ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 9 Ιουνίου 2012

Θέμα 1

Δίδονται οι πίνακες $K=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}5 & -4\\ 9 & -7\end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

Α) (8 μονάδες) Για κάθε ένα από αυτούς να βρεθούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και οι ιδιοτιμές του.
Β) (9 μονάδες) Εξετάστε ποιοί από αυτούς διαγωνοποιούνται και για κάθε διαγωνοποιήσιμο πίνακα βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα που τον διαγωνοποιεί (δηλαδή P αντιστρέψιμο έτσι ώστε ο διαγωνοποιήσιμος πίνακας να γράφεται $P\,\Delta\,P^{-1}$ όπου Δ διαγώνιος πίνακας).
Γ) (3 μονάδες) Να βρείτε ποιός από τους K, L, M, μπορεί να διαγωνοποιειθεί μέσω ορθογωνίου πίνακα και στην περίπτωση αυτή να βρεθεί τέτοιος ορθογώνιος πίνακας.

Λύση

Α) Υπολογίζουμε τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα και τις ρίζες τους που είναι οι ιδιοτιμές των αντίστοιχων πινάκων :

$$p_K(\lambda)=\det(K-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\ 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(-1-\lambda)-3=$$
$$=-1-\lambda+\lambda+\lambda^2-3=\lambda^2-4=(\lambda-2)(\lambda+2)$$

και οι ιδιοτιμές του K: $\lambda_1=2$ και $\lambda_2=-2$ απλές (καθεμία έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 1).

$$p_L(\lambda)=\det(L-\lambda I)=\begin{vmatrix}5-\lambda & -4\\ 9 & -7-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)(-7-\lambda)+36=-35-5\lambda+7\lambda+\lambda^2+36=$$

$\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2$ και οι ιδιοτιμές του L: $\lambda_1=\lambda_2=-1$ διπλή (αλγεβρική πολλαπλότητα 2).

$$p_M(\lambda)=\det(M-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(1-\lambda)-4=1-2\lambda+\lambda^2-4=\lambda^2-2\lambda-3$$

$=(\lambda+1)(\lambda-3)$ και οι ιδιοτιμές του M: $\lambda_1=3$ και $\lambda_2=-1$ (καθεμία έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 1).

Β) Ο πίνακας K διαγωνοποιείται αφού είναι 2×2 και έχει 2 διαφορετικές ιδιοτιμές με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα που βρίσκονται παρακάτω.

$$K-2I=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & -3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftarrow r_2+r_1}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix}\text{ ιδιοδιάνυσμα }\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix},$$

$$K+2I=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftarrow r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\text{ ιδιοδιάνυσμα }\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$ και ένας αντιστρέψιμος πίνακας που τον διαγωνοποιεί είναι ο $P_K=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ Ο διαγώνιος $\Delta=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.

(Εναλλακτικά, αφού ο ιδιοχώρος κάθε ιδιοτιμής παράγεται από ένα ιδιοδιάνυσμα η γεωμετρική πολλαπλότητα της καθεμία από τις δύο ιδιοτιμές είναι 1 ίση με την αντίστοιχη αλγεβρική πολλαπλότητά της, οπότε ο πίνακας διαγωνοποιείται.)

Για την διπλή ιδιοτιμή του L βρίσκουμε βάση του ιδιόχωρου ως εξής:

$$L+I=\begin{pmatrix}6 & -4\\ 9 & -6\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & -2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}3 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$ Ένα μόνο γραμμικά ανεξάρτητο. ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$, άρα ο L δεν διαγωνοποιείται. (Εναλλακτικά αφού ο ιδιοχώρος παράγεται από ένα ιδιοδιάνυσμα η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής είναι 1 ενώ η αλγεβρική πολλαπλότητά της 2, οπότε ο πίνακας δεν διαγωνοποιείται).

Ο πίνακας M διαγωνοποιείται ως συμμετρικός. Βρίσκουμε γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα ως εξής

$$M-3I=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftarrow -r_1/2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftarrow r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$ ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

$$M+I=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftarrow r_1/2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftarrow r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$ ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ και ένας αντιστρέψιμος πίνακας που τον διαγωνοποιεί είναι ο $P_M=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ με Δ=$\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

(Εναλλακτικά, αφού ο ιδιοχώρος κάθε ιδιοτιμής παράγεται από ένα ιδιοδιάνυσμα η γεωμετρική πολλαπλότητα της καθεμία από τις δύο ιδιοτιμές είναι 1 ίση με την αντίστοιχη αλγεβρική πολλαπλότητά της, οπότε ο πίνακας διαγωνοποιείται.)

Γ) Ισχύει ότι: τετραγωνικός πραγματικός πίνακας διαγωνοποιείται μέσω ορθογωνίου πίνακα αν και μόνο είναι συμμετρικός. Άρα μόνο ο πίνακας *M* διαγωνοποιείται μέσω ορθογωνίου. Για να βρούμε ένα τέτοιο πίνακα αρκεί να κανονικοποιείσουμε τις στήλες του P_M αφού είναι ήδη ορθογώνιες καθώς αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές συμμετρικού πραγματικού πίνακα (αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε και εφαρμόζοντας το εσωτερικό γινόμενο (1,1) • (1,-1)=1–1=0). Τα μέτρα τους είναι ΙΣΑ: $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. Οπότε ο $Q_M=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ είναι ορθογώνιος πίνακας που διαγωνοποιεί τον *M*.

Θέμα 2

Εστω ο γραμμικός μετασχηματισμός $f(x,y,z)=(x+2y+z,x+3y+2z,x+y)$ του $\mathbf{R}^3$.

Α) (4 μονάδες) Να βρεθεί ο πίνακας *A* που αναπαριστά τον *f* ως προς την συνήθη βάση του $\mathbf{R}^3$, και να υπολογίσετε την ορίζουσα του *A*. Χωρίς άλλες πράξεις, απαντήστε: είναι ο *f* 1-1; είναι επί; (αιτιολογείστε την απάντησή σας).

Β) (8 μονάδες) Να βρεθούν όλες οι τιμές του πραγματικού αριθμού κ για τις οποίες το διάνυσμα $\mathbf{u}=(3,4,\kappa)$ ανήκει στο Im*f* και, για κάθε τέτοια τιμή, όλα τα διανύσματα $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ για τα οποία $f(x,y,z)=\mathbf{u}$.

Γ) (8 μονάδες) Να βρεθούν βάσεις και οι διαστάσεις των Ker*f* και Im*f*. Ισχύει ότι κάθε διάνυσμα στον Ker*f* είναι ορθογώνιο σε κάθε διάνυσμα της Im*f* (ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbf{R}^3$) ; (αιτιολογείστε την απάντησή σας).

Λύση

Α) από τον τύπο του *f* έχουμε *f*(1, 0,0)=(1,1,1), *f*(0, 1,0)=(2,3,1), *f*(0,0,1)=(1,2,0). Άρα

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Αναπτύσσοντας ως προς την τελευταία στήλη: detA= 1$\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}$=1-3-2(1-2)=0.

Αρα ο A δεν είναι αντιστρέψιμος συνεπώς ο *f* δεν είναι 1-1 και αφού είναι μετασχηματισμός του $\mathbf{R}^3$ δεν είναι ούτε επί.

Β) Το **u** ανήκει στο Im*f* αν και μόνο αν το γραμμικό σύστημα: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 4\\ \kappa\end{pmatrix}$ είναι συμβιβαστό, οι δε αντίστοιχες λύσεις του αποτελούν και τα ζητούμενα $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$. Με γραμμο-πράξεις στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος έχουμε

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 0 & \kappa\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\leftarrow r_2-r_1,\, r_3\leftarrow r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & \kappa-3\end{array}\right)\xrightarrow{r_3\leftarrow r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \kappa-2\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftarrow r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \kappa-2\end{array}\right)$$

Από τον τελευταίο κλιμακωτό πίνακα έχουμε ότι το σύστημα είναι συμβιβαστό όταν και μόνο όταν κ=2 και στην περίπτωση αυτή $(x,y,z)=(1+z,1-z,z)=(1,1,0)+z(1,-1,1),\ z\in\mathbf{R}$.

Γ) Από την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του $\boldsymbol{A}$ που έχουμε στο πρώτο μέρος του επαυξημένου πίνακα έχουμε ότι: $(x,y,z)\in \mathrm{Ker}f$ αν και μόνο αν $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Άρα τα διανύσματα του $\mathrm{Ker}f$ δίνονται από $(x,y,z)=z(1,-1,1),\ z\in\mathbf{R}$, η διάσταση του Ker$f$ είναι 1 και μία βάση του το μονοσύνολο {(1,-1,1)}.

Οι στήλες του $\boldsymbol{A}$ που αντιστοιχούν στις στήλες με μη μηδενικά οδηγά στοιχεία της κλιμακωτής του μορφής είναι η πρώτη και η δεύτερη, άρα η διάσταση του Imf είναι 2 και μία βάση του είναι το δι-σύνολο {(1,1,1), (2,3,1)}.

Για την ορθογωνιότητα μεταξύ εικόνας και πυρήνα αρκεί κάθε στοιχείο της βάσης του ενός υποχώρου να είναι ορθογώνιο με κάθε στοιχείο της βάσης του άλλου. Υπολογίζουμε τα εσωτερικά γινόμενα του (μοναδικού) στοιχείου της βάσης του πυρήνα με τα στοιχεία της βάσης της εικόνας:

(1,–1,1) • (1,1,1)=1–1+1=1≠0 και ήδη συμπεραίνουμε ότι οι δύο υπόχωροι δεν είναι ορθογώνιοι (το ότι (1,–1,1) • (2,3,1)=2–3+1=0 δεν αρκεί).

Θέμα 3

Α) (6 μονάδες) Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών:

(α) $\dfrac{n-n^3}{2n^3+n^2+n}$ (β) $\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{2n}$ (γ) $\dfrac{3^n}{n!}$

Β) (7 μονάδες) Να εξεταστεί η σύγκλιση κάθε μίας από τις παρακάτω σειρές για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

(α) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^n}{2^n}$, (β) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{2n^2+1}$ (γ) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

Γ) (7 μονάδες) Να υπολογισθούν τα όρια:

(α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(\ln(x))}{x^{1/2}}$ (β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{\sin x}$

Λύση

Α)

(α) $\lim\ \dfrac{n-n^3}{2n^3+n^2+n}=\lim\dfrac{n^3(\frac{1}{n^2}-1)}{n^3(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}=\lim\dfrac{\frac{1}{n^2}-1}{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=-1/2$

(β) $\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{2n}=\left(\dfrac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right)^{2n}=\left(\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}\right)^2=$ και επειδή $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$ και $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=e^{-1}$

έχουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{2n}=\left(\dfrac{e}{e^{-1}}\right)^2=e^4$.

(γ) αφού για κάθε πραγματικό αριθμό x $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{x^n}{n!}=0,\quad \lim_{n\to+\infty}\dfrac{3^n}{n!}=0$

Β) (α) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του d’ Alembert:

$\left|\dfrac{(n+1)x^{n+1}}{2^{n+1}}\dfrac{2^n}{nx^n}\right|=\left|\dfrac{(n+1)x}{2n}\right|\xrightarrow[n\to+\infty]{}\left|\dfrac{x}{2}\right|$. Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως (άρα και απλώς) για όλα τα x με $\left|\dfrac{x}{2}\right|<1$, δηλαδή $-2<x<2$ και αποκλίνει για τιμές του x στα διαστήματα (–∞,-2) , (2, +∞).

Για x=2 η σειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty}n$ και για x= -2 $\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n$. Και στις δύο περιπτώσεις η σειρά αποκλίνει αφού η ακολουθία του γενικού όρου δεν τείνει στο μηδέν.

(β) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο σύγκρισης. Για τον γενικό όρο έχουμε

$0 < \frac{\sqrt{n}}{2n^2+1} < \frac{\sqrt{n}}{2n^2} < \frac{1}{2n^{3/2}}$. Όμως η σειρά με γενικό όρο $\frac{1}{n^{3/2}}$ συγκλίνει (p-σειρά με p=3/2>1) και βεβαίως και η σειρά με γενικό όρο $\frac{1}{2n^{3/2}}$ συγκλίνει. Άρα και η αρχική σειρά συγκλίνει.

(γ) Πρόκειται για εναλλάσσουσα σειρά**.** Η ακολουθία $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ των απολύτων τιμών είναι μηδενική και επειδή $n < n+1 \Rightarrow \sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ (η συνάρτηση $x \mapsto \sqrt{x}$ τετραγωνική ρίζα είναι αύξουσα στο (0, +∞)) και $\sqrt{n} < \sqrt{n+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ (η συνάρτηση $x \mapsto 1/x$ «ένα διά» είναι φθίνουσα στο (0, +∞))

έχουμε ότι είναι και φθίνουσα. Άρα σύμφωνα με το κριτήριο Leibniz η εναλλάσσουσα σειρά συγκλίνει.

Γ) (α) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{x^{1/2}}$. Απροσδιόριστη μορφή ∞/∞. Θεωρούμε το πηλίκο των παραγώγων αριθμητή και παρονομαστή:

$$\frac{\left(\ln(\ln(x))\right)'}{\left(x^{1/2}\right)'} = \frac{\frac{1}{\ln x}\left(\ln(x)\right)'}{\frac{1}{2}x^{-1/2}} = \frac{\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-1/2}} = \frac{2}{\ln x(x^{-1/2}x)} = \frac{2}{x^{1/2}\ln x}.$$

Καθώς το όριο του παρονομαστή στο τελευταίο κλάσμα είναι +∞ , το όριο του πηλίκου είναι 0. Συνεπώς βάσει του κανόνα L' Hôpital το αρχικό όριο είναι 0.

(β) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin x}$**.** Απροσδιόριστη μορφή 0/0. Θεωρούμε το πηλίκο των παραγώγων αριθμητή και παρονομαστή: $\frac{\left(1-\cos x\right)'}{\left(\sin x\right)'} = \frac{\sin x}{\cos x} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$ (λόγω συνέχειας). Συνεπώς βάσει του κανόνα L' Hôpital το αρχικό όριο είναι 0.

Θέμα 4

Α) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ **ορισμένη για** x**>0 . Να υπολογίσετε**

(α) (3 μονάδες) την πρώτη παράγωγο της f **. Να βρείτε τα διαστήματα όπου η** f **είναι μονότονη (και το είδος της μονοτονίας) όπως και τα τοπικά και (ενδεχομένως) ολικά ακρότατα της** f **.**

(β) (3 μονάδες) την δεύτερη παράγωγο της f **και να βρείτε τα διαστήματα όπου η** f **είναι κυρτή, κοίλη όπως και τα σημεία καμπής της** f **.**

(γ) (3 μονάδες) τα όρια της f **καθώς** $x \to 0^+$**,** $x \to +\infty$**. Υπάρχουν ασύμπτωτοι στη γραφική παράσταση της** f **;**

Β) (11 μονάδες) Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(α) $I = \int x\cos(k\,x)dx$ **για** $k \neq 0$ **,** **(β)** $J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^x}dx$**.**

Λύση

Α) (α) Υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο: $f'(x) = \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' = \frac{\left(\ln(x)\right)'x - \left(x\right)'\ln(x)}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$, η οποία ορίζεται σε όλο το πεδίο ορισμού της f , (0, +∞).

Καθώς η συνάρτηση ln είναι γνησίως αύξουσα στο (0, +∞) έχουμε για τον μηδενισμό της παραγώγου της *f*:

$$\frac{1-\ln(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1-\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(e) = \ln(x) \Leftrightarrow x = e.$$

Για το θετικό πρόσημο της f' λύνουμε την ανίσωση στο διάστημα (0, +∞):

$$\frac{1-\ln(x)}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 1-\ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(e) > \ln(x) \Leftrightarrow e > x.$$

Παρόμοια για το αρνητικό πρόσημο, οπότε συμπεραίνουμε ότι η f είναι αύξουσα στο (0, e) και φθίνουσα στο (e, +∞). Παρουσιάζει τοπικό και ολικό μέγιστο στο $x=e$ με $f(e)=1/e=e^{-1}$.

(β) Υπολογίζουμε την δεύτερη παράγωγο:

$$f''(x)=\left(\frac{1-\ln(x)}{x^2}\right)'=\frac{(1-\ln(x))'\,x^2-\left(x^2\right)'(1-\ln(x))}{x^4}=\frac{-\frac{1}{x}x^2-2x(1-\ln(x))}{x^4}=\frac{-x-2x+2x\ln(x)}{x^4}=\frac{-3+2\ln(x)}{x^3}$$

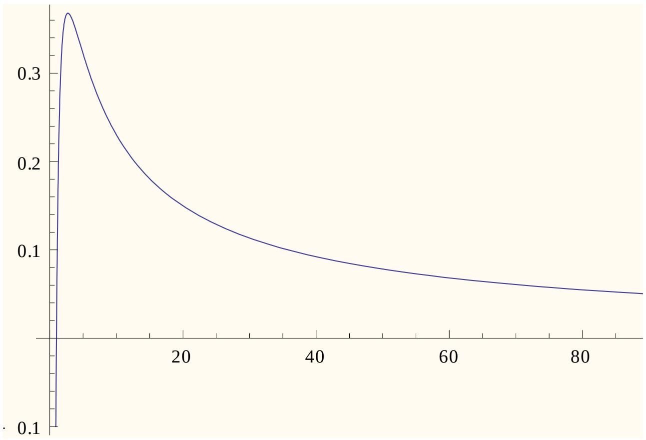
Λύνουμε την ανίσωση $f''(x)>0$ στο διάστημα (0, +∞): $\frac{-3+2\ln(x)}{x^3}>0\Leftrightarrow -3+2\ln(x)>0\Leftrightarrow \ln(x)>3/2$

$\Leftrightarrow \ln(x)>3/2\Leftrightarrow x>e^{3/2}$ και παρόμοια για το αρνητικό πρόσημο και συμπεραίνουμε ότι η f'' έχει θετικό πρόσημο στο διάστημα $(e^{3/2},+\infty)$ όπου στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, αρνητικό στο διάστημα $(0,e^{3/2})$ όπου στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω και μηδενίζεται για $x=e^{3/2}$ και συνεπώς εκεί παρουσιάζει σημείο καμπής.

(γ) Εχουμε ότι $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$, $\lim_{x\to 0^+}\ln x=(-\infty)$,άρα $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln x$ υπάρχει και ισούται με –∞. Με χρήση κανόνα L'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)/x=\lim_{x\to+\infty}(\ln x)'/(x)'==\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\,.$$

Άρα η γραφική παράσταση της f δέχεται κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία x=0



(κλάδος $y\to -\infty$)και οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία y =0 για $x\to +\infty$.

B) (α) $I=\int x\cos(kx)dx=\int x\left(\frac{\sin(kx)}{k}\right)'dx=x\frac{\sin(kx)}{k}-\int x'\,\frac{\sin(kx)}{k}dx=x\frac{\sin(kx)}{k}-\frac{1}{k}\int\sin(kx)dx$

$$=x\frac{\sin(kx)}{k}-\frac{1}{k}\int\sin(kx)dx=x\frac{\sin(kx)}{k}-\frac{1}{k}\left(-\frac{\cos(kx)}{k}\right)+C=x\frac{\sin(kx)}{k}+\frac{\cos(kx)}{k^2}+C$$

(β) Ισχύει: $J=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{1}{1+e^x}dx$

Για το αόριστο ολοκλήρωμα εκτελούμε την αντικατάσταση και έχουμε

$$y=e^x,\; dy=e^x dx=ydx\;\; \int\frac{1}{1+e^x}dx=\int\frac{1}{1+y}\frac{dy}{y}=\int\frac{1}{y(1+y)}dy$$

Η ολοκληρωτέα ποσότητα μετά την αντικατάσταση είναι ρητή συνάρτηση του y με βαθμό παρονομαστή μεγαλύτερο αυτόν του αριθμητή και παρονομαστή γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων (ως προς y) συνεπώς η διάσπασή της σε απλά κλάσματα γίνεται ως εξής:

$$\frac{1}{y(1+y)}\equiv\frac{A}{y}+\frac{B}{1+y}\Leftrightarrow\frac{1}{y(1+y)}\equiv\frac{A(1+y)+By}{y(1+y)}\Leftrightarrow 1\equiv A+(A+B)y\Leftrightarrow A=1\,\&\,A+B=0\Leftrightarrow A=1\,\&\,B=-1$$

και στην συνέχεια η ολοκλήρωση, μετά και την αντίστροφη αντικατάσταση, γίνεται:

$$\int\frac{1}{y(1+y)}dy=\int\frac{1}{y}dy-\int\frac{1}{1+y}dy=\ln|y|-\ln|1+y|+C=\ln\frac{e^x}{1+e^x}+C$$

Εναλλακτικά το παραπάνω ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής:

$$\int\frac{1}{1+e^x}dx=\int\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx=\int dx-\int\frac{e^x}{1+e^x}dx=x-\int\frac{du}{u}=x-\ln|u|=x-\ln\left|1+e^x\right|+C=\ln\frac{e^x}{1+e^x}+C$$

Όπου έχουμε θέσει $u=1+e^x$, $du=e^x dx$.

Τέλος, χρησιμοποιώντας ότι λόγω της συνέχειας της συνάρτησης λογάριθμος ισχύει $\lim_{x\to+\infty}(\ln f(x))=\ln\left(\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$, έχουμε:

$$J=\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{1+e^x}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\frac{e^b}{1+e^b}-\ln\frac{e^0}{1+e^0}\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\frac{1}{e^{-b}+1}\right)-\ln\frac{1}{2}=$$

$$=\ln\left(\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{-b}+1}\right)-\ln\frac{1}{2}=\ln 1-\ln 1+\ln 2=\ln 2.$$

Εναλλακτικά, με χρήση κανόνα L'Hopital και της συνέχειας της συνάρτησης λογάριθμος, το παραπάνω όριο υπολογίζεται ως εξής:

$$J=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\frac{e^b}{1+e^b}-\ln\frac{e^0}{1+e^0}\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\frac{e^b}{1+e^b}\right)-\ln\frac{1}{2}=$$

$$=\ln\left(\lim_{b\to+\infty}\frac{e^b}{1+e^b}\right)-\ln\frac{1}{2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\ln\left(\lim_{b\to+\infty}\frac{\left(e^b\right)'}{\left(1+e^b\right)'}\right)-\ln\frac{1}{2}=$$

$$=\ln\left(\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1}\right)-\ln\frac{1}{2}=\ln 1-\ln 1+\ln 2=\ln 2.$$

Θέμα 5.

A) (μονάδες 10) Σε ένα εργαστήριο οι ηλεκτρονικές συσκευές τροφοδοτούνται, ανεξάρτητα, από ηλεκτρικό ρεύμα του οποίου η τάση X σε Volt αυξομειώνεται ακολουθώντας την Κανονική Κατανομή $N(220,100)$. Μια συσκευή λειτουργεί καλά όταν $215 \le X \le 225$ και καταστρέφεται όταν $X > 240$.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα αυτή η συσκευή να λειτουργεί καλά ;

(β) Κάποια στιγμή, ένα όργανο μέτρησης μας πληροφορεί ότι η τάση στις συσκευές είναι μεγαλύτερη των 230 Volt. β1. Ποιά είναι η πιθανότητα, *p*, για μία συσκευή να μην καταστραφεί;

β2. Ένας επιβλέπων ελέγχει 10 τέτοιες συσκευές. Ποια είναι η πιθανότητα να βρει ότι έχουν καταστραφεί μόνο τρείς από αυτές ;

Οι απαντήσεις να δοθούν χρησιμοποιώντας τιμές της συνάρτησης κατανομής *Φ* της *N*(0,1), δηλαδή παραστάσεις που περιέχουν *Φ*(*a*) , *Φ*(*b*) …, για συγκεκριμένες τιμές των *a*, *b*, …..

B) (μονάδες 10) Στις τελευταίες βουλευτικές εκλογές, σε δύο εκλογικά τμήματα ($1^{ο}$ και $2^{ο}$) μιας μονοεδρικής περιφέρειας, το ποσοστό των ψηφοφόρων που ψήφισε το κόμμα Κ ήταν 30% και 25%, αντίστοιχα. Ένας από τους υποψήφιους του κόμματος Κ, ο κ. Υ, πήρε σε σταυρούς το 5% των ψήφων που πήρε το κόμμα Κ στο $1^{ο}$ τμήμα και το 4% των ψήφων που πήρε το Κ στο $2^{ο}$ τμήμα.

(α) (μονάδες 5) Επιλέγουμε στην τύχη έναν ψηφοφόρο του κόμματος Κ στην περιφέρεια αυτή. Ποιά είναι η πιθανότητα να ψήφισε τον υποψήφιο Υ ;

(β) (μονάδες 5) Επιλέγουμε στην τύχη έναν ψηφοφόρο που ψήφισε τον υποψήφιο Υ. Ποια είναι η πιθανότητα να ψήφισε στο $1^{ο}$ εκλογικό τμήμα ;**Υποθέτουμε ότι κάθε ψηφοφόρος βάζει ακριβώς ένα σταυρό.**

Λύση

A) (α) Ζητείται η πιθανότητα $P\left(215 \le X \le 225\right)$. Ανάγουμε το ερώτημα στην τυπική Κανονική Κατανομή.

Επειδή η τυπική απόκλιση της $N(220,100)$ είναι $\sigma=\sqrt{100}=10$, έχουμε:

$$P\left(215\le X\le 225\right)=P\left(\frac{215-220}{10}\le\frac{X-220}{10}\le\frac{225-220}{10}\right).$$

Ορίζοντας $Z=\dfrac{X-220}{10}$, γνωρίζουμε ότι $Z \sim N(0,1)$. Έτσι η προαναφερθείσα πιθανότητα θα είναι:

$$P\left(\frac{215-220}{10}\le Z\le\frac{225-220}{10}\right)=P\left(-\frac{5}{10}\le Z\le\frac{5}{10}\right)=P\left(-0.5\le Z\le 0.5\right)=$$
$$=P\left(Z\le 0.5\right)-P\left(Z<-0.5\right)=P\left(Z\le 0.5\right)-P\left(Z>0.5\right)=$$
$$=P\left(Z\le 0.5\right)-\left(1-P\left(Z\le 0.5\right)\right)=2\cdot P\left(Z\le 0.5\right)-1=2\cdot\Phi\left(0.5\right)-1$$

(βi.) Ουσιαστικά ζητάμε να βρούμε την πιθανότητα να μην έχει καταστραφεί μία συσκευή ($X \le 240$) δεδομένου ότι το όργανο μέτρησης μας έχει πληροφορήσει ότι έχουμε $X > 230$, οπότε ζητείται η

$$p=P\left(X\le 240\,|\,X>230\right)=\frac{P\left(X\le 240\ \&\ X>230\right)}{P\left(X>230\right)}=\frac{P\left(230<X\le 240\right)}{P\left(X>230\right)}$$

Έχουμε ότι:

$$P(230 < X \le 240) = P\left(\frac{230-220}{10} < \frac{X-220}{10} \le \frac{240-220}{10}\right) = P\left(\frac{10}{10} < \frac{X-220}{10} \le \frac{20}{10}\right) =$$
$$= P(1 < Z \le 2) = P(Z \le 2) - P(Z < 1) = \Phi(2) - \Phi(1).$$
$$P(X > 230) = 1 - P(X \le 230) = 1 - P\left(\frac{X-220}{10} \le \frac{230-220}{10}\right) = 1 - P(Z \le 1) = 1 - \Phi(1)$$

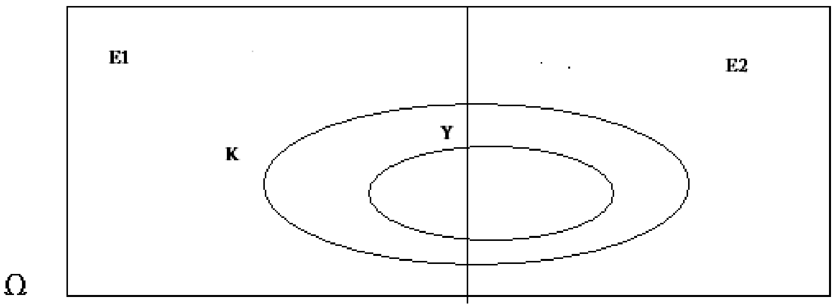
Άρα $p = \dfrac{\Phi(2)-\Phi(1)}{1-\Phi(1)}$.

β2. Αφού ζητάμε την πιθανότητα ο επιβλέπων από τα 10 συσκευές που ελέγχει να βρει ότι έχουν καταστραφεί μόνο τρείς από αυτές, σημαίνει ότι ζητάμε την πιθανότητα να μην έχουν καταστραφεί ακριβώς 7. Έτσι θα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του προηγούμενου υποερωτήματος.
Ορίζουμε ως Y την τυχαία μεταβλητή που μετρά πόσες συσκευές από τις υπάρχουσες 10 δεν θα καταστραφούν. Τότε η Y ακολουθεί την Διωνυμική Κατανομή με $n=10$ και πιθανότητα επιτυχίας p όπως υπολογίστηκε στο (α). Επομένως, η πιθανότητα να μην έχουν καταστραφεί 7 συσκευές (Y=7) θα είναι η

$$P(Y=7) = \binom{10}{7} p^7 \cdot (1-p)^3 = \binom{10}{3}\left(\frac{\Phi(2)-\Phi(1)}{1-\Phi(1)}\right)^7 \left(\frac{1-\Phi(2)}{1-\Phi(1)}\right)^3.$$

B)

Θεωρούμε ως δειγματικό χώρο το σύνολο των ψηφοφόρων στα δύο εκλογικά τμήματα και τα γεγονότα:
E_1={ψηφοφόρος ψηφίζει στο 1^o εκλογικό τμήμα}
E_2={ψηφοφόρος ψηφίζει στο 2^o εκλογικό τμήμα}



K={ ψηφοφόρος ψηφίζει το κόμμα Κ}
Y={ ψηφοφόρος ψηφίζει τον υποψήφιο Υ}
Προφανώς $Y \cap K = Y$. (1)
Θεωρούμε ότι οι ψηφοφόροι είναι ισο-κατανεμημένοι στα δύο εκλογικά τμήματα, δηλαδή $P(E_1)= P(E_2)=1/2$.
Από τα δεδομένα επίσης γνωρίζουμε ότι:

$P(K|E_1)$ =30%, $P(K|E_2)$=25%, $P(Y|K\cap E_1)$ =5%, $P(Y|K\cap E_2)$ = 4%.

(α) Ζητάμε $P(Y|K)$. Από τον ορισμό έχουμε $P(Y|K)= \dfrac{P(Y\cap K)}{P(K)} = \dfrac{P(Y)}{P(K)}$

Από θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε: $P(K)= P(K|E_1)\, P(E_1)+ P(K|E_2)\, P(E_2)$ =30% (1/2)+25% (1/2)=27,5%
Επίσης
$P(Y)= P(Y\cap E_1)+ P(Y\cap E_2) =$

$=P((Y\cap K)\cap E_1)+ P((Y\cap K)\cap E_2)$ (λόγω της (1))

$=P(Y\cap(K\cap E_1))+ P(Y\cap(K\cap E_2))$

$=P(Y|K\cap E_1)\, P(K\cap E_1)+ P(Y|K\cap E_2)\, P(K\cap E_2)$ (από ορισμό δεσμευμένης πιθανότητας)

$P(Y|K\cap E_1)\, P(K|E_1)\, P(E_1) + P(Y|K\cap E_2)\, P(K|E_2)\, P(E_2)$ (από ορισμό δεσμευμένης πιθανότητας)

= (5%) (30%) (1/2)+ (4%) (25%) (1/2)

Άρα $P(Y)$=1,25 %. Οπότε $P(Y|K)= \dfrac{P(Y)}{P(K)}$ =125/2750=1/22= 0,0454545…

(β) $P(E_1|Y)= \dfrac{P(Y\cap E_1)}{P(Y)} = \dfrac{P(Y\cap K\cap E_1)}{P(Y)} = \dfrac{P(Y|K\cap E_1)P(K\cap E_1)}{P(Y)} = \dfrac{P(Y|K\cap E_1)P(K|E_1)P(E_1)}{P(Y)}$

$= \dfrac{5\%(30\%)0,5}{P(Y)} = 60\%.$

_ _**ΤΕΛΟΣ**_ _