ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 29 Ιουνίου 2012 18:00-21:30

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1

(Α) (15 μονάδες) Δίδονται οι πίνακες $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}$.

α) (6 μονάδες) Για κάθε ένα από αυτούς να βρεθούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, οι ιδιοτιμές του και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά τους.
β) (9 μονάδες) Εξετάστε ποιοί από αυτούς διαγωνοποιούνται και για κάθε διαγωνοποιήσιμο πίνακα βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα που τον διαγωνοποιεί (δηλαδή P αντιστρέψιμο έτσι ώστε ο διαγωνοποιήσιμος πίνακας να γράφεται $P\,\Delta\,P^{-1}$ όπου Δ διαγώνιος πίνακας).
Β) (5 μονάδες) Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} -2 & -9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Δείξτε (χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της επαγωγής), ότι, για κάθε φυσικό αριθμό n, ισχύει: $A^n=\begin{bmatrix} 1-3n & -9n \\ n & 1+3n \end{bmatrix}$.

Λύση
Α)
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο για τον πίνακα A είναι
$\chi_A(x)=\det(A-xI)=\det\left(\begin{bmatrix} 1-x & 2 \\ -1 & 4-x \end{bmatrix}\right)=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ και οι ιδιοτιμές είναι $x_1=2,\ x_2=3$.
Επειδή ο A είναι 2×2 πίνακας και έχει δυο διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι διαγωνοποιήσιμος.
Τα ιδιοδιανύσματά του που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $x_1=2$ είναι οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος
$\begin{bmatrix} 1-2 & 2 \\ -1 & 4-2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, ή $-x+2y=0$, δηλαδή $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot y$, όπου $y\neq 0$.
Τα ιδιοδιανύσματά του που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $x_2=3$ είναι οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος
$\begin{bmatrix} 1-3 & 2 \\ -1 & 4-3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, ή $-x+y=0$, δηλαδή $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot y$, όπου $y\neq 0$.
Θέτουμε $P=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Ο P είναι αντιστρέψιμος (αφού οι στήλες του αντιστοιχούν σε γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα) και διαγωνοποιεί τον Α.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο για τον πίνακα B είναι
$\chi_B(x)=\det(B-xI)=\det\left(\begin{bmatrix} 1-x & 2 \\ -\frac{1}{2} & 3-x \end{bmatrix}\right)=x^2-4x+4=(x-2)^2$ και έχει διπλή ιδιοτιμή $x_1=x_2=2$.
Τα ιδιοδιανύσματά του που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $x_1=x_2=2$ είναι οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος $\begin{bmatrix} 1-2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 3-2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, ή $-x+2y=0$, δηλαδή $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot y$, όπου $y\neq 0$.
Ο πίνακας B προφανώς δεν διαγωνοποιείται δεδομένου ότι η μοναδική ιδιοτιμή έχει γεωμετρική πολλαπλότητα 1 και αλγεβρική πολλαπλότητα 2.

B) Για $n=1$, είναι φανερό ότι η ζητούμενη σχέση ισχύει. Δεχόμαστε ότι ισχύει για το φυσικό αριθμό n, δηλαδή, $A^n = \begin{bmatrix} 1-3n & -9n \\ n & 1+3n \end{bmatrix}$ και θα δείξουμε τη ζητούμενη σχέση για n+1. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση έχουμε διαδοχικά:

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{bmatrix} 1-3n & -9n \\ n & 1+3n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(1-3n)-9n & -9(1-3n)-36n \\ -2n+1+3n & -9n+4(1+3n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-3n & -9-9n \\ 1+n & 4+3n \end{bmatrix}$$

Δηλαδή $A^{n+1} = \begin{bmatrix} 1-3(n+1) & -9(n+1) \\ n+1 & 1+3(n+1) \end{bmatrix}$, οπότε ισχύει η ζητούμενη σχέση και για n+1.
Σύμφωνα με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής θα ισχύει για κάθε φυσικό.

Θέμα 2

A) (8 μονάδες) Θεωρούμε τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$ $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y+z=0\}$ και $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=y=z\}$. Να δείξετε ότι U και W είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ και να βρείτε μία βάση και τη διάστασή τους. Επίσης, βρείτε μια βάση και τη διάσταση του υποχώρου $U\cap W$.

B) (12 μονάδες) Δίδεται η γραμμική απεικόνιση $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ με πίνακα αναπαράστασης

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ \lambda & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & \lambda+1 & 1 \end{bmatrix}$$

ως προς τις συνήθεις (διατεταγμένες) βάσεις των χώρων $\mathbb{R}^4$ και $\mathbb{R}^3$, όπου λ πραγματικός αριθμός και για την οποία ισχύει $f(1,0,2,-1)=(2,0,4)$.
Να δειχτεί ότι λ=1. Να βρεθεί ο τύπος της f. Να βρείτε μια βάση του Ker f και στη συνέχεια να υπολογίσετε τις διαστάσεις των χώρων Ker f και Im f.

Λύση

A) Επειδή $y+z=0 \Rightarrow y=-z$ τα διανύσματα $(x,y,z)\in U$ θα είναι της μορφής $(x,-z,z)=x(1,0,0)+z(0,-1,1)$. Τα διανύσματα $(1,0,0),(0,-1,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα μιας και $x(1,0,0)+z(0,-1,1)=(0,0,0)\Rightarrow(x,-z,z)=(0,0,0)\Rightarrow x=z=0$. Συνεπώς $U=\langle(1,0,0),(0,-1,1)\rangle$ με dimU=2.
Παρόμοια μπορώ να διαπιστώσω ότι τα διανύσματα $(x,y,z)\in W$ θα είναι της μορφής $(x,x,x)=x(1,1,1)$. Το διάνυσμα $(1,1,1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Συνεπώς $W=\langle(1,1,1)\rangle$ με dimW=1.
Τα διανύσματα $(x,y,z)\in W$ θα πρέπει να ικανοποιούν και τις σχέσεις

$$\left.\begin{cases} y+z=0 \\ x=y=z \end{cases}\right\} \Leftrightarrow x=y=z=0$$

και άρα $U\cap W=\{(0,0,0)\}$ με διάσταση 0.

B) Καθώς ο πίνακας αναπαράστασης της f δίνεται ως προς τις συνήθεις βάσεις η συνθήκη $f(1,0,2,-1)=(2,0,4)$ ισοδυναμεί με $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & \lambda \\ \lambda & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & \lambda+1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ δηλαδή με το σύστημα $\begin{bmatrix} 3-\lambda \\ \lambda-1 \\ 2\lambda+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

που ισοδυναμεί με $\left\{\begin{matrix} 3-\lambda=2 \\ \lambda-1=0 \\ 2\lambda+2=4 \end{matrix}\right\}$ δηλαδή λ=1.

ii) Για την τιμή λ=1 ο πίνακας Α γίνεται: $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$

Για $(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$, υπολογίζουμε το γινόμενο $\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1-2x_2+x_3+x_4\\ x_1-x_2+x_4\\ x_1+3x_2+2x_3+x_4\end{bmatrix}$ οπότε ο τύπος

της *f* είναι: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-2x_2+x_3+x_4, x_1-x_2+x_4, x_1+3x_2+2x_3+x_4)$

iii)

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+x_4=0\\ x_1-x_2+x_4=0\\ x_1+3x_2+2x_3+x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+x_4=0\\ x_3=x_2\\ x_1+3x_2+2x_3+x_4=0\end{cases}$$

Άρα

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2+x_4=0\\ x_3=x_2\\ x_1+5x_2+x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=0\\ x_3=0\\ x_4=-x_1\end{cases}$$

Συνεπώς

$$Kerf=\{(x_1,0,0,-x_1),x_1\in\mathbb{R}\}=\{x_1(1,0,0,-1),x_1\in\mathbb{R}\}=\langle(1,0,0,-1)\rangle$$

Και επειδή το διάνυσμα $(1,0,0,-1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο το σύνολο $\{(1,0,0,-1)\}$ είναι μια βάση του $Kerf$ με διάσταση $\dim Kerf=1$. Επομένως $\dim\operatorname{Im}f=\dim\mathbb{R}^4-\dim Kerf=4-1=3$

Θέμα 3

Α) (6 μονάδες) Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:

(α) $a_n=\left(\dfrac{12n+1}{12n-5}\right)^n$, (β) $a_n=\dfrac{7n+(-1)^n-5}{8n}$

Β) (8 μονάδες) Να εξεταστεί η σύγκλιση κάθε μίας από τις παρακάτω σειρές. Αν εξαρτάται από $x\in\mathbb{R}$, να βρεθούν όλες οι τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η σειρά συγκλίνει:

(α) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+3}\right)^n$ (β) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 5^n}$.

Γ) (6 μονάδες) Να υπολογισθούν τα όρια:

(α) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2-e^{x^2}}{2+2x-2\cos 2x}$, (β) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{\ln x}$

Λύση

Α) α) Ο γενικός όρος της ακολουθίας γράφεται ως εξής (ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες, Παράγραφοι 2.4.1-2.4.4, Παράγραφος 2.4.7):

$$a_n=\left(\frac{12n+1}{12n-5}\right)^n=\left(\frac{1+\frac{1}{12n}}{1-\frac{5}{12n}}\right)^n=\frac{\left(1+\frac{1/12}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{5/12}{n}\right)^n}$$

Είναι γνωστό ότι (Λογισμός μιας Μεταβλητής, Ενότ. 2, Παράγραφος 2.4, σελ. 24 - Παράδειγμα –ΣΕΥ Λογισμός, Ακολουθίες, Παράγραφος 2.9): $\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$ Εφαρμόζοντας την σχέση αυτή για $x=\frac{1}{10}$ και $x=-\frac{5}{12}$, έχουμε ότι: $\lim\left(1+\frac{1/12}{n}\right)^n = e^{1/12}, \lim\left(1-\frac{5/12}{n}\right)^n = e^{-5/12}.$

Οπότε $$\lim a_n = \lim\frac{\left(1+\frac{1/12}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{5/12}{n}\right)^n} = \frac{\lim\left(1+\frac{1/12}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{-5/12}{n}\right)^n} = \frac{e^{\frac{1}{12}}}{e^{-\frac{5}{12}}} = e^{\frac{1}{12}+\frac{5}{12}} = e^{\frac{6}{12}} = e^{\frac{1}{2}}$$

β) Η ακολουθία γράφεται ως εξής:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{7n+(-1)^n-5}{8n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7n}{8n}+\frac{(-1)^n}{8n}-\frac{5}{8n}\right) =$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{8}+\frac{(-1)^n}{8n}-\frac{5}{8n}\right)$$

Η ακολουθία $\frac{5}{8n}$ είναι μηδενική. Η ακολουθία $\frac{1}{8n}$ είναι μηδενική ενώ η ακολουθία $(-1)^n$ είναι φραγμένη. Επομένως και η ακολουθία $\frac{(-1)^n}{8n}$ είναι μηδενική. Επομένως έχουμε:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{8}+\frac{(-1)^n}{8n}-\frac{5}{8n}\right) =$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{7}{8} + \lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{8n} - \lim_{n\to+\infty}\frac{5}{8n} = \frac{7}{8}+0-0 = \frac{7}{8}$$

Β) α) Ο γενικός όρος έχει την μορφή: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+3}\right)^n$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε το <u>κριτήριο του Cauchy</u> (ΣΕΥ Λογισμός, Σειρές, Παράγραφος 3.3) για την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$. Έχουμε:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{2n}{3n+3}\right)^n} = \frac{2n}{3n+3} \overset{\div n}{=} \frac{\frac{2n}{n}}{\frac{3n+3}{n}} = \frac{2}{3+\frac{3}{n}}$$

και

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{3+\frac{3}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2}{\lim\limits_{n\to\infty} 3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}} = \frac{2}{3+0} = \frac{2}{3} < 1$$

Συνεπώς, η σειρά μας συγκλίνει.

β) Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x+2)^{n+1}}{5^{n+1}\cdot(n+1)}}{\frac{(x+2)^n}{5^n\cdot n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot|x+2|}{5\cdot(n+1)} = |x+2|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{5\cdot(n+1)} = \frac{|x+2|}{5}$$

Άρα, αν $\dfrac{|x+2|}{5}<1 \Rightarrow |x+2|<5 \Rightarrow -7<x<3$, τότε η σειρά συγκλίνει.

Για $\dfrac{|x+2|}{5}>1 \Rightarrow x>3$ ή $x<-7$, η σειρά αποκλίνει.

Για $x=3$, προκύπτει η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$, η οποία αποκλίνει.

Για $x=-7$, η σειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-5)^n}{n\cdot 5^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$, η οποία συγκλίνει, γιατί είναι η εναλλάσσουσα αρμονική, (ικανοποιεί τις υποθέσεις του κριτηρίου Leibniz).

Συνεπώς, η σειρά συγκλίνει όταν $x\in[-7,3)$.

Γ) (α) Επειδή μετά από αντικατάσταση προκύπτει απροσδιόριστη μορφή, χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hospital, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2-e^{x^2}}{2+2x-2\cos 2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(1-x^2-e^{x^2})'}{(2+2x-2\cos 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x-2xe^{x^2}}{2+4\sin 2x}=0$$

b) Χρησιμοποιώντας τον κανόνα L'Hospital έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\frac{1}{x^2}+1}=2$

Θέμα 4

Α) (8 μονάδες) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=16x(x-1)^3$ ορισμένη για $x\in\mathbb{R}$. Να υπολογίσετε

(α) (4 μονάδες) την πρώτη παράγωγο της f και να βρείτε τα διαστήματα όπου η f είναι αύξουσα, φθίνουσα, τα τοπικά και (ενδεχομένως) ολικά ακρότατα της f.

(β) (4 μονάδες) την δεύτερη παράγωγο της f και να βρείτε τα διαστήματα όπου η f είναι κυρτή, κοίλη όπως και τα σημεία καμπής της f.

Β) (12 μονάδες) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(α) $I_1=\int_0^{+\infty}(3-2x)e^{-x}dx$ (β) $I_2=\int\dfrac{e^{2x}}{2e^{2x}+5e^x+2}dx$ (Θέστε $z=e^x$).

Λύση

Α) (α) Υπολογίζουμε την παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x)'=16(x-1)^3+48x(x-1)^2=16(x-1)^2(4x-1)$$

Για τον μηδενισμό της παραγώγου της f έχουμε

$$16(x-1)^2(4x-1)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{4} \text{ ή } x=1.$$

Για το θετικό πρόσημο της f' λύνουμε την ανίσωση στο διάστημα (0, +∞):

$$f(x)'>0\Leftrightarrow 4x-1>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{4}.$$

Παρόμοια για το αρνητικό πρόσημο, οπότε συμπεραίνουμε ότι η f είναι αύξουσα στο $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$ και φθίνουσα στο $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right)$. Παρουσιάζει τοπικό και ολικό ελάχιστο στο $x=\frac{1}{4}$ με $f(1/4)=-\frac{27}{16}$.

(β) Υπολογίζουμε την δεύτερη παράγωγο:

$$f(x)'' = 32(x-1)(4x-1) + 64(x-1)^2 = 96(x-1)(2x-1)$$

Για το πρόσημο της $f''(x)$ έχουμε ότι εκτός των ριζών $x=\frac{1}{2}, x=1$ έχουμε ότι $f(x)''>0$ οπότε η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, ενώ στο διάστημα ανάμεσα στις ρίζες έχουμε ότι $f(x)''<0$ οπότε η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω. Στα σημεία των ριζών της $f''(x)$ έχουμε αλλαγή καμπυλότητας δηλαδή έχουμε σημεία καμπής.

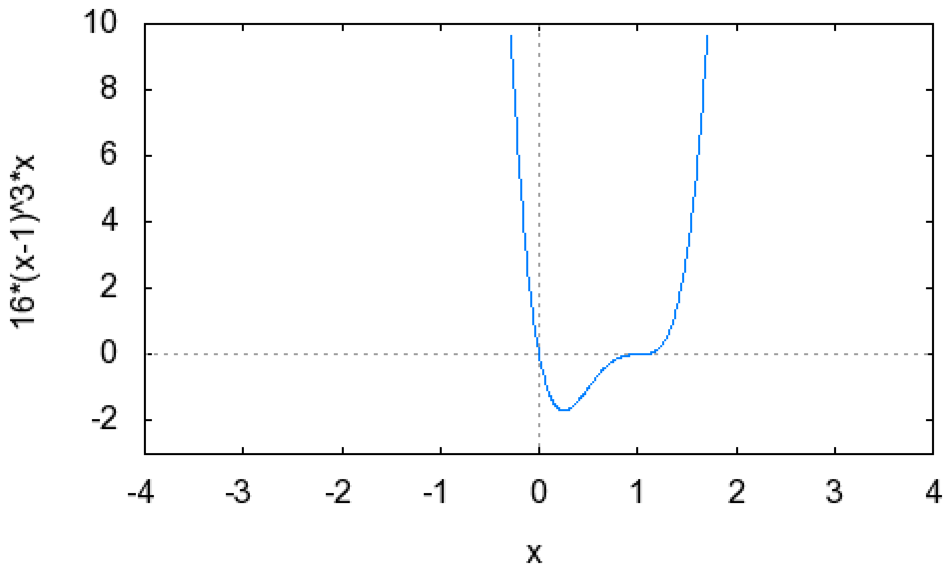
Δηλαδή έχουμε:

$f(x)''=0 \Rightarrow x=1, x=\frac{1}{2}$ σημεία καμπής

$(-\infty, 1/2),\ f(x)''>0, \cup$

$(1/2, 1),\ f(x)''<0, \cap$

$(1, +\infty),\ f(x)''>0, \cup$



Β) α) Το I_1 είναι γενικευμένο ολοκλήρωμα α΄ είδους οπότε έχουμε :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} (3-2x)e^{-x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} (3-2x)e^{-x}\,dx$$

Θα υπολογίσουμε πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$I = \int (3-2x)e^{-x}\,dx$$

Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int (3-2x)e^{-x}\,dx = -\int (3-2x)(e^{-x})'\,dx \\ &= -[(3-2x)e^{-x} + 2\int e^{-x}\,dx] = -[(3-2x)e^{-x} - 2\int (e^{-x})'\,dx] \\ &= -(3-2x)e^{-x} + 2e^{-x} + c \end{aligned}$$

Συνεπώς, το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι:

$$\int_0^{A} (3-2x)e^{-x}\,dx = \left[-(3-2x)e^{-x} + 2e^{-x}\right]_0^{A}$$

$$= -(3-2A)e^{-A} + 2e^{-A} + (3-0)e^{0} - 2e^{0} = -(1-2A)e^{-A} + 1$$

Τελικά

$$I_1 = \lim_{A\to+\infty}\left[-(1-2A)e^{-A}\right]+1 = -\lim_{A\to+\infty}\frac{1-2A}{e^A}+1 = -\lim_{A\to+\infty}\frac{(1-2A)'}{(e^A)'}+1 = -\lim_{A\to+\infty}\frac{-2}{e^A}+1 = 1$$

(b) Για να υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα, θέτουμε $e^x = z$, με $z > 0$, οπότε $e^x dx = dz$, έτσι το ολοκλήρωμα γράφεται

$$I_2 = \int \frac{e^x \cdot e^x}{2e^{2x}+5e^x+2}dx = \int \frac{e^x}{2e^{2x}+5e^x+2}e^x dx = \int \frac{z}{2z^2+5z+2}dz = \int \frac{z}{(z+2)(2z+1)}dz$$

Αναλύουμε την συνάρτηση προς ολοκλήρωση σε απλά κλάσματα

$$\frac{z}{(z+2)(2z+1)} = \frac{A}{(z+2)} + \frac{B}{(2z+1)} \Rightarrow z = A\cdot(2z+1) + B\cdot(z+2) \Rightarrow z = (2A+B)z + (A+2B)$$

Λύνοντας το σύστημα:

$2A + B = 1$

$A + 2B = 0$

προκύπτει $A = 2/3$ και $B = -1/3$, οπότε το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$I_2 = \int \frac{z}{(z+2)(2z+1)}dz = \int \frac{2/3}{z+2}dz - \int \frac{1/3}{2z+1}dz = \frac{2}{3}\ln|z+2| - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{(2z+1)'}{2z+1}dz$$
$$= \frac{2}{3}\ln|z+2| - \frac{1}{6}\ln|2z+1| + c$$
$$= \frac{2}{3}\ln|e^x+2| - \frac{1}{6}\ln|2e^x+1| + c$$

Θέμα 5

A) (10 μονάδες) Μία αυτοκινητοβιομηχανία παράγει ένα συγκεκριμένο τύπο αυτοκινήτων σε δύο μόνο εργοστάσια. Στο εργοστάσιο A παράγεται το 60% του συνολικού αριθμού του συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου και στο εργοστάσιο B παράγεται το 40% του συνολικού αριθμού του συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου. Είναι γνωστό ότι το 6% του συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτων που προέρχονται από το A παρουσιάζουν ελάττωμα μέσα στο χρόνο εγγύησης και το 3% του συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτων που προέρχονται από το B παρουσιάζουν ελάττωμα μέσα στο χρόνο εγγύησης .

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα ένα αυτοκίνητο του συγκεκριμένου τύπου να παρουσιάσει ελάττωμα μέσα στο χρόνο εγγύησης του.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα ένα αυτοκίνητο του συγκεκριμένου τύπου που παρουσίασε ελάττωμα μέσα στο χρόνο εγγύησής του να παράχθηκε στο εργοστάσιο A.

(Υπόδειξη: Θεωρείστε τα ενδεχόμενα
A={το αυτοκίνητο του συγκεκριμένου τύπου παράχθηκε στο εργοστάσιο A}
B={το αυτοκίνητο του συγκεκριμένου τύπου παράχθηκε στο εργοστάσιο B}
E={ το αυτοκίνητο του συγκεκριμένου τύπου παρουσίασε ελάττωμα μέσα στο χρόνο εγγύησης του })

B) (10 μονάδες) Οι τιμές μέτρησης του σακχάρου, δύο ώρες μετά από ένα κανονικό γεύμα, στο αίμα των ανδρών ασθενών μίας κλινικής ενός νοσοκομείου ακολουθούν την κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2) = N(110, 25^2)$. Οι τιμές αυτές θεωρούνται καλές όταν $85 \le X \le 135$ ενώ πρέπει να κληθεί ιατρός ώστε να προτείνει αγωγή όταν $X > 210$.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα η τιμή μέτρησης ενός άνδρα να θεωρηθεί καλή;

(β) Οι νοσοκόμες της συγκεκριμένης κλινικής του νοσοκομείου καταγράφουν τις μετρήσεις στο ιστορικό ενός ασθενή όταν για τις τιμές αυτές ισχύει $X > 185$.

β1. Ποιά είναι η πιθανότητα, *p*, για μία μέτρηση να μην απαιτείται να κληθεί ιατρός δεδομένου ότι η μέτρηση έχει καταγραφεί;

β2. Μία ημέρα καταγράφονται 10 μετρήσεις. Ποια είναι η πιθανότητα να χρειαστεί να κληθεί ιατρός για μόνο δύο από αυτές ;

Οι απαντήσεις να δοθούν χρησιμοποιώντας τιμές της συνάρτησης κατανομής Φ της $N(0,1)$, δηλαδή παραστάσεις που περιέχουν $\Phi(a)$, $\Phi(b)$ …, για συγκεκριμένες <u>θετικές</u> τιμές των a, b,… .

Λύση

Α)

Έχουμε από την υπόθεση ότι

$$P(A)=\frac{6}{10},\ P(B)=\frac{4}{10},\ P(E\mid A)=\frac{6}{100},\ P(E\mid B)=\frac{3}{100}.$$

α). Επειδή τα A,B είναι διαμέριση του δειγματοχώρου $A\cup B$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας $P(E)=P(A)P(E\mid A)+P(B)P(E\mid B)=\frac{6}{10}\frac{6}{100}+\frac{4}{10}\frac{3}{100}=\frac{48}{1000}$.

β). Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα έχουμε

$$P(A\mid E)=\frac{P(E\mid A)P(A)}{P(E)}=\frac{\frac{6}{100}\frac{6}{10}}{\frac{48}{1000}}=\frac{36}{48}=\frac{3}{4}.$$

Β) (α) Ζητείται η πιθανότητα $P\left(85\le X\le 135\right)$. Ανάγουμε το ερώτημα στην τυπική Κανονική Κατανομή.

Επειδή η τυπική απόκλιση της $N(110,25^2)$ είναι $\sigma=25$, έχουμε:

$$P\left(85\le X\le 135\right)=P\left(\frac{85-110}{25}\le\frac{X-110}{25}\le\frac{135-110}{25}\right).$$

Ορίζοντας $Z=\dfrac{X-110}{25}$, γνωρίζουμε ότι $Z\sim N(0,1)$. Έτσι η προαναφερθείσα πιθανότητα θα είναι:

$$P\left(\frac{85-110}{25}\le\frac{X-110}{25}\le\frac{135-110}{25}\right)=P\left(-1\le Z\le 1\right)=$$
$$=P\left(Z\le 1\right)-P\left(Z<-1\right)=P\left(Z\le 1\right)-P\left(Z>1\right)=$$
$$=P\left(Z\le 1\right)-\left(1-P\left(Z\le 1\right)\right)=2\cdot P\left(Z\le 1\right)-1=2\cdot\Phi\left(1\right)-1$$

(β1.) Ουσιαστικά ζητάμε την πιθανότητα

$$p=P\left(X\le 210\mid X>185\right)=\frac{P\left(X\le 210\ \&\ X>185\right)}{P\left(X>185\right)}=\frac{P\left(185<X\le 210\right)}{P\left(X>185\right)}$$

Έχουμε ότι:

$$P\left(185<X\le 210\right)=P\left(\frac{185-110}{25}<\frac{X-110}{25}\le\frac{210-110}{25}\right)=P\left(\frac{75}{25}<\frac{X-110}{25}\le\frac{100}{25}\right)=$$
$$=P\left(3<Z\le 4\right)=P\left(Z\le 4\right)-P\left(Z<3\right)=\Phi\left(4\right)-\Phi\left(3\right).$$
$$P\left(X>185\right)=1-P\left(X\le 185\right)=1-P\left(\frac{X-110}{25}\le\frac{185-110}{25}\right)=1-P\left(Z\le 3\right)=1-\Phi\left(3\right)$$

Άρα $p=\dfrac{\Phi\left(4\right)-\Phi\left(3\right)}{1-\Phi\left(3\right)}$.

β2. Αφού ζητάμε την πιθανότητα από τις 10 μετρήσεις που καταγράφονται να κληθεί ιατρός σε 2 από αυτές, σημαίνει ότι ζητάμε την πιθανότητα να μην κληθεί γιατρός σε ακριβώς 8 μετρήσεις που έχουν καταγραφεί. Έτσι θα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του προηγούμενου υποερωτήματος.

Ορίζουμε ως Y την τυχαία μεταβλητή που μετρά για πόσες μετρήσεις από τις υπάρχουσες 10 δεν θα απαιτηθεί να κληθεί ιατρός. Τότε η Y ακολουθεί την Διωνυμική Κατανομή με $n=10$ και πιθανότητα επιτυχίας p όπως υπολογίστηκε στο (α). Επομένως, η πιθανότητα για $(Y=8)$ θα είναι η

$$P\left(Y=8\right)=\binom{10}{8}p^8\cdot(1-p)^2=\binom{10}{8}\left(\frac{\Phi\left(4\right)-\Phi\left(3\right)}{1-\Phi\left(3\right)}\right)^8\left(\frac{1-\Phi\left(4\right)}{1-\Phi\left(3\right)}\right)^2.$$

_ **ΤΕΛΟΣ** _