ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ Ι (ΘΕ ΠΛΗ 12)
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΕΛΙΚΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 9 Ιουνίου 2013 (διάρκεια 3 ώρες και 30 λ.)

Διαβάστε προσεκτικά και απαντήστε σε όλα τα 5 Θέματα σύμφωνα με τις οδηγίες επιλογής ερωτημάτων

Θέμα 1 **Θα απαντήσετε στο 1α) και σε ένα μόνο από τα 1β), 1γ)**

1α) (14 μονάδες) Αφού γράψετε τον πίνακα αναπαράστασης **A** του γραμμικού μετασχηματισμού $f(x,y)=(2x+3y,x)$ ως προς την συνήθη βάση του $\mathbf{R}^2$, βρείτε τις ιδιοτιμές και αντίστοιχα βασικά ιδιοδιανύσματα του *f*. Επίσης να βρεθεί ο $\mathbf{A}^{-1}$, ο τύπος της f^{-1} και ο $\mathbf{A}^n$ για κάθε φυσικό αριθμό *n*.

1β) (6 μονάδες) Να υπολογιστούν οι πραγματικοί αριθμοί β, γ ώστε τα $\boldsymbol{v}_1=(1,1,0)$, $\boldsymbol{v}_2=(1,\beta,\gamma)$ και $\boldsymbol{v}_3=(0,0,1)$ να είναι ιδιοδιανύσματα 3×3 πραγματικού συμμετρικού πίνακα με τρείς διαφορετικές ιδιοτιμές. Στη συνέχεια να δοθεί ένας τέτοιος πίνακας όταν οι ιδιοτιμές είναι 0, 1, 1/2 αντίστοιχα.

1γ) (6 μονάδες) Βρείτε τις ιδιοτιμές και βάσεις από ιδιοδιανύσματα για κάθε ιδιοχώρο του πίνακα
$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&-1\\0&2&3\end{pmatrix}$ και εξετάσετε αν ο πίνακας αυτός διαγωνοποιείται.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1α) Συνήθης βάση Β={(1,0),(0,1)}.Υπολογίζουμε $\left[f(1,0)\right]_B=\left[(2,1)\right]_B=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\left[f(0,1)\right]_B=\left[(3,0)\right]_B=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

και έχουμε $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\det\begin{pmatrix}2-\lambda&3\\1&-\lambda\end{pmatrix}=(2-\lambda)(-\lambda)-3=\lambda^2-2\lambda-3=(\lambda-3)(\lambda+1)$.

Για την ιδιοτιμή λ=3: Α–3Ι= $\begin{pmatrix}2-3&3\\1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3\\1&-3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-3\\1&-3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-3\\0&0\end{pmatrix}$, βάση ιδιοχώρου $\left\{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Για λ= –1: Α– (–1)Ι = $\begin{pmatrix}2-(-1)&3\\1&-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, βάση ιδιοχώρου $\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{pmatrix}0&-3\\-1&2\end{pmatrix}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}0&-3\\-1&2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&3\\1&-2\end{pmatrix}$, οπότε $f^{-1}(x,y)=(y,\frac{x-2y}{3})$. Για τις δυνάμεις A^n καθώς $A=PDP^{-1}$

με $P=\begin{pmatrix}3&-1\\1&1\end{pmatrix}$, $P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}3&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $A^n=PD^nP^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n&0\\0&(-1)^n\end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3^{n+1}&(-1)^{n+1}\\3^n&(-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3(3^n)&-(-1)^n\\3^n&(-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3^{n+1}+(-1)^n&3^{n+1}-3(-1)^n\\3^n-(-1)^n&3^n+3(-1)^n\end{pmatrix}.$$

1β) Επειδή ιδιοδιανύσματα πραγματικού συμμετρικού πίνακα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα μεταξύ τους, το εσωτερικό γινόμενο ανά δύο πρέπει να είναι 0. Επομένως έχουμε:

$$\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2=0\\\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_3=0\\\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_3=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}1+\beta=0\\0=0\\\gamma=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\beta=-1\\\gamma=0\end{matrix}\right\}.$$

Άρα τα τρία διανύσματα είναι: $\boldsymbol{v}_1=(1,1,0)$, $\boldsymbol{v}_2=(1,-1,0)$ και $\boldsymbol{v}_3=(0,0,1)$ τα οποία καθώς είναι μη μηδενικά και ορθογώνια μεταξύ τους αποτελούν βάση του $\mathbf{R}^3$.

Ένας πίνακας με τα παραπάνω ιδιοδιανύσματα και ιδιοτιμές 0,1,1/2, είναι ο $A=P\cdot D\cdot P^{-1}$ με

$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ και $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1/2\end{pmatrix}$, οπότε υπολογίζοντας τον $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&1/2&0\\1/2&-1/2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, έχουμε

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/2&1/2&0\\1/2&-1/2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&-1&0\\0&0&1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/2&1/2&0\\1/2&-1/2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&-1/2&0\\-1/2&1/2&0\\0&0&1/2\end{pmatrix}.$$

1γ) Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A:

$$\textbf{det(A-}\lambda\textbf{I)}=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&1\\0&-\lambda&-1\\0&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&-\lambda&-1\\0&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&-1\\2&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\big((-\lambda)(3-\lambda)-(-1)2\big)=$$

$(1-\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda+2\right)=(1-\lambda)(\lambda-1)\left(\lambda-2\right)=-(\lambda-1)^2\left(\lambda-2\right)$. Ιδιοτιμές: λ=1 διπλή, λ=2 απλή. Βρίσκουμε βάσεις των ιδιοχώρων για κάθε ιδιοτιμή. λ υπολογίζοντας την Ανηγμένη Κλιμακωτή Μορφή (ΑΚΜ) του Α-λΙ:

Για λ=1: $\mathbf{A}-\mathbf{I}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&-1&-1\\0&2&3-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&-1&-1\\0&2&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&-2\\0&0&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,

Βάση ιδιοχώρου $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, δηλαδή η ιδιοτιμή λ=1 έχει γεωμ. πολλαπλότητα 1 ενώ η αλγεβρική της πολλαπλότητα είναι 2.

Ήδη μπορούμε να αποφανθούμε ότι ο Α δεν διαγωνοποιείται.

Για λ=2: $\textbf{A-2I}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&-2&-1\\0&2&3-2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1/2\\0&2&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-3/2\\0&1&1/2\\0&0&0\end{pmatrix}\Bigg\}$,

Βάση ιδιοχώρου $\left\{\begin{pmatrix}3/2\\-1/2\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Θέμα 2 **Θα απαντήσετε στο 2α) και σε ένα μόνο από τα 2β), 2γ). Όπου αναφέρεται ορθογωνιότητα θεωρούμε το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbf{R}^3$.**

2α) (14 μονάδες) Έστω $U=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\,|\,x+3y-z=0\}$. Δείξτε ότι *U* είναι υπόχωρος του $\mathbf{R}^3$ και βρείτε μια βάση και τη διάσταση αυτού. Βρείτε μια ορθοκανονική βάση του *U*. Για το τυχόν διάνυσμα (a,b,c) του $\mathbf{R}^3$, να βρεθούν $u\in U$ και $u'\in U^\perp$ με $(a,b,c)=u+u'$, όπου $U^\perp$ είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του *U* (δηλαδή $u\in U$ και $u'\in U^\perp$ είναι οι (ορθές) προβολές του (a,b,c) στον *U* και $U^\perp$ αντίστοιχα).

2β) (6 μονάδες) Για δεδομένο $a\in\mathbf{R}$, θεωρούμε τους υποχώρους $V=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\,|\,x+y-z=0\}$ και $W=span\{(2,1,3),(1,-2,a)\}$. Βρείτε βάση και διάσταση για κάθε ένα από αυτούς και προσδιορίστε για ποιές τιμές του *a* οι υπόχωροι αυτοί είναι ίσοι, δηλαδή $W=V$.

2γ) (6 μονάδες) Προσδιορίστε όλες τις τιμές του *a* για τις οποίες τα διανύσματα $v_1=(1,1,a), v_2=(1,a,1), v_3=(1,1,1)$, αποτελούν βάση του χώρου $\mathbf{R}^3$ και γράψτε το διάνυσμα $v=(1,2,3)$ ως γραμμικό συνδυασμό των v_1,v_2,v_3 γι' αυτές τις τιμές του *a*.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

2α) Από τον ορισμό του *U* έχουμε $(x,y,z)\in U \Leftrightarrow x+3y-z=0 \Leftrightarrow z=x+3y$, οπότε $u\in U$ αν και μόνο αν υπάρχουν πραγματικοί *x*, *y* ώστε $u=(x,y,x+3y)=x(1,0,1)+y(0,1,3)$.
Δηλαδή τα διανύσματα $u_1=(1,0,1), u_2=(0,1,3)$ παράγουν τον *U*. Επειδή η γραμμική θήκη κάθε υποσυνόλου του $\mathbf{R}^3$ είναι υπόχωρος του $\mathbf{R}^3$, είναι φανερό ότι και ο *U* είναι υπόχωρος του $\mathbf{R}^3$. Από τον προηγούμενο γραμμικό συνδυασμό άμεσα φαίνεται ότι τα u_1, u_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα (πράγματι $x(1,0,1)+y(0,1,3)=(0,0,0)\Leftrightarrow$ $(x,y,x+3y)=(0,0,0) \Leftrightarrow x=y=0$). Συνεπώς μια βάση του *U* είναι το σύνολο $\{u_1,u_2\}$. Στην βάση $\{u_1,u_2\}$ εφαρμόζουμε τη μέθοδο Gram-Schmidt (τυπολόγιο) και βρίσκουμε μία ορθογώνια βάση:

$v_1=u_1=(1,0,1),\quad v_2=u_2-\dfrac{\langle v_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1=(0,1,3)-\dfrac{3}{2}(1,0,1)=\left(-\dfrac{3}{2},1,\dfrac{3}{2}\right)$ και διαιρώντας με τα μέτρα

$b_1=\dfrac{v_1}{\|v_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1),\quad b_2=\dfrac{v_2}{\|v_2\|}=\dfrac{1}{\sqrt{22}}(-3,2,3)$, έχουμε μία ορθοκανονική βάση του U: Β=$\{b_1, b_2\}$.

Για την διάσπαση $(a,b,c)=u+u'$, καθώς έχουμε βρει ήδη μία ορθοκανονική βάση του U, η ορθή προβολή u του w=(a,b,c) επί του U υπολογίζεται ως το άθροισμα των προβολών του στα διανύσματα της βάσης Β:

$$u=<w,b_1>b_1+<w,b_2>b_2==\frac{a+c}{2}(1,0,1)+\frac{-3a+2b+3c}{22}(-3,2,3)=\frac{a+c}{2}(1,0,1)+\frac{-3a+2b+3c}{22}(-3,2,3)=$$

$$\frac{1}{22}\left(20a-6b+2c,\,-6a+4b+6\,c,\,2a+6b+20c\right)=\frac{1}{11}\left(10a-3b+c,\,-3a+2b+3c,\,a+3b+10c\right),$$ οπότε

$$u'=(a,b,c)-u=\frac{1}{11}\left(a+3b-c,\,3a+9b-3c,\,-a-3b+c\right)=\frac{a+3b-c}{11}(1,3,-1).$$

<u>Σημείωση:</u> Εναλλακτικά, παρατηρούμε ότι $U^{\perp}=span\{(1,3,-1)\}$ και υπολογίζουμε την προβολή u' και έπειτα το u.

2β) Από τον ορισμό του V έχουμε $(x,y,z)\in V \Leftrightarrow x+y-z=0 \Leftrightarrow x=-y+z$, οπότε $v\in V$ αν και μόνο αν υπάρχουν πραγματικοί x, y ώστε $v=(-y+z,y,z)=y(-1,1,0)+z(1,0,1)$. Δηλαδή τα διανύσματα $v_1=(-1,1,0),\, v_2=(1,0,1)$ παράγουν τον V. Αυτά είναι και γραμμικά ανεξάρτητα (όπως πριν αν ο παραπάνω γραμμικός συνδυασμός είναι το μηδέν διάνυσμα τότε και οι δύο συντελεστές είναι μηδέν) συνεπώς μια βάση του V είναι το σύνολο $\{v_1,v_2\}$. Αρα dim V=2

Το σύνολο $\{(2,1,3),(1,-2,a)\}$ αποτελεί βάση του W καθώς τον παράγει και τα στοιχεία του είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(π.χ. $\begin{pmatrix}1 & -2 & a\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & a\\ 0 & 5 & 3-2a\end{pmatrix}$ ή υπολογίζοντας την υποορίζουσα: $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5\neq 0$). Άρα dim W=2.

Ο W είναι υπόχωρος του V αν και μόνο αν η παραπάνω βάση του W περιέχεται στον V: το $(2,1,3)$ ανήκει στον υπόχωρο V επειδή 2+1−3=0. Το στοιχείο $(1,-2,a)$ ανήκει στον V αν και μόνο αν

1−2−a = 0 δηλαδή $a=-1$. Άρα μόνο για $a=-1$ ο W είναι υπόχωρος του V και επειδή οι διαστάσεις τους είναι ίσες έχουμε και την ισότητα $W=V$.

2γ) Μπορούμε να απαντήσουμε στα ερωτήματα υπολογίζοντας την ΑΚΜ του επόμενου επαυξημένου πίνακα του οποίου οι 3 πρώτες στήλες είναι οι στήλες συντεταγμένων των v_1,v_2,v_3 και η τελευταία οι συντεταγμένες του (1,2,3):

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 2\\ a & 1 & 1 & 3\end{array}\right)\xrightarrow[\Gamma_3\leftarrow\Gamma_3-a\Gamma_1]{\Gamma_2\leftarrow\Gamma_2-\Gamma_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & a-1 & 0 & 1\\ 0 & 1-a & 1-a & 3-a\end{array}\right)$$ =Β(a). Αν a =1 τότε Β(1)=$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right)$ και θεωρώντας τις τρείς πρώτες στήλες συμπεραίνουμε οτι τα δοθέντα διανύσματα <u>δεν</u> είναι γραμμικά ανεξάρτητα (αυτό είναι προφανές καθώς για a = 1 τα τρία διανύσματα είναι ίσα).

Αν $a\neq 1$, τότε συνεχίζοντας τις γραμμοπράξεις

$$\text{B}(a)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & a-1 & 0 & 1\\ 0 & 1-a & 1-a & 3-a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a-1}\\ 0 & 1 & 1 & \frac{a-3}{a-1}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a-1}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-4}{a-1}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 1-\frac{a-4}{a-1}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a-1}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-4}{a-1}\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1-\frac{a-4}{a-1}-\frac{1}{a-1}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a-1}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-4}{a-1}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & \frac{2}{a-1}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a-1}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-4}{a-1}\end{array}\right).$$ $\boxed{\text{Άρα, για } a\neq 1\text{: } (1,2,3)=\frac{2}{a-1}v_1+\frac{1}{a-1}v_2+\frac{a-4}{a-1}v_3}$.

Θέμα 3 **Θα απαντήσετε στα 3α), 3β) και σε <u>ένα μόνο από τα 3γ), 3δ)</u>.**

3α) (6 μονάδες) Υπολογίστε τα όρια των επόμενων ακολουθιών :

(i) $a_n = \dfrac{n\sin(n)}{e^n+1}$, (ii) $b_n = \left(\dfrac{3n+5}{3n+2}\right)^n$, (iii) $c_n = \dfrac{\sqrt[n]{n}}{1+2^n}$.

3β) (8 μονάδες) Εξετάστε τη σύγκλιση των παρακάτω σειρών:

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3n^2}{e^{2n+1}}$, (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2+2}$, (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\sqrt[3]{n}+5}{n^2+6n+1}$.

3γ) (6 μονάδες) Να βρεθούν <u>όλες</u> οι τιμές του $x\in\mathbf{R}$ για τις οποίες η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-2)^{n-1}}{3^n n^2}$ συγκλίνει.

3δ) (6 μονάδες) Χρησιμοποιώντας κατάλληλη σειρά Taylor, εκφράστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin(x)}{x}\,dx$ ως άθροισμα σειράς.

Δώστε άνω φράγμα του σφάλματος της προσέγγισης που έχουμε με το άθροισμα των 3 πρώτων όρων της σειράς.

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>

3α)

i) Καθώς $|\sin n|\le 1$, $|a_n| = \dfrac{n|\sin n|}{e^n+1} \le \dfrac{n}{e^n+1} < \dfrac{n}{e^n}$. Η τελευταία ακολουθία γενικού όρου $\dfrac{n}{e^n}$ είναι θετικών όρων και τείνει στο 0 επειδή ο λόγος δύο διαδοχικών όρων της $\dfrac{n+1}{e^{n+1}} / \dfrac{n}{e^n} = \dfrac{n+1}{n\,e}$ τείνει στο $1/e$ που είναι θετικός μικρότερος του 1. Άρα και η $|a_n|$ τείνει στο μηδέν, οπότε και για την a_n ισχύει $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

<u>Σημείωση</u>: Μπορεί επίσης να υπολογιστεί το όριο της $\dfrac{n}{e^n}$ με εφαρμογή του κανόνα L' Hôpital για το όριο της αντίστοιχης συνάρτησης: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x} = 0$, καθώς $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x} = 0$.

(ii) Γράφουμε διαδοχικά τον γενικό όρο της ακολουθίας ως ακολούθως:

$$b_n = \left(\frac{(3n+5)/(3n)}{(3n+2)/(3n)}\right)^n = \left(\frac{1+\frac{5/3}{n}}{1+\frac{2/3}{n}}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{5/3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2/3}{n}\right)^n} = \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{e^{5/3}}{e^{2/3}} = e .$$

<u>Σημείωση</u>: από το τυπολόγιο $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$.

iii) Για την ακολουθία $c_n = \dfrac{\sqrt[n]{n}}{1+2^n}$ έχουμε: το όριο στον αριθμητή είναι 1 (τυπολόγιο) και του παρονομαστή $+\infty$ άρα για την ακολουθία c_n ισχύει $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$.

3β) i) Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3n^2}{e^{2n+1}}$ είναι θετικών όρων. Με το κριτήριο λόγου (d' Alembert): για την ακολουθία $a_n = \dfrac{3n^2}{e^{2n+1}}$ υπολογίζουμε το όριο τον λόγο διαδοχικών όρων :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3(n+1)^2}{e^{2(n+1)+1}}}{\frac{3n^2}{e^{2n+1}}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{2n+1}3(n+1)^2}{e^{2n+3}3n^2} = \frac{1}{e^2}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{e^2}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{e^2}1 = \frac{1}{e^2} < 1$$ Συνεπώς, η σειρά συγκλίνει, επειδή ο λόγος είναι μικρότερος της μονάδος.

<u>Σημείωση</u> : Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο ρίζας.

ii) Η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2+2}$ συγκλίνει απόλυτα καθώς $\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2+2}\right| = \dfrac{1}{n^2+2} < \dfrac{1}{n^2}$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει ως p-σειρά με p=2>1.

<u>Σημείωση</u>: με κριτήριο Leibnitz επίσης ως εναλλάσουσα.

(iii) Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\sqrt[3]{n}+5}{n^2+6n+1}$ είναι θετικών όρων με γενικό όρο $a_n=\frac{2\sqrt[3]{n}+5}{n^2+6n+1}=\frac{n^{1/3}}{n^2}\frac{2+5/n^{1/3}}{1+6/n+1/n^2}=\frac{1}{n^{5/3}}\frac{2+5/n^{1/3}}{1+6/n+1/n^2}$. Εφαρμόζοντας το γενικευμένο κριτήριο σύγκρισης και χρησιμοποιώντας την ακολουθία $b_n=\frac{1}{n^{2-1/3}}=\frac{1}{n^{5/3}}$ έχουμε: $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=2=c>0$. Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{5/3}}$ συγκλίνει ως p-σειρά με p>1, συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$.

3γ) Για τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-2)^{n-1}}{3^n n^2}$, εφαρμόζοντας το κριτήριο λόγου (d' Alembert) έχουμε για το όριο του λόγου διαδοχικών όρων:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(x-2)^n}{3^{n+1}(n+1)^2}}{\frac{(x-2)^{n-1}}{3^n\cdot n^2}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-2)^n\cdot 3^n\cdot n^2}{(x-2)^{n-1}\cdot 3^{n+1}\cdot(n+1)^2}\right|=\frac{|x-2|}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}=\frac{|x-2|}{3}\cdot 1$$

Σύμφωνα με το κριτήριο λόγου, η σειρά συγκλίνει αν $\frac{|x-2|}{3}<1$ που ισοδυναμεί με $|x-2|<3$ δηλαδή $-3<x-2<3$ και τελικά η σειρά συγκλίνει για $x\in(-1,\,5)$. Η σειρά για $x\in(-\infty,\,-1)\cup(5,+\infty)$ αποκλίνει..

.

Επίσης εξετάζουμε τη σύγκλιση στα άκρα του διαστήματος. Αντικαθιστώντας $x=-1$ η σειρά γράφεται $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{3^n\cdot n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n^2}$, η οποία απολύτως συγκλίνει καθώς $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει. Παρόμοια για $x=5$ η σειρά γράφεται $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(5-2)^{n-1}}{3^n\cdot n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3n^2}$, η οποία συγκλίνει. Τελικά, η σειρά συγκλίνει για κάθε $x\in[-1,\,5]$ και αποκλίνει παντού εκτός του διαστήματος αυτού.

3δ) Από το τυπολόγιο έχουμε $\sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$, οπότε $\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$ και\

ολοκληρώνοντας όρο προς όρο έχουμε $\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^1 x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\Bigg|_0^1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{2n+1}$.

Η τελευταία σειρά είναι εναλλάσσουσα συγκλίνουσα και ένα φράγμα του σφάλματος προσέγγισης του αθροίσματός της με το άθροισμα των τριών πρώτων όρων είναι ο απολύτως πρώτος παραλειπόμενος όρος δηλαδή $\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{2n+1}\right|\Bigg|_{n=3}=\frac{1}{7!}\frac{1}{7}$.

Θέμα 4 **Θα απαντήσετε στο 4α) και σε <u>ένα μόνο από τα 4β), 4γ)</u>.**

4α) (14 μονάδες) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+9x$ ορισμένη στο διάστημα [0, + ∞) για την οποία γνωρίζουμε ότι παρουσιάζει τοπικό ακρότατο για $x=1$ και σημείο καμπής για $x=2$. Υπολογίστε τις παραγώγους 1ης, 2ης και 3ης τάξης της *f* και αφού προσδιορίσετε τις τιμές των (σταθερών) παραμέτρων *α, β,*

i) βρείτε τα διαστήματα του [0, + ∞) στα οποία η *f* : είναι αύξουσα, είναι φθίνουσα, στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω,

ii) βρείτε όλα τα σημεία: μηδενισμού, ακροτάτων τιμών (τοπικών, ολικών), καμπής της *f,*

iii) βρείτε το όριο της f καθώς $x\to+\infty$, ασύμπτωτες αν υπάρχουν και το σύνολο τιμών αυτής.

iv) υπολογίστε το εμβαδόν του κλειστού (φραγμένου) χωρίου που βρίσκεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της f και της ευθείας με εξίσωση $y = 4x$.

4β) (6 μονάδες) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I(a) = \int_{-\infty}^{a} (x^2 - 3)\, e^x dx,\ a \in \mathrm{R}$, (χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση). Βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες ισχύει $I(a) = 0$. Με την γνωστή ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος ως εμβαδόν, πώς εξηγείτε τον μηδενισμό του $I(a)$ για αυτές τις τιμές;

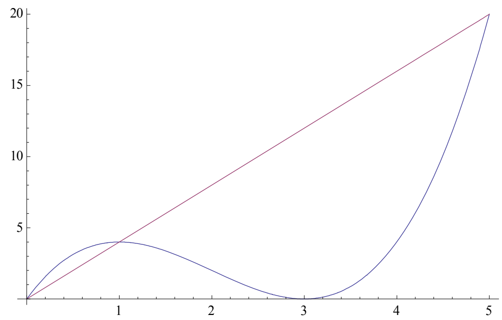
4γ) (6 μονάδες) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x} + 2)x}$ και εξετάστε αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(\sqrt[3]{x} + 2)x}$ συγκλίνει (Υπόδειξη: για το αόριστο ολοκλήρωμα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την αντικατάσταση $u = \sqrt[3]{x}$ και στη συνέχεια διάσπαση σε απλά κλάσματα).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

4α) $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + 9$, $f''(x) = 6\alpha x + 2\beta$, $f'''(x) = 6\alpha$. Αναγκαίες συνθήκες $f'(1) = 0$ και $f''(2) = 0$ που ισοδυναμούν με το σύστημα $\left\{\begin{matrix} 3\alpha + 2\beta + 9 = 0 \\ 12\alpha + 2\beta = 0 \end{matrix}\right\}$ το οποίο ισοδυναμεί με $\left\{\begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = -6 \end{matrix}\right\}$. Άρα $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ στο διάστημα $[0, +\infty)$. Παρακάτω θα επαληθεύσουμε αν, τελικά, υπάρχει τέτοια f ελέγχοντας αν όντως στο x=1 έχουμε τοπικό ακρότατο και στο x =2 σημείο καμπής.

i) Εχουμε $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$, $f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$.

Έτσι για το πρόσημο της 1ης παραγώγου συμπεραίνουμε ότι $f'(x) < 0$ για $1 < x < 3$ και $f'(x) > 0$ για $0 \le x < 1$ και $3 < x$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα [0,1) και (3,+∞) και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (1,3). Από την εναλλαγή της μονοτονίας συμπεραίνουμε ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x =1 ίσο με $f(1) = 4$, και τοπικό ελάχιστο στο $x = 3$ ίσο με $f(3) = 0$.

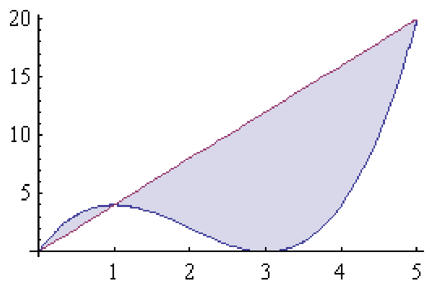


Για το πρόσημο της 2ης παραγώγου συμπεραίνουμε ότι $f''(x) < 0$ για $0 \le x < 2$ και $f''(x) > 0$ για $x > 2$. Άρα η συνάρτηση είναι κυρτή (στρέφει κοίλα άνω) στο διάστημα (2, +∞) και κοίλη στο διάστημα [0,2).

ii) Τοπικό μέγιστο για x=1 με τιμή $f(1) = 4$, τοπικό και ολικό ελάχιστο για x =3 με τιμή $f(3) = 0$, σημείο καμπής για x=2 με τιμή $f(2) = 2$. Η συνάρτηση μηδενίζεται για x=0 και για x=3 (διπλή ρίζα).

iii) Το όριο της f καθώς $x \to +\infty$ είναι +∞. Δεν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη ούτε κατακόρυφη και από τη συνέχεια και τη μονοτονία συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο [0, +∞).

iv) Καθώς $f(x) - 4x = x^3 - 6x^2 + 5x = x(x-1)(x-5)$ έχουμε ότι το εμβαδό του χωρίου ισούται προς



$$E = \int_0^5 |f(x) - 4x|\, dx = \int_0^1 \left(f(x) - 4x\right) dx + \int_1^5 \left(4x - f(x)\right) dx = \frac{131}{4}.$$

4β) Επειδή (με παραγοντική ολοκλήρωση) $\int x^n e^x dx = \int x^n \left(e^x\right)' dx = x^n\ e^x - \int (x^n)' e^x dx = x^n\ e^x - n\int x^{n-1}\, e^x dx$

και $\int e^x dx = e^x + c$, έχουμε ότι $\int (x^2 - 3)\, e^x dx = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, e^x + c$ που ισοδυναμεί διαδοχικά με

$$(x^2 - 3)\, e^x = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)'\, e^x + \left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) e^x$$

$$x^2 - 3 = 2\alpha x + \beta + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha x^2 + (\beta + 2\alpha)x + \gamma + \beta,$$ για κάθε πραγματικό x

από όπου έχουμε $\alpha = 1\ \kappa\alpha\iota\ \beta + 2a = 0\ \kappa\alpha\iota\ \gamma + \beta = -3$ δηλαδή $\alpha = 1, \beta = -2, \gamma = -1$ και

$\int (x^2-3)\, e^x dx = (x^2-2x-1)\, e^x + c$.

<u>Σημείωση:</u> το ολοκλήρωμα υπολογίζεται και απ'ευθείας με χρήση παραγοντικής ολοκλήρωσης (δύο φορές).
Για το γενικευμένο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$I(a) = \int_{-\infty}^{a} (x^2-3)\, e^x dx = \lim_{m\to-\infty} \left[(x^2-2x-1)\, e^x\right]\Big|_m^a = (a^2-2a-1)\, e^a - \lim_{m\to-\infty}\left[(m^2-2m-1)\, e^m\right] = (a^2-2a-1)\, e^a,$$

αφού, με χρήση κανόνα L'Hôpital, $\lim_{m\to-\infty}\left[\dfrac{(m^2-2m-1)}{e^{-m}}\right]=0$. (Ο λόγος των πρώτων, ως προς m, παραγώγων είναι επίσης απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{(2m-2)}{-e^{-m}}$ και των δεύτερων $\dfrac{2}{e^{-m}}$ τείνει στο 0 καθώς $m\to-\infty$.)

$I(a)=0 \Leftrightarrow a^2-2a-1=0 \Leftrightarrow a=1-\sqrt{2}$ ή $a=1+\sqrt{2}$. Με την γνωστή ερμηνεία του ορισμένου ολοκληρώματος ως εμβαδόν, ο μηδενισμός του $I(a)$ εξηγείται με την αλλαγή πρόσημου της συνάρτησης $(x^2-3)\, e^x$.

4γ) Για το αόριστο ολοκλήρωμα με την αντικατάσταση της κυβικής ρίζας $x=u^3,\ dx=3u^2du$ έχουμε

$\int \dfrac{dx}{(\sqrt[3]{x}+2)x} = \int \dfrac{3u^2du}{(u+2)u^3} = \int \dfrac{3du}{(u+2)u}$. Στο τελευταίο ολοκλήρωμα κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$\frac{3}{u(u+2)} = \frac{A}{u}+\frac{B}{u+2} \Leftrightarrow 3 = A(u+2)+Bu = (A+B)u+2A \Leftrightarrow \left(2A=3 \quad \text{και } A+B=0\right) \Leftrightarrow A=\frac{3}{2} \quad \text{και} \quad B=-\frac{3}{2}$$

και έχουμε $\displaystyle\int \frac{3du}{(u+2)u} = \int \frac{3}{2}\frac{du}{u} - \int \frac{3}{2}\frac{du}{u+2} = \frac{3}{2}(\ln|u|-\ln|u+2|)+C = \frac{3}{2}\ln\left|\frac{u}{u+2}\right|+C$.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $x=u^3 \Leftrightarrow u=\sqrt[3]{x}$ παίρνουμε τελικά $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+2)x} = \frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+2}\right|+C$.

Για το γενικευμένο ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα έχουμε

$\displaystyle\int_1^M \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+2)x} = \left[\frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+2}\right|\right]_1^M = \frac{3}{2}\left(\ln\frac{\sqrt[3]{M}}{\sqrt[3]{M}+2} - \ln\frac{1}{3}\right)$. Αλλά το όριο $\displaystyle\lim_{M\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{M}}{\sqrt[3]{M}+2} = \lim_{M\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{\sqrt[3]{M}}} = 1$

υπάρχει, άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+2)x}$ συγκλίνει (και η τιμή του είναι $\dfrac{3\ln 3}{2}$).

Θέμα 5 **Θα απαντήσετε στα 5α) και 5β).**

5α) (8 μονάδες) Δύο τμήματα T_1 και T_2, συναρμολογούν το 70% και 30%, αντίστοιχα, του συνόλου των ηλεκτρονικών υπολογιστών (Η/Υ) μιας εταιρείας. Είναι γνωστό ότι το ποσοστό των ελαττωματικά συναρμολογημένων Η/Υ από το σύνολο των Η/Υ της εταιρείας είναι 3,4% ενώ από το τμήμα T_1 το 4% των Η/Υ εξέρχονται ελαττωματικά συναρμολογημένοι.

i) Αν επιλέξουμε τυχαία έναν υπολογιστή που έχει συναρμολογηθεί στο τμήμα T_2, ποιά είναι η πιθανότητα αυτός να είναι ελαττωματικός;

ii) Δεδομένου ότι θεωρούμε όλους τους ελαττωματικά συναρμολογημένους Η/Υ, ποιά είναι η πιθανότητα ένας από αυτούς να προέρχεται από το τμήμα T_2;

Για το επόμενο δίνονται $\Phi(1,5)=0.9332$ και $\Phi(0.84)=0.80$.

5β) (12 μονάδες) Ο χρόνος που απαιτείται να απαντηθεί ένα γραπτό τεστ είναι τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu=30$ λεπτά (της ώρας) και τυπική απόκλιση $\sigma=8$ λεπτά.

i) Να υπολογισθεί το ποσοστό των υποψηφίων με χρόνο απάντησης του τεστ μεταξύ 18 λ. και 42 λ.
ii) Ποια είναι η πιθανότητα ο χρόνος απάντησης του τεστ να μην υπερβαίνει τα 18 λ.;
iii) Να βρεθεί ο χρόνος για τον οποίο το 80% των υποψηφίων θα προλάβει να ολοκληρώσει το τεστ.
iv) Ποιά είναι η πιθανότητα σε 10 υποψήφιους τουλάχιστον οι 2 να απαντήσουν το τεστ σε χρόνο που δεν θα υπερβαίνει τα 18 λ.;

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>

5α) Η πιθανότητα ο Η/Υ να είναι ελαττωματικός είναι (από το θεώρημα ολικής πιθανότητας)

$P(E) = P(E|T_1)\,P(T_1) + P(E|T_2)\,P(T_2)$ οπότε $0{,}034 = 0{,}04 \,.\, 0{,}7 + P(E|T_2) \,.\, 0{,}3$,

συνεπώς

i) λύνοντας ως προς $P(E|T_2)$ έχουμε $P(E|T_2) = (0{,}034 - 0{,}04 \,.\, 0{,}7) / 0{,}3 = 0{,}006 / 0{,}3 = 0{,}02$ και από τον τύπο του Bayes έχουμε ότι

ii) $P(T_2|E) = \dfrac{P(E|T_2)P(T_2)}{P(E)} = \dfrac{0,02.(0,3)}{0,034} = \dfrac{3}{17} \approx 0,18$.

5β) Έστω X ο χρόνος απάντησης του τεστ. Τότε η $Z = \dfrac{X-30}{8}$ ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή και επομένως με τυποποίηση έχουμε:

i)

$18 \le X \le 42 \Leftrightarrow \dfrac{18-30}{8} \le \dfrac{X-30}{8} \le \dfrac{42-30}{8} \Leftrightarrow \dfrac{-12}{8} \le Z \le \dfrac{12}{8} \Leftrightarrow -1,5 \le Z \le 1,5$ και

$P(18 \le X \le 42) = P(-1,5 \le Z \le 1,5) = P(Z \le 1,5) - P(Z < -1,5) = \Phi(1,5) - \Phi(-1,5) = \Phi(1,5) - (1-\Phi(1,5)) =$

$= 2\Phi(1,5) - 1 = 2(0,9332) - 1 = 0,8664$. Άρα το ποσοστό των υποψηφίων με χρόνο απάντησης του τεστ μεταξύ 18 και 42 λ. είναι *86,64 %* .

ii) Ζητάμε $P(X \le 18)$. Όπως πριν έχουμε: $P(X \le 18) = P(Z \le -1,5) = \Phi(-1,5) = 1 - \Phi(1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$

iii) Έστω a ο χρόνος διάρκειας του τεστ ώστε το 80% των υποψηφίων να προλάβει να ολοκληρώσει το τεστ Θέλουμε να βρούμε το a ωστε $P(X < a) = 0,80$ (1).

Τυποποιούμε την συνθήκη $X < a$ ως εξής: $X < a \Leftrightarrow \dfrac{X-30}{8} < \dfrac{a-30}{8} \Leftrightarrow Z < \dfrac{a-30}{8}$ και επομένως

η (1) ισοδυναμεί με $P\left(Z < \dfrac{a-30}{8}\right) = 0,80$ δηλαδή $\Phi\left(\dfrac{a-30}{8}\right) = 0,80$ και αφού δίδεται $\Phi(0.84) = 0.80$

έχουμε $\dfrac{a-30}{8} = 0,84$ και λύνοντας a $a = 30 + 6,72 = 36,72$. Άρα ο ζητούμενος χρόνος είναι $\alpha = 36,72$ λ. ώστε το 80% των υποψηφίων να προλάβει να ολοκληρώσει το τεστ.

iv) Αν Y είναι ο αριθμός των υποψηφίων (από τους 10) οι οποίοι θα ολοκληρώσουν το τεστ σε χρόνο που δεν θα υπερβαίνει τα 18 λ., τότε η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με $n=10$ δοκιμές (υποψήφιοι) και πιθανότητα επιτυχίας (να ολοκληρώσουν το τεστ σε χρόνο το πολύ 18 λ.) $p = P(X \le 18) = 0,0668$ (ερώτημα **ii**). Δηλαδή $Y \sim B(n,p) = B(10, 0.0668)$ και πιθανότητα αποτυχίας $q = 1-p$. Έτσι, για $k = 1,2,...,n$

$$P(Y=k) = \binom{10}{k} p^k q^{10-k} = \binom{10}{k} p^k (1-p)^{10-k} =$$

$$= \binom{10}{k} 0,0668^k (1-0,0668)^{10-k} = \binom{10}{k} 0,0668^k \cdot 0,9332^{10-k}.$$

Ζητάμε την πιθανότητα να έχουμε τουλάχιστον 2 επιτυχίες σε 10 δοκιμές (τουλάχιστον 2 υποψήφιους από τους 10). Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα $P(Y \ge 2)$ είναι:

$$P(Y \ge 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - [P(Y=0) + P(Y=1)] =$$

$$= 1 - P(Y=0) - P(Y=1) =$$

$$= 1 - \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10} - \binom{10}{1} p^1 (1-p)^9 =$$

$$= 1 - 0,5009 - 0,3585 = 1 - 0,8594 = 0,1406$$

---------ΤΕΛΟΣ--------