ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

17 Ιουλίου 2013 (διάρκεια: 3 ώρες και 30 λ.)

Διαβάστε προσεκτικά και απαντήστε αιτιολογημένα στα παρακάτω 5 Θέματα

Θέμα 1

1α) (10μ.) Θεωρούμε $V=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x+y-z=0\}$ και $W=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x+2y+2z=0\}$. υποχώρους του $\mathbf{R}^3$.

i) Βρείτε μία βάση και την διάσταση του *V*.

ii) Βρείτε μία βάση και την διάσταση του *W*.

iii) Βρείτε μία βάση και την διάσταση για την τομή $W\cap V$. Ισχύουν οι σχέσεις $W+V=\mathbf{R}^3$, $W\oplus V=\mathbf{R}^3$ **;**

1β) (10μ.) Θεωρούμε το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbf{R}^4$ και $U=span\{(1,-1,1,-1),(1,0,1,0)\}$ υπόχωρο του $\mathbf{R}^4$.

i) Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του *U*.

ii) Βρείτε μια ορθοκανονική βάση του *U*.

iii) Να βρεθεί η ορθή προβολή του τυχόντος διανύσματος $w=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ του $\mathbf{R}^4$ στον *U*.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1α)

i) Η εξίσωση $x+y-z=0$ ισοδυναμεί με $x=-y+z$ οπότε το τυχόν διάνυσμα του V γράφεται $(-y+z,y,z)=(-y,y,0)+(z,0,z)=y(-1,1,0)+z(1,0,1)$.

Συνεπώς μία βάση του *V* είναι το $B_1=\{(-1,1,0),(1,0,1)\}$ καθώς από την τελευταία σχέση έχουμε άμεσα την γραμμική ανεξαρτησία του B_1. Η διάσταση είναι 2.

ii) Παρόμοια μία βάση του *W* είναι το σύνολο $\{(-2,1,0),(-2,0,1)\}$ και η διάσταση του *W* είναι 2.

iii) Για την τομή: $W\cap V=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x+y-z=0 \; \kappa\alpha\iota \; x+2y+2z=0\}$. Μία βάση βρίσκεται από την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα συντελεστών του γραμμικού ομογενούς συστήματος που ορίζει τα στοιχεία της τομής: $\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&3\end{pmatrix}$ και είναι $\{(4,-3,1)\}$. Η διάσταση είναι 1. Επειδή $\dim(W+V)=\dim W+\dim V-\dim(W\cap V)=2+2-1=3$, $W+V=\mathbf{R}^3$ επειδή όμως $W\cap V\neq\{0\}$ δεν είναι ευθύ το άθροισμα.

1β)

i) Τα διανύσματα που παράγουν τον *U*, $u_1=(1,-1,1,-1)$, $u_2=(1,0,1,0)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα καθώς $x(1,-1,1,-1)+y(1,0,1,0)=(0,0,0,0)\Leftrightarrow(x+y,-x,x+y,-x)=(0,0,0,0)\Leftrightarrow x=y=0$. Συνεπώς μια βάση του *U* είναι το σύνολο $\{u_1,u_2\}$.

ii) Στην βάση $\{u_1,u_2\}$ εφαρμόζουμε τη μέθοδο Gram-Schmidt (τυπολόγιο) και βρίσκουμε μία ορθογώνια βάση ως εξής (χρησιμοποιούμε ότι $\langle u_2,u_1\rangle=2$ και)$\langle u_1,u_1\rangle=4$:

$v_1=u_1=(1,-1,1,-1),\quad v_2=u_2-\dfrac{\langle u_2,v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1=(1,0,1,0)-\dfrac{2}{4}(1,-1,1,-1)=\dfrac{1}{2}(1,1,1,1)$ και διαιρώντας με τα μέτρα

$b_1=\dfrac{v_1}{\|v_1\|}=\dfrac{1}{2}(1,-1,1,-1),\quad b_2=\dfrac{v_2}{\|v_2\|}=\dfrac{1}{2}(1,1,1,1)$, έχουμε μία ορθοκανονική βάση του *U*: $B=\{b_1,b_2\}$.

iii) Για την ορθή προβολή u, του $w=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ στον *U*, έχουμε: $<w,b_1>=\dfrac{1}{2}(x_1-x_2+x_3-x_4)\equiv s_1$,

$<w,b_2>=\dfrac{1}{2}(x_1+x_2+x_3+x_4)\equiv s_2$, οπότε $u=s_1b_1+s_2b_2=\dfrac{s_1}{2}(1,-1,1,-1)+\dfrac{s_2}{2}(1,1,1,1)$

$=\left(\dfrac{s_1+s_2}{2},\dfrac{-s_1+s_2}{2},\dfrac{s_1+s_2}{2},\dfrac{-s_1+s_2}{2}\right)\qquad=\dfrac{1}{2}\left(x_1+x_3,x_2+x_4,x_1+x_3,x_2+x_4\right).$

Θέμα 2

2α) (10μ.) Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό $f(x,y,z)=(x-y+z,\ 2x+y+z,\ x+2y)$ του $\mathbf{R^3}$.

i) Γράψτε τον πίνακα αναπαράστασης **Α** του *f* **,** ως προς την συνήθη βάση του $\mathbf{R^3}$.

ii) Βρείτε βάση και διάσταση για τον πυρήνα Ker*f* και την εικόνα Im*f*.

iii) Βρείτε την τιμή της ορίζουσας του πίνακα **Α**.

iv) Ισχύει ότι $\mathbf{R^3}$ = Ker*f* ⊕ Im*f* **;**

2β) (10μ.) Δίνεται ο πίνακας $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1/2 & 1\\ 1/2 & 0\end{pmatrix}$.

i) Βρείτε διαγώνιο πίνακα Δ και αντιστρέψιμο πίνακα Ρ ώστε Α= Ρ Δ $Ρ^{-1}$**.**

ii) Βρείτε τον $\mathbf{A}^n$ για κάθε φυσικό αριθμό *n*.

iii) Ποιά είναι τα όρια των ακολουθιών των στοιχείων του πίνακα $\mathbf{A}^n$ καθώς $n\to\infty$ **;**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

2α)

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$. Βρίσκουμε την ΑΚΜ: $\mathbf{A}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1/3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 2/3\\ 0 & 1 & -1/3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Από την ΑΚΜ του **Α** έχουμε:

Αφού για τις λύσεις του συστήματος ΑΧ=0 έχουμε Χ = (-2 *z*/3 *z* /3 *z*)^T = *z* (-2 1 3)^T/3, μία βάση για τον πυρήνα Ker*f* είναι το μονοσύνολο { (-2 , 1, 3)} και dim Ker*f* =1,

Αφού τα οδηγά στοιχεία στην ΑΚΜ του Α βρίσκονται στην 1η και 2η στήλη, μία βάση για την εικόνα Im*f* : είναι { (1 , 2, 1), (-1 , 1, 2) } και dim Im*f* =2.

Καθώς ο πυρήνας είναι μη μηδενικός, η ορίζουσα του Α είναι μηδέν.

Γνωρίζουμε (και άμεσα επαληθεύουμε) ότι dim$\mathbf{R^3}$ = dim Ker*f* + dim Im*f*. Καθώς ο πυρήνας είναι μονοδιάστατος για να ισχύει ότι $\mathbf{R^3}$ = Ker*f* ⊕ Im*f* πρέπει και αρκεί το στοιχείο της παραπάνω βάσης του πυρήνα, (-2 , 1, 3), να μην ανήκει στην Im*f*. Από την ΑΚΜ του πίνακα με δύο πρώτες στήλες τις συντεταγμένες των στοιχείων της βάσης της εικόνας και τρίτη στήλη τις συντεταγμένες του στοιχείου της βάσης του πυρήνα

$\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 3 & 5\\ 0 & 3 & 5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ συμπεραίνουμε ότι η παραπάνω βάση του πυρήνα περιέχεται στην εικόνα. Συνεπώς ο πυρήνας είναι υπόχωρος της εικόνας και ο $\mathbf{R^3}$ δεν γράφεται ως ευθύ άθροισμα του πυρήνα και της εικόνας της *f*.

2β)

i) Για τον πίνακα $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1/2 & 1\\ 1/2 & 0\end{pmatrix}$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$\det\begin{pmatrix}1/2-\lambda & 1\\ 1/2 & -\lambda\end{pmatrix}=(1/2-\lambda)(-\lambda)-1/2=\lambda^2-\lambda/2-1/2=(\lambda-1)(\lambda+1/2)$, με ρίζες (ιδιοτιμές του Α): 1, -1/2 .

Για λ= 1: Α– Ι = $\begin{pmatrix}1/2-1 & 1\\ 1/2 & -1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-1/2 & 1\\ 1/2 & -1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, βάση ιδιοχώρου $\left\{\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\right\}$.

Για την ιδιοτιμή λ= -1/2: Α+Ι/2= $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ (ήδη σε ΑΚΜ), βάση ιδιοχώρου $\left\{\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\right\}$.

Για τις δυνάμεις A^n καθώς $A=P\Delta P^{-1}$ με $P=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $\Delta=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}$,

$$A^n=P\Delta^nP^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^n & 0\\ 0 & (-1/2)^n\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -(-1/2)^n\\ 1 & (-1/2)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=$$

$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2+(-1/2)^n & 2-2(-1/2)^n\\ 1-(-1/2)^n & 1+2(-1/2)^n\end{pmatrix}$ που, όταν θεωρήσουμε τα όρια των στοιχείων, καθώς *n* τείνει στο άπειρο, τείνει στον πίνακα $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Θέμα 3

3α) (8μ.) Υπολογίστε τα όρια των επόμενων ακολουθιών (ενδεχομένως με χρήση κανόνα L'Hôpital για το όριο της αντίστοιχης πραγματικής συνάρτησης):

(i) $a_n = \left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^n$, (ii) $b_n = \dfrac{n}{2^n}$, (iii) $c_n = \dfrac{1+n\sqrt{n}}{20+n^2}$, (iv) $d_n = \dfrac{n+\ln n}{1+n^2}$.

3β) (12μ.) Εξετάστε τη σύγκλιση των παρακάτω σειρών (για κάθε τιμή του πραγματικού *x*, σε περίπτωση δυναμοσειράς):

(i) $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{nx^n}{5^n}$, (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, (iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2\sqrt{n}+n+1}$, (iv) $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{n}\right)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

3α)

(i) $$\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{e^3}{e} = e^2 ,$$

(ii) Ακολουθία θετικών όρων. $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \dfrac{n+1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{2} < 1$, άρα η b_n είναι μηδενική.

(iii) $$c_n = \frac{1+n\sqrt{n}}{20+n^2} = \frac{n\sqrt{n}(1+\frac{1}{n\sqrt{n}})}{n^2\left(\frac{20}{n^2}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{(1+\frac{1}{n\sqrt{n}})}{\left(\frac{20}{n^2}+1\right)} \longrightarrow 0 ,$$

(iv) $d_n = \dfrac{n+\ln n}{1+n^2}$, Επειδή $\dfrac{\left(x+\ln x\right)'}{\left(1+x^2\right)'} = \dfrac{1+\frac{1}{x}}{2x} = \dfrac{1}{x}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, από τον κανόνα L' Hôpital έχουμε: $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x+\ln x}{1+x^2} = 0$, άρα και $\lim d_n = 0$.

3β) (i) $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{nx^n}{5^n}$, Με κριτήριο λόγου $\left|\dfrac{\frac{(n+1)x^{n+1}}{5^{n+1}}}{\frac{nx^n}{5^n}}\right| = \dfrac{(n+1)|x|}{5n} = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)|x|}{5} \longrightarrow \dfrac{|x|}{5}$, έχουμε ότι η σειρά συγκλίνει για $\dfrac{|x|}{5} < 1$ δηλαδή $|x| < 5$ και αποκλίνει για $|x|>5$. Αρα συγκλίνει για όλα τα *x* στο ανοικτό διάστημα

(-5,5) και αποκλίνει για όλα τα *x* στα διαστήματα (- ∞, 5) και (5, + ∞).

Εξετάζουμε στα άκρα του διαστήματος

[-5 5,]: αν *x*=5 τότε η σειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{+\infty} n$ και αποκλίνει (απειρίζεται θετικά) και αν *x* =5 τότε η σειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n$ και αποκλίνει (ταλαντώνεται). Τελικό συμπέρασμα: συγκλίνει για *x στο* διάστημα (-5,5) και αποκλίνει παντού αλλού.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$, εναλλάσσουσα σειρά.

Η ακολουθία $\frac{1}{\sqrt{n}}$ είναι φθίνουσα αφού $0 < n < n+1 \Rightarrow 0 < \sqrt{n} < \sqrt{n+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$. Επιπλέον $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Αρα εφαρμόζοντας το κριτήριο Leibnitz, η σειρά συγκλίνει.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2\sqrt{n}+n+1}$ είναι σειρά θετικών όρων. Ο γενικός όρος $\frac{n}{n^2\sqrt{n}+n+1}$ συγκρίνεται με τον $\frac{n}{n^2\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$:

έχουμε $\dfrac{\frac{n}{n^2\sqrt{n}+n+1}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{n^{5/2}}{n^{5/2}+n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n^{3/2}}+\frac{1}{n^{5/2}}} \longrightarrow 1 \neq 0$. Αρα από κριτήριο σύγκρισης, αφού η σειρά $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ συγκλίνει ως *p*-σειρά με *p*>1, η αρχική σειρά συγκλίνει.

(iv) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{n} \right)$: η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ συγκλίνει ως γεωμετρική με λόγο ½. . Η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει (αρμονική , ή *p*-σειρά με *p*=1). Άρα η αρχική αποκλίνει.

Θέμα 4

4α) (12μ.) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=6x^5-5x^6$.

i) Υπολογίστε τις παραγώγους $1^{ης}$, και $2^{ης}$ τάξης της f και βρείτε τα διαστήματα όπου διατηρούν πρόσημο.

ii) Βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f: είναι αύξουσα, είναι φθίνουσα, στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

iii) Βρείτε όλα τα σημεία: μηδενισμού, ακροτάτων τιμών (τοπικών, ολικών), καμπής της f.

iv) Βρείτε τα όρια $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ και το σύνολο τιμών της *f*.

v) Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x)=\dfrac{1}{3}$ έχει ακριβώς μία (πραγματική) λύση στο διάστημα [0, 1].

(<u>Σημείωση:</u> δεν ζητείται εύρεση της λύσης αυτής).

4β) (8μ.) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int_0^{\pi} x\sin(n\,x)\,dx$, για κάθε φυσικό $n\geq 1$.

ii) $\int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2}\,dx$.

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>

4α)

i) Υπολογίζουμε τις παραγώγους της $f(x)=6x^5-5x^6$: $f'(x)=30x^4-30x^5$, $f''(x)=120x^3-150x^4$ και παραγοντοποιούμε για να προσδιορίσουμε σημεία μηδενισμού και πρόσημα:

$$f(x)=x^5(6-5x),\quad f'(x)=30x^4(1-x),\quad f''(x)=30x^3(4-5x).$$

Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$		0		4/5		1		6/5		$+\infty$
$1-x$		+		+		+	0	–	–	–	
x^5		–	0	+		+		+	+	+	
x^4		+	0	+		+		+	+	+	
x^3		–	0	+		+		+	+	+	
$6-5x$		+		+		+		+	0	–	
$4-5x$		+		+	0		–	–		–	
f'		+	0	+		+	0	–	–	–	
f''		–	0	+		–	0	–	–	–	
f	$-\infty$	–	0 σ.κ.	+	σ.κ.	+	$f(1)=1$ τ.μ.	+	0	–	$-\infty$

από τον οποίο συμπεραίνουμε ότι:

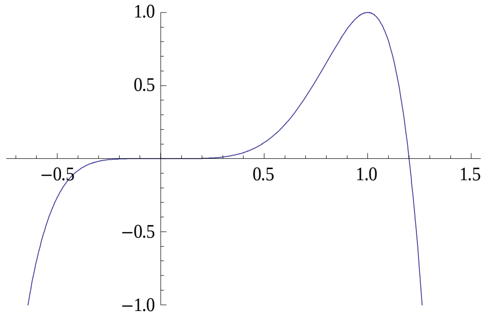
ii) η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$, στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο διάστημα [0, 4/5] και στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[4/5, +\infty)$,

iii) η f μηδενίζεται στα σημεία 0 και 6/5, παίρνει ολικό (και τοπικό). μέγιστο την τιμή 1 στο 1 και παρουσιάζει σημεία καμπής για $x = 0$ και $x = 4/5$,

iv) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^6(\dfrac{6}{x}-5)=(+\infty)(-5)=-\infty$. Παρόμοια $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-+\infty} x^6(\dfrac{6}{x}-5)=.$

$=(+\infty)(-5)=-\infty$. Από τα όρια αυτά την συνέχεια της f της παραπάνω μονοτονίας και του ολικού μεγίστου, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της *f* είναι το διάστημα $(-\infty, 1]$.

v) Στο διάστημα [0,1] η f, ως γνησίως αύξουσα, είναι 1-1. Αρα αν υπάρχει λύση της εξίσωσης, αυτή θα είναι μοναδική. Επιπλέον *f*(0)=0 και *f*(0)=1 οπότε λόγω συνεχείας και καθώς 0 < 1/3 <1, υπάρχει x στο διάστημα (0,1) όπου η f παίρνει την τιμή 1/3. Ετσι συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{3}$ έχει μοναδική λύση μεταξύ 0 και 1.



4β)

i)

$$\int x\sin(nx)\,dx=\int x\left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right)'dx=-\frac{x\cos(nx)}{n}-\int x'\left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right)dx=-\frac{x\cos(nx)}{n}+\frac{1}{n}\int \cos(nx)\,dx$$

$=-\frac{x\cos(nx)}{n}+\frac{\sin(nx)}{n^2}$. Αρα για το ζητούμενο ορισμένο ολοκλήρωμα ΄χουμε

$$\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx=\left(-\frac{x\cos(nx)}{n}+\frac{\sin(nx)}{n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=-\frac{\pi\cos(n\pi)}{n}+\frac{\sin(n\pi)}{n^2}-(0)=-\frac{\pi(-1)^n}{n}.$$

ii) Το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x\,e^{-x^2}\,dx$ με την αντικατάσταση για $x\in[0,+\infty)$, $u=x^2,\ du=2xdx$, υπολογίζεται ως εξής: $\int x\,e^{-x^2}\,dx=\int e^{-u}\,\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{-u}\,du=-\frac{1}{2}e^{-u}+C=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$.

Οπότε

$$\int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2}\,dx=\lim_{a\to+\infty}\int_0^{a} x\,e^{-x^2}\,dx=\frac{-1}{2}\lim_{a\to+\infty}\left(e^{-x^2}\right)\Big|_0^{a}=\frac{-1}{2}\lim_{a\to+\infty}\left(e^{-a^2}-e^{-0}\right)$$

$$=\frac{-1}{2}\left(\lim_{a\to+\infty}e^{-a^2}-1\right)=\frac{-1}{2}(0-1)=\frac{1}{2}.$$

Θέμα 5

5α) (6μ.) Δύο μηχανές **Α**, **Β** παράγουν τα ίδια προϊόντα. Οι παραγόμενες ποσότητες προϊόντων είναι ίσες για τις δύο μηχανές. Είναι όμως γνωστό από προηγούμενη πείρα, ότι το 2% της παράγωγής της **Α** είναι ελαττωματικά προϊόντα ενώ το αντίστοιχο ποσοστό για την **Β** είναι 5%.
Αν πάρουμε ένα προϊόν με τυχαίο τρόπο, να βρεθεί η πιθανότητα:

i) να είναι ελαττωματικό,

ii) να προέρχεται από την **Α**, αν γνωρίζουμε ότι είναι ελαττωματικό.

5β) (14 μονάδες) Ο χρόνος ζωής σε έτη μιας μηχανής ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 20 έτη και τυπική απόκλιση 2 έτη.

i) Ποιά η πιθανότητα η διάρκεια ζωής να είναι μεταξύ 18 ετών και 22 ετών ;

ii) Ποιά η πιθανότητα η διάρκεια ζωής να είναι τουλάχιστον 15 έτη ;

iii) Ποιά είναι η τιμή q ώστε το γεγονός «η διάρκεια ζωής μιας μηχανής υπερβαίνει την τιμή q» έχει πιθανότητα ίση προς 0.9 ;

iv) Ποιά είναι η πιθανότητα από 4 μηχανές οι 2 το πολύ να έχουν διάρκεια ζωής τουλάχιστον 15 έτη;
(Σημείωση: δεν απαιτείται να υπολογίσετε το τελικό αριθμητικό αποτέλεσμα).

Δίνονται: Φ(1) = 0.8413, Φ(2.5) = 0.9938, Φ(1.28) = 0.9.

5α)

Συμβολισμός: E, το ενδεχόμενο ένα προϊόν να είναι ελαττωματικό,
A, το ενδεχόμενο ένα προϊόν να προέρχεται από την μηχανή **Α**,
B, το ενδεχόμενο ένα προϊόν να προέρχεται από την μηχανή **Β**.

Έχουμε $P(A)=0.5$, $P(B)=0.5$ και υπολογίζουμε:

1) Εχουμε την διαμέριση $E=(E\cap A)\cup(E\cap B)$ οπότε

$$P(E)=P(E\cap A)+P(E\cap B)=P(E/A)\cdot P(A)+P(E/B)\cdot P(B)=\frac{2}{100}\frac{5}{10}+\frac{5}{100}\frac{5}{10}=\frac{35}{1000}.$$

2) Για να βρούμε την πιθανότητα $P(A/E)$ εφαρμόζουμε τον τύπο του Bayes και έχουμε:

$$P(A/E)=\frac{P(E/A)\cdot P(A)}{P(E)}=\frac{(0.02)\cdot(0.5)}{0.035}=\frac{10}{35}.$$

5β) Σύμφωνα με την εκφώνηση, ο χρόνος ζωής σε έτη της μηχανής είναι μια τυχαία μεταβλητή X η οποία ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu=20$ και $\sigma=2$. Συνεπώς, η τυποποιημένη τυχαία μεταβλητή $Z=\dfrac{X-20}{2}$ ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$:

i) Η πιθανότητα ώστε η διάρκεια ζωής μιας μηχανής να είναι μεταξύ 18 έτη και 22 έτη είναι

$$P(18\le X\le 22)=P\left(\frac{18-20}{2}\le\frac{X-20}{2}\le\frac{22-20}{2}\right)=P(-1\le Z\le 1)=$$

$$=\Phi(1)-\Phi(-1)=\Phi(1)-[1-\Phi(1)]=2\cdot\Phi(1)-1=2\cdot 0.8413-1=1.6826-1=0.6826.$$

ii) Η πιθανότητα ώστε η διάρκεια ζωής μιας μηχανής να είναι τουλάχιστον 15 έτη είναι

$$P(X\ge 15)=P\left(\frac{X-20}{2}\ge\frac{15-20}{2}\right)=P(Z\ge -2.5)=1-P(Z<-2.5)=$$

$$=1-[1-P(Z<2.5)]=P(Z<2.5)=\Phi(2.5)=0.9938.$$

iii) Η πιθανότητα ώστε η διάρκεια ζωής μιας μηχανής να υπερβεί τα q έτη είναι

$$P(X>q)=P\left(\frac{X-20}{2}>\frac{q-20}{2}\right)=P\left(Z>\frac{q-20}{2}\right)=1-P\left(Z\le\frac{q-20}{2}\right)=1-\Phi\left(\frac{q-20}{2}\right).$$

Θέλουμε $P(X>q)=0.9$, δηλαδή $1-\Phi\left(\dfrac{q-20}{2}\right)=0.9\Leftrightarrow\Phi\left(\dfrac{q-20}{2}\right)=0.1$, το οποίο ισοδύναμα δίνει

$$\Phi\left(-\frac{q-20}{2}\right)=0.9\Leftrightarrow\Phi\left(-\frac{q-20}{2}\right)=\Phi(1.28)\Leftrightarrow-\frac{q-20}{2}=1.28\Leftrightarrow -q+20=2.56\Leftrightarrow q=17.44$$

iv) Εστω Y ο αριθμός των μηχανών (από τις 4) οι οποίες θα έχουν διάρκεια ζωής τουλάχιστον 15 έτη. Τότε, η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με $n=4$ δοκιμές (συσκευές), πιθανότητα επιτυχίας (να έχουν διάρκεια ζωής τουλάχιστον 15 έτη) $p = P(X \geq 15) = 0.9938$ (ερώτημα **ii**) και πιθανότητα αποτυχίας $q = 1-p$. Δηλαδή $Y \sim B(n,p) = B(4, 0.9938)$. Έτσι, για $k = 0,1,2,3,4$

$P(Y=k) = \binom{4}{k} p^k q^{4-k} = \binom{4}{k} p^k (1-p)^{4-k}$. Η πιθανότητα να έχουμε το πολύ 2 επιτυχίες σε 4 δοκιμές

ισούται προς

$$P(Y \leq 2) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) = \binom{4}{0} p^0 \cdot (1-p)^{4-0} + \binom{4}{1} p^1 \cdot (1-p)^{4-1} + \binom{4}{2} p^2 \cdot (1-p)^{4-2}.$$

---------ΤΕΛΟΣ---------

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Ο **ανάστροφος** πίνακας ενός $m\times n$ πίνακα $A=[a_{ij}]$ σημειώνεται με $A^T=[a_{ji}]$, (δηλαδή, οι γραμμές γίνονται στήλες και αντίστροφα).

<u>Ιδιότητες:</u> • $(A^T)^T=A$ • $(A+B)^T=A^T+B^T$

• $(\lambda A)^T=\lambda A^T$, $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$ • $(AB)^T=B^TA^T$

Ένας $m\times n$ πίνακας $A=[a_{ij}]$ ονομάζεται **συμμετρικός** όταν ισχύει $a_{ij}=a_{ji}$ δηλ. $A^T=A$

Ο **αντίστροφος** ενός $n\times n$ τετραγωνικού πίνακα $A=[a_{ij}]$ (όταν υπάρχει) συμβολίζεται με A^{-1} και ισχύει $AA^{-1}=AA^{-1}=I_n$.

<u>Ιδιότητες:</u> Αν *A*, *B* αντιστρέψιμοι *n*×*n* πίνακες

• $(A^{-1})^{-1}=A$ • $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

• $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ • $(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k\ \ \forall\ k\in\mathbb{Z}$

Ανάπτυγμα Laplace της ορίζουσας τετραγωνικού πίνακα $A=[a_{ij}]$ ως προς την i γραμμή ή την j στήλη: $\det(A)=|A|=$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\quad \text{όπου}$$

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ και M_{ij} η ελάσσων ορίζουσα του *ij*-στοιχείου.

<u>Ιδιότητες</u> ορίζουσας ενός $n\times n$ πίνακα A:

- $\det(A^T)=\det(A)$
- $\det(\lambda A)=\lambda^n\det(A)$, $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$
- $\det(AB)=\det(A)\det(B)$
- $\det(A^k)=\left[\det(A)\right]^k$, $\forall\ k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$
- A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow$ $\det(A)\neq 0$

τότε $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}adj(A)$

όπου $adj(A)$ ο ανάστροφος του πίνακα με στοιχεία τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων του A.

* * * * * * * * * * * * *

• Ένα μη κενό υποσύνολο U του πραγματικού διανυσματικού χώρου V είναι **υπόχωρος** του δ.χ. V αν και μόνο αν $\forall\ k,\lambda\in\mathbb{R}$ και $\forall\ \boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\in U$ ισχύει $k\,\boldsymbol{u}_1+\lambda\,\boldsymbol{u}_2\in U$.

• Τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** όταν

$\lambda_1\boldsymbol{v}_1+\lambda_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{0}\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_k=0.$

• Ένα σύνολο $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k\}$ του δ.χ. V είναι μία **βάση** του V αν και μόνο αν

I. τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

II. Ο δ.χ. V παράγεται από τα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k$

και τότε η **διάσταση** του V είναι $\dim V=k$.

• **Αν** *B*={ $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_k$ } (διατεταγμένη) βάση του V *και* $x\in V$, τότε $x=\sum_{i=1}^{k}a_iu_i$, με μοναδικά $a_i\in\mathbb{R}$. Η στήλη $[a_1\ a_2\ldots\ a_k]^T$ λέγεται *στήλη συντεταγμένων του* x ως προς την Β *και* συμβολίζεται με $[x]_B$.

• Έστω V ένας πεπερασμένης διάστασης δ.χ. και U,W υπόχωροι του V. Τότε ισχύει:

$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$

• Για το **ευθύ άθροισμα** των υποχώρων $U,W\subseteq V$ του δ.χ. V ισχύει $V=U\oplus W$ $\Leftrightarrow$

($V=U+W$ και $U\cap W=\{\boldsymbol{0}\}$) $\Leftrightarrow$

($V=U+W$ και $\dim V=\dim U+\dim W$).

* * * * * * * * * * * * *

Εσωτερικό γινόμενο Ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\boldsymbol{R^n}$ είναι μία συνάρτηση που σε κάθε ζεύγος $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\boldsymbol{R^n}\times\boldsymbol{R^n}$, αντιστοιχεί ένα πραγματικό αριθμό $\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}$ με τις ιδιότητες:

I. $(k\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y})\circ\boldsymbol{z}=k(\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{z})+\lambda(\boldsymbol{y}\circ\boldsymbol{z})$,

$\forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n$, $\forall\ k,\lambda\in\mathbb{R}$

II. $\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}\circ\boldsymbol{x}$, $\forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$

III. $\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{x}\geq 0$ **και** $\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{x}=0\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

• Το **μέτρο** του διανύσματος $\boldsymbol{x}$ ορίζεται από τον τύπο $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{x}}$.

• Η **γωνία** $\omega\in[0,\pi]$ των $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n\backslash\{\boldsymbol{0}\}$ ορίζεται από τον τύπο: $\cos\omega=\dfrac{\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|}$.

Τα διανύσματα $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ λέγονται **κάθετα (ή ορθογώνια)** αν και μόνο αν $\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}=0$.

Για το εσωτερικό γινόμενο και το μέτρο των διανυσμάτων $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ ισχύουν οι ιδιότητες:

I. $\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}=0\Leftrightarrow\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2$

II. $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$

III. $\|\lambda\boldsymbol{x}\|=|\lambda|\|\boldsymbol{x}\|$, $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$

IV. $|\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}|\leq\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|$ (**Cauchy-Schwarz**)

• **Προβολή** $\boldsymbol{p}$ διανύσματος $\boldsymbol{x}$ στη διεύθυνση του $\boldsymbol{y}$ είναι $\boldsymbol{p}=\dfrac{\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|^2}\boldsymbol{y}.$

• Το **ορθογώνιο συμπλήρωμα** ενός υπόχωρου $E\subseteq\mathbb{R}^n$ είναι ο υπόχωρος $E^{\perp}=\left\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n:\ \boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}=0,\ \forall\ \boldsymbol{x}\in E\right\}$. Επιπλέον, $E\oplus E^{\perp}=\mathbb{R}^n$, $(E^{\perp})^{\perp}=E$.

• Μία βάση $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_k\in\mathbb{R}^n$ ονομάζεται ορθοκανονική αν και μόνο αν τα διανύσματα είναι ανά δύο κάθετα και μοναδιαία (δηλ. $\boldsymbol{u}_i\circ\boldsymbol{u}_j=0$ για $i\neq j$, και $\|\boldsymbol{u}_i\|=1$).

• Αν $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$, τα διανύσματα

$\boldsymbol{\eta}_1=\xi_1$ και

$$\boldsymbol{\eta}_j=\xi_j-\frac{\xi_j\circ\boldsymbol{\eta}_1}{\boldsymbol{\eta}_1\circ\boldsymbol{\eta}_1}\boldsymbol{\eta}_1-\frac{\xi_j\circ\boldsymbol{\eta}_2}{\boldsymbol{\eta}_2\circ\boldsymbol{\eta}_2}\boldsymbol{\eta}_2-\cdots-\frac{\xi_j\circ\boldsymbol{\eta}_{j-1}}{\boldsymbol{\eta}_{j-1}\circ\boldsymbol{\eta}_{j-1}}\boldsymbol{\eta}_{j-1}$$

για $j=2,3,\ldots,n$

είναι κάθετα μεταξύ τους, τα δε διανύσματα

$$\boldsymbol{u}_1=\frac{\boldsymbol{\eta}_1}{\|\boldsymbol{\eta}_1\|},\quad \boldsymbol{u}_2=\frac{\boldsymbol{\eta}_2}{\|\boldsymbol{\eta}_2\|},\quad \ldots,\boldsymbol{u}_n=\frac{\boldsymbol{\eta}_n}{\|\boldsymbol{\eta}_n\|}$$

αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

• Ο πραγματικός $n\times n$ πίνακας A με την ιδιότητα $A\,A^T=A^TA=I$, ή ισοδύναμα $A^{-1}=A^T$, ονομάζεται **ορθογώνιος**.

Αν A ορθογώνιος, τότε ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο ισχύουν:

I. Οι στήλες του (και οι γραμμές του) αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\boldsymbol{R^n}$,

II. $|\det A|=1,$

III. $\|A\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{x}\|,$

IV. $A\boldsymbol{x}\circ A\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{y}$

V. Αντίστροφος ορθογωνίου και γινόμενο ορθογώνιων πινάκων είναι ορθογώνιος πίνακας.

* * * * * * * * * * * * *

Γραμμικές απεικονίσεις (μετασχηματισμοί)

Μία απεικόνιση $f:U\to V$ (U,V πραγματικοί διανυσματικοί χώροι) ονομάζεται **γραμμική** όταν $f(k\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y})=k\,f(\boldsymbol{x})+\lambda\,f(\boldsymbol{y})$, $\forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in U$ και $\forall\ k,\lambda\in\mathbb{R}$. (Αν $U=V$ λέγεται και **γραμ. μετασχηματισμός** του U). Το σύνολο $\ker f=\{\boldsymbol{x}\in U:\ f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}\subseteq U$ ονομάζεται **πυρήνας** της f και είναι υπόχωρος του U .

Το σύνολο $\operatorname{Im} f=\{\boldsymbol{y}\in V:\ f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}\in U\}\subseteq V$ λέγεται **εικόνα** της f και είναι υπόχωρος του V .

Η $f:U\to V$ λέγεται **ένα-προς-ένα** (1-1) αν $\forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in U$ $\quad f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{y})\Rightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$.

Η $f:U\to V$ λέγεται **επί** αν $f(U)=V$.

• Για τη γραμμική απεικόνιση $f:U\to V$ ισχύουν:

I. $\dim U=\dim\ker f+\dim\operatorname{Im} f$

II. Η f είναι 1-1 αν και μόνο αν $\ker f=\{\boldsymbol{0}\}$.

III. Αν B₁={ $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n$ } διατεταγμένη βάση του U και B₂={ $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_m$ } διατεταγμένη βάση του V , από τις ισότητες

$f(\boldsymbol{u}_1)=a_{11}\boldsymbol{v}_1+a_{21}\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_{m1}\boldsymbol{v}_m$

$f(\boldsymbol{u}_2)=a_{12}\boldsymbol{v}_1+a_{22}\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_{m2}\boldsymbol{v}_m$

$\vdots$

$f(\boldsymbol{u}_n)=a_{1n}\boldsymbol{v}_1+a_{2n}\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{v}_m$

ορίζεται ο $m\times n$ πίνακας **αναπαράστασης** της f

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},$$

και $A\left[\boldsymbol{x}\right]_{B_1}=\left[f(\boldsymbol{x})\right]_{B_2}$, για κάθε $\boldsymbol{x}\in U$.

• Αν για τους διανυσματικούς χώρους ισχύει $\dim U=\dim V=n$, τότε για τη γραμμική απεικόνιση $f:U\to V$ οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.

I. f αντιστρέψιμη (υπάρχει η f^{-1})

II. f είναι 1-1

III. $\ker f=\{\boldsymbol{0}\}$

IV. f είναι επί

* * * * * * * * * * * * *

Ιδιοτιμές – Ιδιοδιανύσματα πίνακα

Για έναν $n\times n$ πίνακα A οι **ιδιοτιμές** λ_i του πίνακα είναι οι n ρίζες του **χαρακτηριστικού πολυωνύμου**

$$p(\lambda)=\det\begin{bmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&\cdots&-a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-a_{n1}&-a_{n2}&\cdots&\lambda-a_{nn}\end{bmatrix}$$

$$=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$$

Αν ο A είναι τριγωνικός ή διαγώνιος, τότε οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια στοιχεία του.

Για κάθε ιδιοτιμή λ_i , $i=1,2,\ldots,n$, τα αντί-στοιχα **ιδιοδιανύσματα** είναι οι μη-μηδενικές λύσεις $\boldsymbol{x}=\left[x_1\ x_2\ \ldots\ x_n\right]^T$ του ομογενούς συστήματος

$$\begin{aligned}(a_{11}-\lambda_i)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=0\\a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda_i)x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=0\\&\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda_i)x_n&=0\end{aligned}$$

• Για τις ιδιοτιμές του A ισχύουν:

$\det A=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_n=(-1)^na_0$

και $\quad trA=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=-a_{n-1}$,

όπου a_0,a_{n-1} οι αντίστοιχοι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(\lambda)$.

Αν λ_i ιδιοτιμή και $\boldsymbol{x}_i$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του A , τότε λ_i^k , $\boldsymbol{x}_i$ είναι **ιδιοποσά** του A^k .

Οι ιδιοτιμές πραγματικού συμμετρικού πίνακα είναι αριθμοί πραγματικοί, τα δε ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα.

• Ο $n\times n$ πίνακας A λέγεται **διαγωνοποιήσιμος**, όταν είναι **όμοιος** με διαγώνιο πίνακα D , δηλ. όταν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος, ώστε $A=PDP^{-1}$. Ο διαγώνιος πίνακας D έχει διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του A και ο P είναι πίνακας με στήλες αντίστοιχα ιδιο-διανύσματα που αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^n$.

• Ο πίνακας *A* διαγωνοποιείται όταν:

• Για κάθε ιδιοτιμή αλγεβρικής πολλαπλότητας *k* υπάρχουν ακριβώς *k* γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, ή, αλλιώς, η γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής ισούται με την αλγεβρική της πολλαπλότητα (<u>και αντιστρόφως</u>)

• Έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές .

• Είναι συμμετρικός πραγματικός. Τότε υπάρχει ορθογώνιος πίνακας Q , τέτοιος ώστε

$$A = Q\, diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)\, Q^T .$$

- Αν $f(\lambda)$ είναι πολυώνυμο, τότε

$$f(A) = P\, f(D)\, P^{-1} = P diag\big(f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)\big) P^{-1}$$

- Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A ισχύει

$$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = \mathbb{O} .$$

Αν $\upsilon(\lambda)$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $f(\lambda)$ δια του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(\lambda)$, τότε $f(A) = \upsilon(A)$.

* * * * * * * * * * * * *

Τετραγωνικές μορφές

Το πολυώνυμο των πραγματικών μεταβλητών $x_1, x_2, \dots, x_n$ της μορφής $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$, όπου $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$ και A $n \times n$ συμμετρικός πίνακας, ονομάζεται **τετραγωνική μορφή**. Αν $A = Qdiag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)Q^T$, τότε η $F(\boldsymbol{x})$ μετασχηματίζεται στη **διαγώνια μορφή**

$$F(\boldsymbol{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 ,$$

όπου $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}^T = Q^T \boldsymbol{x}$.

Αν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0\ (<0)$ η F λέγεται **θετικά (αρνητικά) ορισμένη**, αν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0\ (\leq 0)$ λέγεται **θετικά (αρνητικά) ημιορισμένη**, ενώ, σε κάθε άλλο συνδυασμό προσήμων των λ_i ονομάζεται **αόριστη**.

* * * * * * * * * * * * *

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $A \subseteq \mathbb{R}$

$$f : A \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y \qquad \text{ή} \qquad y = f(x),\ \ x \in A ,$$

Γραφική παράσταση συνάρτησης f

$$C_f = \{ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o\ M(x,y)\ \tau o\upsilon\ \varepsilon\pi / \delta o\upsilon\ xy : y = f(x) \}$$

- Συνάρτηση f **γνησίως αύξουσα** στο A
  $f(x_1) < f(x_2)$, $\forall\ x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$.
- Συνάρτηση f **γνησίως φθίνουσα** στο A
  $f(x_1) > f(x_2)$, $\forall\ x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$.
- **Άνω φραγμένη** συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$

Υπάρχει αριθμός s (άνω φράγμα της f) με την ιδιότητα: $f(x) \leq s$, $\forall\ x \in A$.

(Ανάλογα ορίζεται η κάτω φραγμένη).

Φραγμένη λέγεται η συνάρτηση αν είναι άνω και κάτω φραγμένη.

- 1-1 συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$,

ισοδύναμα: αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$.

Σύνθεση της $f : A \to \mathbb{R}$ με την $g : B \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$ για τα οποία $f(x) \in B$.

Αντίστροφη συνάρτηση μιας 1-1 συνάρτησης f είναι η $f^{-1} : f(A) \to A$, που αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο $y \in f(A)$ στο μοναδικό x, για το οποίο ισχύει $y = f(x)$, δηλ. $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

Όρια και συνέχεια συναρτήσεων

✓ *Όριο συνάρτησης στο* x_0 *- Πλευρικά όρια*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$$

✓ *Κριτήριο παρεμβολής*:

Αν $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

Η ιδιότητα αυτή ισχύει και στην περίπτωση που $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

✓ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

✓ *Συνέχεια*

Η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

* * * * * * * * * * * * *

Παράγωγος συνάρτησης ($A = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$)

Η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in A$ αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

Η εφαπτομένη ευθεία της C_f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

- Αν f είναι παραγωγίσιμη τότε f συνεχής
- Αν f δεν είναι συνεχής τότε f δεν είναι παραγωγίσιμη.

Ιδιότητες παραγώγων: Αν *f*, *g* παραγωγίσιμες

- $\big(cf(x)\big)' = c\big(f(x)\big)', \quad c \in \mathbb{R}$
- $\big(f(x) \pm g(x)\big)' = \big(f(x)\big)' \pm \big(g(x)\big)'$
- $\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \ g(x) \neq 0$
- Αν επιπλέον $f' \neq 0$ και f αντιστρέψιμη τότε η αντίστροφη f^{-1} είναι παραγωγίσιμη και

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f'},$$

- Η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης $f(g(x))$ είναι

$$\big(f(g(x))\big)' = \frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g)}{dg} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

Παράγωγοι συνήθων συναρτήσεων

$(c)' = 0, \quad c \in \mathbb{R}$	$\left(x^k\right)' = k\, x^{k-1}$, $k \in \mathbb{R}$
$(\sin x)' = \cos(x)$	$(\cos x)' = -\sin(x)$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(e^x)' = e^x$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$\left(a^x\right)' = \ln(a) \cdot a^x$, $a \neq 1 > 0$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$

Κανόνας l' Hospital

Πρώτη διατύπωση: Αν $f(a) = g(a) = 0$ και $f'(a), g'(a)$ υπάρχουν και $g'(a) \neq 0$, τότε

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Δεύτερη διατύπωση : Αν $f(x_0) = g(x_0) = 0$, με $f(x), g(x)$ διαφορίσιμες στο (a,b), και $g'(x) \neq 0$, εκτός πιθανώς του $x_0 \in (a,b)$,

τότε $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Ο κανόνας ξαναχρησιμοποιείται αν ισχύουν οι ίδιες συνθήκες και για τις παραγώγους των $f(x), g(x)$.

- Οι απροσδιόριστες μορφές $\dfrac{\pm\infty}{\mp\infty}, \ \infty - \infty, \ \infty \cdot 0$

μπορούν να μετατραπούν ως εξής

$$\infty / \infty : \ \frac{f}{g} = \frac{1/g}{1/f} \qquad 0 \times (\pm\infty) : \ fg = \frac{f}{1/g}$$

$$\infty - \infty : \ f - g = \frac{1/g - 1/f}{1/fg}$$

- Οι απροσδιόριστες μορφές $0^0, \ +\infty^0, \ 1^\infty$ μετατρέπονται με βάση τη σχέση

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a}(g(x)\ln f(x))}, \quad f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

Εφαρμογές των παραγώγων στην σχεδίαση της γραφικής παράστασης C_f της $f : A \to \mathbb{R}$.

✓ *Από <u>πρώτη παράγωγο</u>*

- Αν $f'(x) > 0, \ \forall x \in I \subseteq A$, τότε η f γνησίως αύξουσα.
- Αν $f'(x) < 0, \ \forall x \in I \subseteq A$, τότε η f γνησίως φθίνουσα.
- Αν $f'(x_0) = 0$, για κάποιο $x_0 \in A$ και υπάρχει ε>0 : $f'(x) > 0$, $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ και $f'(x) < 0$, $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$, τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου. Ανάλογα για σημείο τοπ. ελαχίστου.

✓ *Από <u>δεύτερη παράγωγο</u>*

- Αν $f''(x) > 0, \ \forall x \in I \subseteq A$, τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο διάστημα *I*.
- Αν $f''(x) < 0, \ \forall x \in I \subseteq A$, τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα *I*.
- Αν υπάρχει ε>0 με $f''(x) > 0$ για $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ και $f''(x) < 0$ για $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ (ή αντίστροφα), τότε το x_0 είναι σημείο καμπής.
- **α)** Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$, τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

β) Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$, τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου.

✓ *<u>Ασύμπτωτες</u>*

- *Κάθετη* ασύμπτωτη η ευθεία $x = a \in \mathbb{R}$, αν

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

- *Οριζόντια* ασύμπτωτη η ευθεία $y = b$, $b \in \mathbb{R}$, αν $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ ή $\lim_{x\to -\infty} f(x) = b$
- *Πλάγια ασύμπτωτη* της C_f στο $\pm\infty$ η ευθεία $y = ax + b$, αν $\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x) - ax - b\big) = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$$

* * * * * * * * * * * * *

Σημαντικά θεωρήματα

Έστω συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

✓ *Bolzano:* Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και $f(a) \cdot f(b) < 0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

✓ *Ενδιάμεσης τιμής:* Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και $f(a) \neq f(b)$, τότε, για κάθε αριθμό ρ μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \rho$.

✓ *Μέγιστης - ελάχιστης τιμής:* Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$. Επιπλέον υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a,b]$ έτσι ώστε $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, $\forall\, x \in [a,b]$.

✓ *Θεώρημα μέσης τιμής* (ΘΜΤ)*:* Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b), τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a,b)$

τέτοιο ώστε : $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$.

✓ *Rolle:* Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b), και $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi) = 0$.

✓ Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a,b), και $f'(x) = 0, \ \forall\ x \in (a,b)$, τότε $f(x) = c$.

✓ *Cauchy:* Αν οι $f(x), g(x)$ είναι ορισμένες και συνεχείς στο $[a,b]$, διαφορίσιμες στο (a,b) και $g'(x) \neq 0$, $\forall\, x \in (a,b)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $c \in (a,b)$: $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

✓ *Darboux:* Αν f παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ με $f'(a) > f'(b)$ και $c \in \mathbb{R}$ με $f'(b) < c < f'(a)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = c$. (παρόμοια, αν $f'(a) < f'(b)$).

Εφαρμογή του ΘΜΤ για την προσέγγιση ρίζας

Αν η εξίσωση $x = f(x)$ έχει ρίζα a, με f παραγωγίσιμη στο $[a-h, a+h]$, και $|f'(x)| < m < 1$, $\forall x \in [a-h, a+h]$, τότε για αυθαίρετο $x_0 \in [a-h, a+h]$ η ακολουθία $x_n = f(x_{n-1}),\quad n = 1, 2, ...$, συγκλίνει στη ρίζα a.

* * * * * * * * * * * * *

Ορισμένο ολοκλήρωμα

- Κάθε συνεχής f είναι ολοκληρώσιμη
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$
- ΘΜΤ: f συνεχής, τότε για κάποιο $\xi \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

Αόριστο ολοκλήρωμα ή αντιπαράγωγος (παράγουσα)

$$F(x) + c = \int f(x)dx \Leftrightarrow \left(F(x)+c\right)' = f(x)$$

Ιδιότητες

$$\int df(x) = f(x) + c$$

$$\int \left(c_1 f(x) + c_2 h(x)\right)dx = c_1\int f(x)dx + c_2\int h(x)dx$$

Μεθοδολογίες Ολοκλήρωσης

<u>Αντικατάσταση</u>

$x = g(t)$ **,** $\int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx$

<u>Παραγοντική Ολοκλήρωση</u>

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Πίνακας Ολοκληρωμάτων

- $\int k dx = kx + c$
- $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \in \mathbb{R} - \{-1\}$
- $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + c$
- $\int \cos x\, dx = \sin x + c$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\int \dfrac{a dx}{x^2+a^2} = \tan^{-1}(\dfrac{x}{a}) + c = arc\tan(\dfrac{x}{a}) + c$
- $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}(\dfrac{x}{a}) + c = arc\sin(\dfrac{x}{a}) + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \dfrac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + c$

Θεμελιώδη θεωρήματα Ολοκληρωτικού Λογισμού

I. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$ και F είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f, τότε $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

II. Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$, τότε $\dfrac{dF}{dx} = \dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

* * * * * * * * * * * * *

Γενικευμένα Ολοκληρώματα

(α' είδους) $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$

ή $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$

(β' είδους) $\int_a^{b^-} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$

(b ιδιόμορφο σημείο)

$$\int_{a^+}^b f(x)dx = \lim_{e\to0^+}\int_{a+e}^b f(x)dx$$

(a ιδιόμορφο σημείο)

(γ' είδους) = συνδυασμός α', β' είδους

$$\int_{a^+}^{b^-} f(x)dx = \lim_{e\to0^+}\int_{a+e}^c f(x)dx + \lim_{e\to0^+}\int_c^{b-e} f(x)dx$$

με $a < c < b$ (a, b ιδιόμορφα σημεία)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{a^-} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^c f(x)dx + \lim_{e\to0^+}\int_c^{a-e} f(x)dx$$

(a ιδιόμορφο σημείο)

$$\int_{a^+}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{e\to0^+}\int_{a+e}^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$$

(a ιδιόμορφο σημείο)

Εσωτερικό ιδιόμορφο σημείο $c \in (a,b)$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{e\to0^+}\int_a^{c-e} f(x)dx + \lim_{e\to0^+}\int_{c+e}^b f(x)dx$$

η πρωτεύουσα τιμή του Cauchy

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{e\to0^+}\left(\int_a^{c-e} f(x)dx + \int_{c+e}^b f(x)dx\right)$$

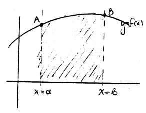
(c ιδιόμορφο σημείο)

Ο **μετασχηματισμός Laplace** μίας ολοκληρώσιμης συνάρτησης $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι $L\{f(t)\}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt$, για κάθε τιμή του x για την οποία το παραπάνω γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

* * * * * * * * * * * * *

Εφαρμογές Ολοκληρωμάτων

$$E = \int_a^b f(x)dx, \quad f(x) \ge 0$$

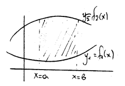


$$S = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx$$

$$E_{ox} = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx$$

$$V_{ox} = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

$$E = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx$$



$$V_{ox} = \pi\int_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right]dx$$

* * * * * * * * * * * * *

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ-ΣΕΙΡΕΣ

- **Ακολουθία** είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των θετικών ακέραιων αριθμών. Συμβολισμός: $a_n = a(n)$.

Πρόοδοι

<u>Αριθμητική</u>: $a_{n+1} = a_n + \omega$, $a_n = a_1 + (n-1)\cdot\omega$

<u>Άθροισμα n όρων α.π.</u>: $S_n = \dfrac{n\cdot[2a_1 + (n-1)\cdot\omega]}{2}$

<u>Γεωμετρική</u>: $a_{n+1} = \lambda a_n$ ή $a_n = \lambda^{n-1}\cdot a_1$

<u>Άθροισμα n πρώτων όρων γ.π.</u>: $S_n = a_1\dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$, $\lambda \ne 1$.

<u>Γεωμετρικός μέσος</u>: Αν a, b, c είναι 3 διαδοχικοί όροι γ.π. τότε $b^2 = a\cdot c$.

Σημαντικά όρια ακολουθιών

Το $x \in \mathbb{R}$ παραμένει σταθερό καθώς το $n \to \infty$ (στους τύπους που υπάρχει x)

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$	$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$	$\lim_{n\to\infty}x^n = 0,\ \lvert x\rvert < 1$
$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$	$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = \infty$	$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x} = 1,\ x > 0$

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$ **,** $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{n!} = 0$ **.**

Φραγμένες ακολουθίες

- *άνω φραγμένη*: υπάρχει $M \in \mathbb{R}$: $a_n \le M, \forall n \in \mathbb{N}$.
- *κάτω φραγμένη*: υπάρχει $m \in \mathbb{R}$: $m \le a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ **.**
- *Φραγμένη*: συγχρόνως άνω και κάτω φραγμένη, δηλ. υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}: m \le a_n \le M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

✓ Μια ακολουθία απολύτως φραγμένη είναι φραγμένη και αντιστρόφως.

✓ Μία φραγμένη ακολουθία δεν συγκλίνει κατ' ανάγκη.

Μονότονες ακολουθίες

Μία ακολουθία a_n, $n \in \mathbb{N}$ ονομάζεται

- **αύξουσα,** αν ισχύει $a_n \le a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- **φθίνουσα,** αν ισχύει $a_n \ge a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- **μονότονη,** αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

Μονότονες και φραγμένες ακολουθίες-Σύγκλιση

✓ Μία μονότονη ακολουθία δε συγκλίνει κατ' ανάγκη.

✓ Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα στο $\mathbb{R}$.

✓ Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

✓ Αν $\lim_{n\to\infty}\beta_n = 0$ και $|a_n| \le |\beta_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$ τότε $\lim_{n\to\infty}a_n = 0$.

✓ Αν $\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n| = \lambda < 1$, τότε $\lim_{n\to\infty}a_n = 0$.

* * * * * * * * * * * * *

Ειδικές Κατηγορίες Σειρών

α) Γεωμετρικές Σειρές: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$.

- αν $|r| < 1$: συγκλίνει. Άθροισμα: $\frac{1}{1-r}$,
- αν $r \ge 1$: απειρίζεται θετικά
- αν $r \le -1$: κυμαίνεται, το όριό της δεν υπάρχει.

β) p-Σειρές: $\varsigma(p) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$,

- αν $p > 1$: συγκλίνει • αν $p \le 1$: αποκλίνει

γ) Τηλεσκοπικές: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = b_n - b_{n+1}$

Συγκλίνει αν και μόνο αν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} b_n$.

Άθροισμα: $b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n$.

δ) Εναλλάσσουσες Σειρές: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, $a_n > 0$ ή $a_n < 0$ για όλα τα $n = 0,1,2,...$

ε) Αναπτύγματα Taylor: Αν η συνάρτηση f και οι πρώτες τις παράγωγοι $f^{(1)}, f^{(2)}, ..., f^{(n)}$ είναι συνεχείς στο $[a,b]$ και αν η $f^{(n)}$ είναι διαφορίσιμη στο (a,b), τότε για $\xi \in (a,x)$ ισχύει

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

όπου $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ είναι το υπόλοιπο της πολυωνυμικής προσέγγισης n-βαθμού.

Όταν $a = 0$, τότε το ανάπτυγμα ονομάζεται και ανάπτυγμα Maclaurin.

Συνήθεις σειρές Taylor ($a = 0$ **)**

για $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

και για $-1< x < 1$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

$$\arctan x = 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

ε) Σειρές Fourier: Έστω $f:[-L,L] \to \mathbb{R}$ που επεκτείνεται $2L$ –περιοδικά. Η σειρά Fourier της f δίνεται από

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L})$$

όπου $a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\ ,\ n = 1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\ ,\ n = 1,2,\ldots$$

Κριτήρια σύγκλισης σειρών

I. Αν $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **δεν** συγκλίνει.

II. **α)** Αν οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν, τότε για κάθε $k, \lambda \in \mathbb{R}$

$\sum_{n=0}^{\infty} (ka_n + \lambda b_n) = k\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

β) Αν $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ δεν συγκλίνει, τότε $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ δεν συγκλίνει.

III. Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

IV. (Απλό κριτήριο **σύγκρισης**) Έστω $0 \le a_n \le b_n$.

- αν $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει
- αν $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει, τότε $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ δεν συγκλίνει.

V. (Γενικευμένο κριτήριο **σύγκρισης**) Έστω $0 \le a_n$, $0 < b_n$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$. Τότε οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ είτε συγκλίνουν είτε αποκλίνουν ταυτόχρονα.

VI. (Κριτήριο **λόγου - d' Alembert**) Έστω $a_n \neq 0$ για $n \ge n_0$ και $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda$. Τότε:

- αν $\lambda < 1$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει
- αν $\lambda > 1$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει
- αν $\lambda = 1$, τότε δεν μπορούμε να απαντήσουμε.

VII. (Κριτήριο **ρίζας - Cauchy**). Έστω $a_n > 0$ και $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lambda$

- αν $\lambda < 1$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει
- αν $\lambda > 1$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει
- αν $\lambda = 1$, τότε δεν μπορούμε να απαντήσουμε.

VIII. (Κριτήριο **Leibnitz**) Έστω $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Αν η ακολουθία (a_n) είναι θετική, φθίνουσα και $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, τότε η σειρά συγκλίνει.

IX. (Κριτήριο **ολοκληρώματος**) Αν η ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f:[1,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι θετική και φθίνουσα τότε $I = \int_{1}^{+\infty} f(x)dx$ και $S = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγχρόνως συγκλίνουν ή αποκλίνουν και αν συγκλίνουν ισχύει: $I < S < I + f(1)$.

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Συνδυασμοί : $C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

✓ <u>Δεσμευμένη Πιθανότητα</u> $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

✓<u>Ανεξάρτητα ενδεχόμενα:</u> $P(A\cap B) = P(A)\,P(B)$.

Αν $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$ και $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$,

✓ <u>Ολική Πιθανότητα:</u>

$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + \cdots + P(A_n)P(B/A_n)$

✓ <u>Τύπος Bayes:</u> $P(A_k / B) = \frac{P(A_k)P(B/A_k)}{P(B)}$

Τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) είναι μια συνάρτηση $X(\cdot)$ με πεδίο ορισμού το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών.

Η **μέση τιμή** μίας τ.μ. συμβολίζεται με $E(X)$ ή με μ_X και δίνεται από: $E(X) = \sum_x xf(x)$ για τις διακριτές τ.μ., και από: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$. για τις συνεχείς τ.μ., όπου $f(x)$ η **συνάρτηση πιθανότητας** (σ.π.) (περίπτωση διακριτής τ.μ.) ή η **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** (σ.π.π.) (περίπτωση συνεχούς τ.μ.).

Η **διασπορά** για τις διακριτές τ.μ. δίνεται από:

$$\text{var}(X) = E\left[\left(X-\mu_x\right)^2\right] = \sum_x \left(x-\mu_x\right)^2 f(x)$$

και για τις συνεχείς τ.μ. από:

$$\text{var}(X) = E\left[\left(X-\mu_x\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\mu_x\right)^2 f(x)\,dx$$

Ισχύει: $\text{var}(X) = E\left[X^2\right] - \left(E\left[X\right]\right)^2$.

Η **τυπική απόκλιση** μιας τ.μ. X συμβολίζεται με σ_X και είναι η (θετική) τετραγωνική ρίζα της **διασποράς** της X, δηλαδή: $\sigma_X = \sqrt{\text{var}(X)}$.

Έστω X τ.μ. (διακριτή ή συνεχής). Εάν ορίσω άλλη τυχαία μεταβλητή $Y = aX + b$ τότε ισχύει:

$$E(Y) = E(aX+b) = aE(X) + b$$

$$Var(Y) = Var(aX+b) = a^2 Var(X)$$

<u>**Κατανομές τυχαίων μεταβλητών**</u>

Διωνυμική: $B(n,p)$: $f(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$k = 0,1,\ldots,n$

$E(X) = np,\quad Var(X) = np(1-p).$

Poisson $P(\lambda)$ **:** $f(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ \ k = 0,1,\ldots$

$E(X) = \lambda\ ,\quad Var(X) = \lambda$

Γεωμετρική:

$$G(p): f(k) = \begin{cases} p(1-p)^{k-1} & k = 1,2,\ldots \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$E(X) = 1/p,\quad Var(X) = (1-p)/p^2$

Αρνητική διωνυμική:

$f(k) = \binom{k-1}{\nu-1} p^{\nu}(1-p)^{k-\nu},\ k = \nu, \nu+1,\ldots$

$E(X) = \nu/p\ ,\quad Var(X) = \nu(1-p)/p^2$

Υπεργεωμετρική: $f(k) = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

$k = 0,\ldots,\min(n, N_1)\ ,\quad N_1 + N_2 = N$

$E(X) = n\frac{N_1}{N}\ ,\quad Var(X) = n\frac{N_1}{N}\frac{N_2}{N}\frac{N-n}{N-1}$

Ομοιόμορφη: $U(a,b)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

$E(X) = (a+b)/2$ **,** $\quad Var(X) = (b-a)^2/12$

Κανονική $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ **:** $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

$-\infty < x < \infty$

$E(X) = \mu\ ,\ Var(X) = \sigma^2$

Εκθετική $E(a): f(x) = \begin{cases} a\,e^{-ax} & x \ge 0 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

$E(X) = 1/a\ ,\qquad Var(X) = 1/a^2$

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες με $E(X_i) = \mu$. $Var(X_i) = \sigma^2$, τότε $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$ ή $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)\quad n \ge 30$.

* * * * * * * * * * * *

<u>**Χρήσιμες ταυτότητες και σχέσεις**:</u>

$\left(a+b\right)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{r} a^{n-r}b^r + \ldots + b^n$

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}),\quad n = 1,2,3,\ldots$

$(1+a)^n \ge 1 + na,\quad a > 0,\quad n = 1,2,3,\ldots$

* * * * * * * * * * * *

<u>**Βασικοί τριγωνομετρικοί τύποι**</u> ($x \in \mathbb{R}$ **)**

$\sin(x) = -\sin(-x),\qquad \cos(x) = \cos(-x)$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1\ ,\quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \sin y\cos x$

$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$

$\tan\left(x \pm y\right) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\ ,\quad 1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x \pm y}{2}\cos\frac{x \mp y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\ \cos\frac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\ \sin\frac{x-y}{2}$

$\sin(0) = \cos(\pi/2) = 0,\quad \cos(0) = \sin(\pi/2) = 1$

$\sin(\pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2$

$\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \ \sin(\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

* * * * * * * * * * * *

Σύνολο μιγαδικών $\mathbb{C} = \{z = x + i\,y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

✓ <u>*Συζυγής:*</u> $\bar{z} = x - iy$

✓ <u>*Αντίστροφος:*</u> $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

✓ <u>*Μέτρο μιγαδικού αριθμού:*</u>

$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ και $r^2 = |z|^2 = z \cdot \bar{z}$

✓ <u>*Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού*</u>

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, όπου θ *πρωτεύον όρισμα.*

✓ <u>*Θεώρημα De Moivre*</u>

$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n\left(\cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right)\right)$, n ακέραιος

✓ Οι n διακεκριμένες **ρίζες** της εξίσωσης $x^n = z$, $n \in \mathbb{N}$, (που λέγονται και n -οστές ρίζες του z), δίνονται από τον τύπο

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0,1,\ldots n-1 .$$