cap B=$ {ο οδηγός φορά ζώνη ασφάλειας και δεν έχει πυροσβεστήρα στο αυτοκίνητό του}.

Από τον κανόνα της πρόσθεσης (θεώρημα 2.6, σελ. 25 βιβλίου Ι. Κουτρουβέλη) έχουμε:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,7+0,4-0,3=0,8.$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του de Morgan (άσκηση 1.4.5, ΣΕΥ, Πιθανότητες 1) έχουμε:

$$P(A'\cap B')=P\left[(A\cup B)'\right]=1-P(A\cup B)=1-0,8=0,2.$$

Επίσης παίρνουμε (σελ. 25 βιβλίου Ι. Κουτρουβέλη)

$$P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)=0,7-0,3=0,4.$$

Χρησιμοποιώντας πάλι τον κανόνα της πρόσθεσης έχουμε:

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=0,7+(1-0,4)-0,4=0,9.$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας το θεώρημα 2.5 από το βιβλίο του Ι. Κουτρουβέλη (σελ. 24) έχουμε:

$$P(A'\cap B)=P\left[(A\cup B')'\right]=1-P(A\cup B')=1-0,9=0,1.$$

II) Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης έχουμε:

$\mathrm{P(A)}=0,5$, $\mathrm{P(B)}=0,4$, $\mathrm{P}(\Gamma)=0,3$, $\mathrm{P(A\cap B)}=0,35$, $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\Gamma)=0,25$, $\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\Gamma)=0,2$ και $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\Gamma)=0,15$. Το ζητούμενο είναι να βρεθεί το ποσοστό $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\Gamma)$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της πρόσθεσης $\mathrm{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$ έχουμε:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\Gamma)=\mathrm{P}\left[\mathrm{A}\cup(\mathrm{B}\cup\Gamma)\right]=\mathrm{P(A)}+\mathrm{P}(\mathrm{B}\cup\Gamma)-\mathrm{P}\left[\mathrm{A}\cap(\mathrm{B}\cup\Gamma)\right]=$$

$$=\mathrm{P(A)}+\mathrm{P(B)}+\mathrm{P}(\Gamma)-\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\Gamma)-\mathrm{P}\left[(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\cup(\mathrm{A}\cap\Gamma)\right]=$$

$$=\mathrm{P(A)}+\mathrm{P(B)}+\mathrm{P}(\Gamma)-\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\Gamma)-\left[\mathrm{P(A\cap B)}+\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\Gamma)-\mathrm{P}\left((\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\cap(\mathrm{A}\cap\Gamma)\right)\right]=$$

$$=\mathrm{P(A)}+\mathrm{P(B)}+\mathrm{P}(\Gamma)-\mathrm{P}(\mathrm{B}\cap\Gamma)-\mathrm{P(A\cap B)}-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\Gamma)+\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\Gamma)=$$

$$=0,5+0,4+0,3-0,35-0,25-0,2+0,15=0,55.$$

Σημειώνουμε ότι στον παραπάνω υπολογισμό χρησιμοποιήθηκε και η επιμεριστική ιδιότητα $\mathrm{A}\cap(\mathrm{B}\cup\Gamma)=(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\cup(\mathrm{A}\cap\Gamma)$ (βλέπε επίσης παράδειγμα 1.1.13, ΣΕΥ, Πιθανότητες 1).

Επομένως το ζητούμενο ποσοστό είναι 55%.

Άσκηση 2. (20 μονάδες)

Ι) (10 μονάδες) Μια κάλπη περιέχει 4 διακεκριμένα άσπρα και 3 διακεκριμένα μαύρα σφαιρίδια. Επιλέγουμε τυχαία το ένα μετά το άλλο δύο σφαιρίδια από την κάλπη χωρίς επανάθεση.

(α) (2 μονάδες) Να δοθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος.

(β) Θεωρώντας τα ενδεχόμενα:

A_1={το πρώτο σφαιρίδιο είναι άσπρο}, και

A_2={το δεύτερο σφαιρίδιο είναι άσπρο},

να υπολογισθεί η πιθανότητα να είναι:

(β1) (2 μονάδες) το δεύτερο σφαιρίδιο άσπρο,

(β2) (3 μονάδες) το πρώτο σφαιρίδιο άσπρο, δοθέντος ότι το δεύτερο ήταν άσπρο, και

(β3) (3 μονάδες) και τα δύο σφαιρίδια άσπρα δοθέντος ότι τουλάχιστον ένα ήταν άσπρο.

ΙΙ) (10 μονάδες) Ρίχνουμε ένα νόμισμα τέσσερις φορές και θεωρούμε τα εξής ενδεχόμενα:

Α={στην πρώτη ρίψη έρχεται κεφαλή},

Β={έρχονται τουλάχιστον 3 φορές γράμματα}, και

Γ={στη δεύτερη ρίψη έρχεται κεφαλή και στην τέταρτη έρχεται γράμματα}.

(α) (3 μονάδες) Να βρείτε το δειγματοχώρο Ω του παραπάνω πειράματος. Πόσα στοιχεία έχει;

(β) (3 μονάδες) Να βρείτε ποια υποσύνολά του αντιστοιχούν στα ενδεχόμενα Α, Β, και Γ και στη συνέχεια να υπολογίσετε τις πιθανότητες P(A), P(B), P(Γ).

(γ) (4 μονάδες) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A \cap B)$, $P(A|\Gamma)$, και $P(B-\Gamma)$.

Λύση

Ι) (α) Ας υποθέσουμε ότι τα άσπρα σφαιρίδια είναι αριθμημένα από το 1 έως το 4 και τα μαύρα σφαιρίδια από το 5 έως το 7. Η πρώτη σφαίρα μπορεί να επιλεγεί με 7 τρόπους και η δεύτερη με 6, αφού η πρώτη σφαίρα δεν ξαναμπαίνει στην κάλπη. Επομένως έχουμε 6*7=42 δυνατά αποτελέσματα. Συγκεκριμένα ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος τύχης είναι:

$\Omega=\{(\sigma_1,\sigma_2):\sigma_1,\sigma_2\in\{1,2,...,7\},$ και $\sigma_1\neq\sigma_2\}$ = {(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (2,7), (3,1), (3,2), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (4,1), (4,2), (4,3), (4,5), (4,6), (4,7), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,6), (5,7), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,7), (7,1), (7,2), (7,3), (7,4), (7,5), (7,6)}. Πράγματι βλέπουμε ότι το πλήθος των στοιχείων του Ω είναι N(Ω)=42.

(β) Επίσης έχουμε:

A_1={(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (2,7), (3,1), (3,2), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (4,1), (4,2), (4,3), (4,5), (4,6), (4,7)}, $N(A_1)=24$.

A_2={(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (7,1), (7,2), (7,3), (7,4)}, $N(A_2)=24$.

(β1) Από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας (σελ. 14 βιβλίου Ι. Κουτρουβέλη) έχουμε:

$$P(A_2)=\frac{N(A_2)}{N(\Omega)}=\frac{24}{42}=\frac{4}{7}.$$

(β2) Έχουμε ότι $A_1\cap A_2$ = {(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3)}, $N(A_1\cap A_2)=12$. Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας (σελ. 14 βιβλίου Ι. Κουτρουβέλη) έχουμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$P(A_1|A_2)=\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_2)}=\frac{\frac{N(A_1\cap A_2)}{N(\Omega)}}{\frac{N(A_2)}{N(\Omega)}}=\frac{\frac{12}{42}}{\frac{24}{42}}=\frac{1}{2}.$$

(β3) Για τη ζητούμενη πιθανότητα, έχουμε

$$P(A_1\cap A_2|A_1\cup A_2)=\frac{P[(A_1\cap A_2)\cap(A_1\cup A_2)]}{P(A_1\cup A_2)}$$

Όμως $(A_1\cap A_2)\cap(A_1\cup A_2)$ = {το ενδεχόμενο οι 2 σφαίρες να είναι άσπρες και τουλάχιστον 1 σφαίρα να είναι άσπρη} = {το ενδεχόμενο οι 2 σφαίρες να είναι άσπρες} = $A_1\cap A_2$. Οπότε παίρνουμε

$$P\left(A_1\cap A_2|A_1\cup A_2\right)=\frac{P\left[\left(A_1\cap A_2\right)\cap\left(A_1\cup A_2\right)\right]}{P\left(A_1\cup A_2\right)}=$$

$$=\frac{P\left(A_1\cap A_2\right)}{P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)-P\left(A_1\cap A_2\right)}=\frac{\frac{12}{42}}{\frac{24}{42}+\frac{24}{42}-\frac{12}{42}}=\frac{1}{3}.$$

II) (α) Ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από όλες τις διατεταγμένες τετράδες (α β γ δ) όπου τα α, β, γ, δ ανήκουν στο σύνολο {Κ, Γ} (Κ = κεφαλή, Γ = γράμματα}, των δυνατών αποτελεσμάτων της ρίψης του νομίσματος. Οπότε το Ω θα έχει $2^4=16$ στοιχεία. Συγκεκριμένα έχουμε
Ω = {(ΚΚΚΚ), (ΚΚΚΓ), (ΚΚΓΚ), (ΚΚΓΓ), (ΚΓΚΚ), (ΚΓΚΓ), (ΚΓΓΚ), (ΚΓΓΓ), (ΓΚΚΚ), (ΓΚΚΓ), (ΓΓΚΚ), (ΓΓΚΓ), (ΓΚΓΚ), (ΓΚΓΓ), (ΓΓΓΚ), (ΓΓΓΓ)}.
Το πλήθος των στοιχείων του Ω είναι Ν(Ω)=16.
(β) Το γεγονός Α={στην πρώτη ρίψη έρχεται κεφαλή}, περιέχει τις ακόλουθες 8 τετράδες
Α= {(ΚΚΚΚ), (ΚΚΚΓ), (ΚΚΓΚ), (ΚΚΓΓ), (ΚΓΚΚ), (ΚΓΚΓ), (ΚΓΓΚ), (ΚΓΓΓ)}.
Οπότε το πλήθος των στοιχείων του Α είναι Ν(Α)=8.
Το γεγονός Β={έρχονται τουλάχιστον 3 φορές γράμματα}, περιέχει τις ακόλουθες 5 τετράδες
Β = {(ΚΓΓΓ), (ΓΓΚΓ), (ΓΚΓΓ), (ΓΓΓΚ), (ΓΓΓΓ)}.
Οπότε το πλήθος των στοιχείων του Β είναι Ν(Β)=5.
Τέλος το γεγονός Γ={στη δεύτερη ρίψη έρχεται κεφαλή και στην τέταρτη έρχεται γράμματα} περιέχει 4 τετράδες
Γ = {(ΚΚΚΓ), (ΚΚΓΓ), (ΓΚΚΓ), (ΓΚΓΓ)}.
Οπότε το πλήθος των στοιχείων του Γ είναι Ν(Γ)=4.
Επομένως οι πιθανότητες των ενδεχομένων είναι

$\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right)=\frac{\mathrm{N(A)}}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}\left(\mathrm{B}\right)=\frac{\mathrm{N}(B)}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{5}{16}$, και $\mathrm{P}\left(\Gamma\right)=\frac{\mathrm{N}(\Gamma)}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

(γ) Από το (β) έχουμε ότι $\mathrm{A}\bigcap\mathrm{B}$={(ΚΓΓΓ)}, $\mathrm{A}\bigcap\Gamma$={(ΚΚΚΓ), (ΚΚΓΓ)} και Β – Γ= {(ΚΓΓΓ), (ΓΓΚΓ), (ΓΓΓΚ), (ΓΓΓΓ)}, οπότε έχουμε ότι

$$\mathrm{P(A\bigcap B)}=\frac{\mathrm{N(A\bigcap B)}}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{1}{16}\ ,\ \mathrm{P(A}\,|\,\Gamma)=\frac{\mathrm{P(A\bigcap}\Gamma)}{\mathrm{P}(\Gamma)}=\frac{\frac{\mathrm{N(A\bigcap}\Gamma)}{\mathrm{N}(\Omega)}}{\frac{\mathrm{N}(\Gamma)}{\mathrm{N}(\Omega)}}=\frac{\frac{2}{16}}{\frac{4}{16}}=\frac{1}{2}\ ,$$

και τέλος $\mathrm{P(B}-\Gamma)=\frac{\mathrm{N(B}-\Gamma)}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}.$

Άσκηση 3. (20 μονάδες)

I) (10 μονάδες) Σε μία έκθεση ζωγραφικής υπάρχουν 12 πίνακες από τους οποίους 10 είναι αυθεντικοί και 2 είναι αντίγραφα. Ένας επισκέπτης επιλέγει στην τύχη έναν πίνακα και πριν τον αγοράσει ρωτά τη γνώμη ενός ειδικού για την αυθεντικότητα του πίνακα. Ο ειδικός μπορεί να εκφέρει σωστή γνώμη τόσο για ένα αυθεντικό πίνακα όσο και για ένα αντίγραφο κατά μέσο όρο 9 στις 10 φορές.

(α) (5 μονάδες) Αν ο ειδικός αποφανθεί ότι ο πίνακας είναι αυθεντικός ποια είναι η πιθανότητα να είναι πράγματι αυθεντικός;

(β) (5 μονάδες) Εάν ο ειδικός αποφανθεί ότι ο πίνακας είναι αντίγραφο και ο επισκέπτης τον επιστρέψει και αγοράσει τυχαία έναν από τους υπόλοιπους πίνακες ποια είναι πιθανότητα ο πίνακας που αγόρασε να είναι αυθεντικός;

<u>Υπόδειξη:</u> Στο ερώτημα (α) θεωρήστε τα ενδεχόμενα Α={ο πίνακας είναι αυθεντικός}, Β={ο ειδικός θεωρεί τον πίνακα αυθεντικό} και στο ερώτημα (β) τα ενδεχόμενα Α1={ο δεύτερος πίνακας που επιλέγει ο επισκέπτης είναι αυθεντικός}, Η1={ο ειδικός θεωρεί σωστά ότι ο πρώτος πίνακας είναι αντίγραφο}, Η2={ο ειδικός θεωρεί λανθασμένα ότι ο πρώτος πίνακας είναι αντίγραφο}.

II) (10 μονάδες) Ένα κατάστημα ηλεκτρονικών ειδών προμηθεύεται φορητές μνήμες από 3 εργοστάσια. Από το εργοστάσιο Α προμηθεύεται το 30% , από το εργοστάσιο Β το 20% και από το εργοστάσιο Γ το 50% των μνημών. Η πιθανότητα μια μνήμη να είναι ελαττωματική είναι 3%,1% και 4% από το εργοστάσια Α, Β και Γ αντίστοιχα. Αγοράζει κάποιος μια φορητή μνήμη από το κατάστημα.

(α) (5 μονάδες) Ποια η πιθανότητα να είναι ελαττωματική η μνήμη;

(β) (5 μονάδες) Αν η μνήμη είναι ελαττωματική ποιά η πιθανότητα να έχει παραχθεί από το εργοστάσιο Γ;

Λύση

I) (α) Θεωρώντας τα ενδεχόμενα:

Α={ο πίνακας είναι αυθεντικός}, και

Β={ο ειδικός θεωρεί τον πίνακα αυθεντικό},

ψάχνουμε την πιθανότητα $P(A/B)$.

Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε: $P(A)=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$,οπότε και $P(A')=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

$P(B/A)=\frac{9}{10}=P(B'/A')$ οπότε $P(B'/A)=\frac{1}{10}=P(B/A')$.

Ο κανόνας του Bayes (θεώρημα 2.14, σελ. 43 βιβλίου Ι. Κουτρουβέλη) δίνει

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B/A)}{P(A)P(B/A)+P(A')P(B/A')}=\frac{\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{10}}{\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{10}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{10}}=\frac{45}{46}.$$

(β) Έστω το ενδεχόμενο

Α1={ο δεύτερος πίνακας που επιλέγει ο επισκέπτης είναι αυθεντικός}. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο σε συνδυασμό με ένα από τα δυο ξένα μεταξύ τους ενδεχόμενα:

Η1={ο ειδικός θεωρεί σωστά ότι ο πρώτος πίνακας είναι αντίγραφο}, και

Η2={ο ειδικός θεωρεί λανθασμένα ότι ο πρώτος πίνακας είναι αντίγραφο}.

Ψάχνουμε την πιθανότητα $P(A1)$. Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε: $P(H1)=\frac{9}{10}$,

$P(A1/H1)=\frac{10}{11}$,. $P(H2)=\frac{1}{10}$, $P(A1/H2)=\frac{9}{11}$.

Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας (θεώρημα 2.13, σελ. 41 βιβλίου Ι. Κουτρουβέλη) έχουμε:

$$P(A1)=P(H1)\cdot P(A1/H1)+P(H2)\cdot P(A1/H2)=\frac{9}{10}\cdot\frac{10}{11}+\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{11}=\frac{99}{110}.$$

II) (α) Θεωρούμε τα ακόλουθα ενδεχόμενα:

Α={η φορητή μνήμη έχει παραχθεί από το εργοστάσιο Α},

Β={η φορητή μνήμη έχει παραχθεί από το εργοστάσιο Β},

Γ={η φορητή μνήμη έχει παραχθεί από το εργοστάσιο Γ}, και

Ε={η μνήμη να είναι ελαττωματική}.

Τότε γνωρίζουμε τα εξής:

$$P(E/A)=0,03,\quad P(E/B)=0,01,\quad P(E/\Gamma)=0,04,$$
$$P(A)=0,30,\qquad P(B)=0,20,\qquad P(\Gamma)=0,50.$$

Έχουμε ότι τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ είναι ξένα ανά δύο και ότι από αυτά προέρχεται όλη η παραγωγή. Εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας παίρνουμε:

$$P(E)=P(E/A)P(A)+P(E/B)P(B)+P(E/\Gamma)P(\Gamma)=$$
$$=0,03\cdot 0,30+0,01\cdot 0,20+0,04\cdot 0,50=0,009+0,002+0,020=0,031.$$

Άρα η πιθανότητα να αγοράσουμε μια ελαττωματική μνήμη είναι 3,1%.

(β) Γνωρίζουμε ότι μια μνήμη είναι ελαττωματική η πιθανότητα να έχει παραχθεί από το εργοστάσιο Γ είναι $P(\Gamma/E)$

$$P(\Gamma/E)=\frac{P(E\bigcap\Gamma)}{P(E)}=\frac{P(E/\Gamma)P(\Gamma)}{P(E)}=\frac{0,02}{0,031}=0,645.$$

Δηλαδή η πιθανότητα μια ελαττωματική μνήμη να έχει παραχθεί από το εργοστάσιο Γ είναι 64,5%.

Άσκηση 4. (20 μονάδες)
Η τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ be^{-bx}, & x\geq a\end{cases},$$

όπου a,b πραγματικοί αριθμοί, και μέση τιμή ίση με 3.

(α) (5 μονάδες) Να προσδιορισθούν τα a,b.
(β) (4 μονάδες) Να βρεθεί η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής X.
(γ) (3 μονάδες) Να βρεθεί η μέση τιμή και η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής $Y=6X+100$.
(δ) (4 μονάδες) Να βρεθεί η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να είναι μεγαλύτερη από 9.
(ε) (4 μονάδες) Να βρεθεί η τιμή k κάτω από την οποία βρίσκεται το 50% των τιμών της X.

Λύση

(α) Για να είναι η $f(x)$ συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας πρέπει $f(x)\geq 0$ και

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1.$$

Από τον τύπο της συνάρτησης για τον κλάδο όπου $x\geq a$ έχουμε $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow be^{-bx}\geq 0 \Leftrightarrow b\geq 0.$

Αν όμως $b=0$ έχουμε $f(x)=0$ οπότε και $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=0.$ Επομένως θα πρέπει $b>0$.

Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int f(x)dx=\int be^{-bx}dx=-e^{-bx}+c.$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a}0dx+\int_{a}^{+\infty}be^{-bx}dx=\lim_{A\to+\infty}\int_{a}^{A}be^{-bx}dx=\lim_{A\to+\infty}\left[-e^{-bx}\right]_a^A=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(-e^{-bA}+e^{-ba}\right)=e^{-ba}.$$

Συνεπώς πρέπει $e^{-ba}=1\Rightarrow -ba=\ln 1\Rightarrow ab=0\overset{(b>0)}{\Rightarrow} a=0$.

Από τον ορισμό της μέσης τιμής μια τυχαίας μεταβλητής (σελ. 78, βιβλίου Ι. Κουτρουβέλη) έχουμε $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x0dx+\int_{0}^{+\infty}xbe^{-bx}dx=\int_{0}^{+\infty}xbe^{-bx}dx.$

Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση (σχέση (9.35), σελ. 149, βιβλίου Γ. Δάσιου):

$$\int xf(x)dx=\int xbe^{-bx}dx=\int x\left(-e^{-bx}\right)'dx=x\left(-e^{-bx}\right)-\int x'\left(-e^{-bx}\right)dx=$$

$$=-xe^{-bx}+\int e^{-bx}dx=-xe^{-bx}-\frac{1}{b}e^{-bx}+c,$$

Τότε

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}xbe^{-bx}dx=\lim_{A\to+\infty}\int_{0}^{A}xbe^{-bx}dx=\lim_{A\to+\infty}\left[-xe^{-bx}-\frac{1}{b}e^{-bx}\right]_0^A=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(-Ae^{-bA}-\frac{1}{b}e^{-bA}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{b}.$$

Όπου το όριο το $\lim_{A\to+\infty}(-Ae^{-bA})$ υπολογίζεται με κανόνα L' Hospital.

$$\lim_{A\to+\infty}(-Ae^{-bA})=-\lim_{A\to+\infty}(Ae^{-bA})=-\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{A}{e^{bA}}\right)\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}-\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{A'}{\left(e^{bA}\right)'}\right)=-\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{be^{bA}}\right)=0$$

Έχουμε $E(X)=\frac{1}{b}=3$ από όπου παίρνουμε $b=\frac{1}{3}$.

(β) Για τη διακύμανση της X έχουμε $Var(X)=E\left(X^2\right)-\left(E\left(X\right)\right)^2$ (σχέση (3.29), σελ. 82, βιβλίου Ι. Κουτρουβέλη). Για τον υπολογισμό της ποσότητας $E(X^2)$ έχουμε:

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x^2 0dx+\int_{0}^{+\infty} x^2\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}dx=\lim_{A\to+\infty}\int_{0}^{A} x^2\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}dx.$$

Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int x^2\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}dx=\int x^2\left(-e^{-\frac{x}{3}}\right)'dx=x^2\left(-e^{-\frac{x}{3}}\right)-\int\left(x^2\right)'\left(-e^{-\frac{x}{3}}\right)dx=$$

$$=-x^2e^{-\frac{x}{3}}+\int 2xe^{-\frac{x}{3}}dx=-x^2e^{-\frac{x}{3}}-\int 6x\left(e^{-\frac{x}{3}}\right)'dx=$$

$$=-x^2e^{-\frac{x}{3}}-6xe^{-\frac{x}{3}}+6\int e^{-\frac{x}{3}}dx=-x^2e^{-\frac{x}{3}}-6xe^{-\frac{x}{3}}-18e^{-\frac{x}{3}}+c.$$

Οπότε τελικά παίρνουμε

$$E(X^2)=\lim_{A\to+\infty}\left[-x^2e^{-\frac{x}{3}}-6xe^{-\frac{x}{3}}-18e^{-\frac{x}{3}}\right]_0^A=\lim_{A\to+\infty}\left(-A^2e^{-\frac{A}{3}}-6Ae^{-\frac{A}{3}}-18e^{-\frac{A}{3}}\right)+18=18.$$

Όπου το $\lim\limits_{A\to+\infty}(-Ae^{-bA})=0$ υπολογίζεται όμοια με τα όσα υπολογίσαμε παραπάνω όπου $b=\dfrac{1}{3}$ και

$$\lim_{A\to+\infty}(A^2e^{-bA})=\lim_{A\to+\infty}(A^2e^{-bA})=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{A^2}{e^{bA}}\right)\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{\left(A^2\right)'}{\left(e^{bA}\right)'}\right)=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{2A}{be^{bA}}\right)\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{(2A)'}{\left(be^{bA}\right)'}\right)=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{2}{b^2e^{bA}}\right)=0$$

Συνεπώς έχουμε

$$Var(X)=E\left(X^2\right)-\left(E\left(X\right)\right)^2=18-3^2=9.$$

(γ) Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (3.24) και (3.34) του βιβλίου του Ι. Κουτρουβέλη έχουμε για την μέση τιμή και την διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής $Y=6X+100$

$$E(Y)=E(6X+100)=6E(X)+100=118,$$

$$Var(Y)=Var(6X+100)=6^2Var(X)=324.$$

(δ) Για να βρούμε την πιθανότητα $P(X>8)$ εργαζόμαστε ως εξής

$$P(X>9)=1-P(X<9)=1-\int_0^9\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}dx=1+\left[e^{-\frac{x}{3}}\right]_0^9=1+\left(e^{-3}-1\right)=e^{-3}=0,0498.$$

(ε) Έστω k η τιμή κάτω από την οποία βρίσκεται το 50% των τιμών X δηλαδή $P(X<k)=0,5$. Επομένως έχουμε:

$$P(X<k)=0,5\Leftrightarrow\int_0^k\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}dx=0,5\Leftrightarrow\left[-e^{-\frac{x}{3}}\right]_0^k=0,5\Leftrightarrow -e^{-\frac{k}{3}}+1=0,5\Leftrightarrow e^{-\frac{k}{3}}=0,5\Leftrightarrow$$

$$-\frac{k}{3}=\ln(0,5)\Leftrightarrow k=-3\ln(0,5)\Leftrightarrow k=2,0794.$$

Άσκηση 5. (20 μονάδες)
Το βάρος του περιεχομένου μιας κονσέρβας τόνου ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 250 γρ. και τυπική απόκλιση σ. Είναι γνωστό ότι η πιθανότητα το βάρος του περιεχομένου μιας κονσέρβας να είναι λιγότερο από 240 γρ. είναι ίση με 15,87%.
(α) (4 μονάδες) Να βρεθεί η τυπική απόκλιση σ.
(β) (4 μονάδες) Να βρεθεί η πιθανότητα το βάρος μιας κονσέρβας που επιλέγεται τυχαία να είναι μεταξύ 245 γρ. και 255 γρ.
(γ) (4 μονάδες) Κάτω από ποια τιμή βρίσκεται το βάρος του περιεχομένου του 90% των κονσερβών;
(δ) (4 μονάδες) Να βρεθεί η πιθανότητα μια κονσέρβα που επιλέγεται τυχαία να περιέχει παραπάνω από 265 γρ. τόνου.
(ε) (4 μονάδες) Να βρεθεί η πιθανότητα σε 10 κονσέρβες που επιλέγονται τυχαία τουλάχιστον οι 3 να περιέχουν ποσότητα μεγαλύτερη από 265 γρ.

Λύση

Η τυποποιημένη τυχαία μεταβλητή $Z = \dfrac{X-250}{\sigma}$ ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$ (θεώρημα 4.2, σελ. 121 βιβλίου Ι. Κουτρουβέλη): $Z = \dfrac{X-250}{\sigma} \sim N(0,1)$.

(α) Γνωρίζουμε ότι $P(X < 240) = 0{,}1587.$ Οπότε για να υπολογίσουμε το σ θέτουμε $\mathrm{X} = \mathrm{Z}\sigma + 250$ και έχουμε: $P(\sigma Z + 250 < 240) = 0.1587 \Leftrightarrow P\left(Z < -\dfrac{10}{\sigma}\right) = 0{,}1587.$

Η πιθανότητα αυτή αντιστοιχεί σε $\Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 0{,}1587$ (με χρήση των στοιχείων του πίνακα Π.1. στη σελ. 178 του βιβλίου του Ι. Κουτρουβέλη). Συνεπώς έχουμε $Z = -1 \Rightarrow \dfrac{-10}{\sigma} = -1 \Rightarrow \sigma = 10.$

(β) Ζητάμε την πιθανότητα $P(245 < X < 255)$. Θέτοντας $\mathrm{X} = 10\mathrm{Z} + 250$ παίρνουμε

$$P(245 < X < 255) = P(245 < 10Z + 250 < 255) = P(-5 < 10Z < 5) = P(-0{,}5 < Z < 0{,}5) =$$
$$= \Phi(0{,}5) - \Phi(-0{,}5) = \Phi(0{,}5) - \big(1 - \Phi(0{,}5)\big) = 2\Phi(0{,}5) - 1 = 0{,}3830.$$

(γ) Θέλουμε να βρούμε την τιμή Κ για την οποία ισχύει ότι $P(X < \mathrm{K}) = 0{,}9$ ή ισοδύναμα $P(10Z + 250 < \mathrm{K}) = 0{,}9 \Rightarrow P(Z < \dfrac{\mathrm{K}-250}{10}) = 0{,}9$. Επειδή Φ(1,28) = 0,9 έχουμε ότι $\dfrac{\mathrm{K}-250}{10}$ = 1,28 και επομένως Κ = 262,8 γρ.

(δ) Για τη ζητούμενη πιθανότητα έχουμε:

$$P(X \geq 265) = P(10Z + 250 \geq 265) = P(10Z \geq 15) = P(Z \geq 1{,}5) =$$
$$= 1 - P(Z \leq 1{,}5) = 1 - \Phi(1{,}5) = 0{,}0668.$$

(ε) Αν θεωρήσουμε επιτυχία το να περιέχει η κονσέρβα περισσότερο από 265 γρ. τότε η πιθανότητα της επιτυχίας είναι 6,68%. Αν Y είναι ο αριθμός των επιτυχιών τότε η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την διωνυμική κατανομή Bernoulli με 10 δοκιμές. Δηλαδή

$$P(Y = k) = \binom{10}{k} p^k (1-p)^{10-k} = \binom{10}{k} 0{,}0668^k (1 - 0{,}0668)^{10-k}.$$

Ζητάμε την πιθανότητα να έχουμε τουλάχιστον 3 επιτυχίες σε 10 δοκιμές. Δηλαδή την πιθανότητα

$$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y < 3) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) - P(Y = 2) =$$
$$1 - \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10} - \binom{10}{1} p^1 (1-p)^9 - \binom{10}{2} p^2 (1-p)^8 =$$
$$= 1 - 0{,}5009 - 0{,}3585 - 0{,}1155 = 0{,}0251.$$

Για τον προγραμματισμό της μελέτης σας υπάρχει το Χρονοδιάγραμμα Μελέτης που περιέχεται στον Οδηγό Σπουδών της ΘΕ. Ο ακόλουθος πίνακας δεν έχει σκοπό να υποκαταστήσει το Χρονοδιάγραμμα Μελέτης αλλά να υποδείξει ορισμένα σημεία του διδακτικού υλικού που σχετίζονται άμεσα με τις ασκήσεις της Εργασίας 6.

Άσκ.	**Θεωρία**	**Συναφείς Ασκήσεις**	**Άλλες Ασκήσεις**
1	Η άσκηση 1 αναφέρεται στον υπολογισμό πιθανοτήτων. Η αντίστοιχη θεωρία είναι: Κεφάλαιο 2.1, 2.2, και 2.3 του βιβλίου, (δες επίσης ΣΕΥ, Κεφ. 1.1 από Πιθανότητες Ι).	Εργασία 6η 2006-07,Ασκ 8 Α) Εργασία 5, 2009-10,Ασκ 3γ) <u>Συμπληρωματικές Σημειώσεις στις Πιθανότητες</u> Παράδειγμα σελίδα 7, Άσκηση 1, Άσκηση 2 και Άσκηση 3.	-Σ.Ε.Υ. Ασκήσεις 1.4 και ειδικότερα 1.4.3 , 1.4.5, 1.4.6
2	Η άσκηση 2 αναφέρεται στην εύρεση του δειγματοχώρου και τον υπολογισμό πιθανοτήτων – δεσμευμένων πιθανοτήτων. Η αντίστοιχη θεωρία είναι: Κεφάλαιο 2.2, 2.3, 2.4 και 2.5 του βιβλίου, (δες επίσης ΣΕΥ, Κεφ. 1.1 και 1.3 από Πιθανότητες Ι).	Ασκ. αυτοαξιολόγησης 2.3 σελ.22 (βιβλίο Πιθανότητες και Στατιστική) Εργασία 5, 2008-09,Ασκ 3 Εργασία 5, 2009-10,Ασκ 3 Εργασία 5, 2010-11,Ασκ 3 <u>Συμπληρωματικές Σημειώσεις στις Πιθανότητες</u> Παράδειγμα σελίδα 13.	-Σ.Ε.Υ. Ασκήσεις 1.4 και ειδικότερα 1.4.1 , 1.4.2, 1.4.6.
3	Η άσκηση αυτή αναφέρεται στη δεσμευμένη πιθανότητα, το θεώρημα ολικής πιθανότητας και το θεώρημα Bayes. Θα πρέπει να μελετήσετε: Βιβλίο 2.5 Δεσμευμένη πιθανότητα ΣΕΥ Πιθανότητες Ι 1.3 Δεσμευμένη Πιθανότητα	Βιβλίο Παραδείγματα 2.18, και 2.19, Άσκηση 2.16 σελ. 42 - 44. ΣΕΥ Πιθανότητες Ι, Άκσηση 1.4.13 Εργασία 5 2008 Άσκηση 4 Εργασία 5 2010 Άσκηση 4	Εργασία 5 2009 Άσκηση 4 Εργασία 6 2010 Άσκηση 6α Εργασία 6 2008 Άσκηση 6α
4	Η άσκηση αυτή αφορά τις κατανομές, των τυχαίων μεταβλητών, την μέση τιμή και την διακύμανση τους. Θα πρέπει να μελετήσετε: Βιβλίο Κεφ. 3.1 Τυχαίες ματαβλητές και μονοδιάστατες κατανομές, Κεφ. 3.3 Περιγραφικά μέτρα κατανομών ΣΕΥ Πιθανότητες ΙΙ 2.2. Διακριτές και συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. 2.3 Αριθμητικά χαρακτηριστικά μιας τυχαίας μεταβλητής.	Βιβλίο Παράδειγμα 3.3 σελ.62, Άσκηση 3.2 σελ 63 ΣΕΥ Πιθανότητες ΙΙ, Άσκηση 2.6.2 Εργασία 5 2010 Άσκηση 5 Εργασία 6 2010 Άσκηση 6β Εργασία 6 2008 Άσκηση 6β	Εργασία 5 2009 Άσκηση 5 Εργασία 6 2009 Άσκηση 5α Εργασία 5 2008 Άσκηση 5α
5	Η άσκηση 5 αναφέρεται στην κανονική κατανομή. Η αντίστοιχη θεωρία είναι στο κεφάλαιο 4, παράγραφο 4.5 και ο πίνακας στην σελίδα 178. (δες επίσης ΣΕΥ, Κεφ. 2.2 από Πιθανότητες ΙΙ).	Άσκηση αυτοαξιολόγησης 4.5 σελ. 124 και η απάντηση σελ. 136 – 137, (βιβλίο Πιθανότητες και Στατιστική) Εργασία 5, 2010-11, Ασκ 6 Εργασία 6, 2009-10, Ασκ 5β, 5γ Εργασία 5, 2009-10, Ασκ 6 Εργασία 5, 2008-09, Ασκ 6 Εργασία 5, 2007-08, Ασκ. 5β Εργασία 6, 2006-07, Ασκ 8Γ Εργασία 5, 2006-07, Ασκ 8	ΣΕΥ ασκήσεις 2.6 και ειδικότερα 2.6.6, 2.6.7

Σημείωση: Οι παραπάνω παραπομπές αναφέρονται στο βιβλίο «Βασικά Εργαλεία και Μέθοδοι για τον Έλεγχο της Ποιότητας» Τόμος Α' Πιθανότητες και Στατιστική Ι του κ. Ι. Κουτρουβέλη (αναφέρεται ως 'Βιβλίο' στον προηγούμενο πίνακα), στο υλικό ΣΕΥ και στις εργασίες παλαιοτέρων ετών που υπάρχουν αναρτημένα στην ιστοσελίδα http://edu.eap.gr/pli/pli12/