Κεφάλαιο 7

Βασικά Θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τα βασικά θεωρήματα του διαφορικού λογισμού καθώς και με προβλήματα που μπορούν να επιλυθούν χρησιμοποιώντας τις παραγώγους μίας συνάρτησης.

7.1 Το Θεώρημα Μέσης Τιμής

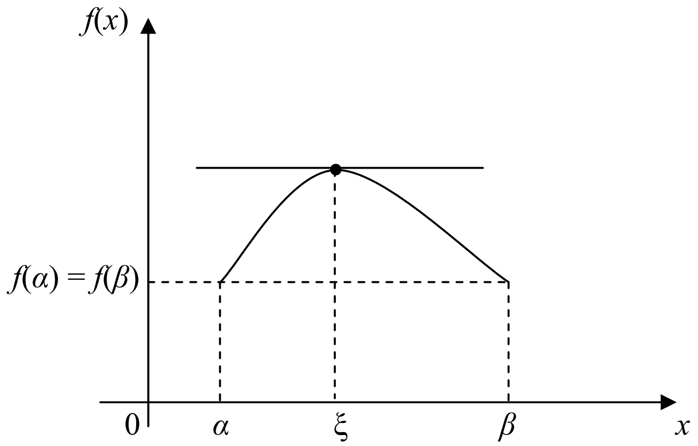
Στην Παράγραφο αύτη θα μιλήσουμε για το πλέον βασικό θεώρημα του Διαφορικού Λογισμού το **Θεώρημα Μέσης Τιμής**. Πριν όμως κάνουμε αυτό θα διατυπώσουμε το Θεώρημα του Rolle, το οποίο και είναι μία ειδική περίπτωση του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής .

7.1.1 Θεώρημα (Θεώρημα του Rolle)

Εάν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $\alpha \le x \le \beta$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $\alpha < x < \beta$ και εάν $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο ξ ανάμεσα στα α και β του όπου η $f'(x)$ είναι μηδέν. Δηλαδή

$$f'(\xi) = 0 \quad \text{για κάποιο } \xi, \qquad \alpha < \xi < \beta .$$

Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο σημείο $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $x = \xi$ είναι παράλλήλη προς τον άξονα των x .



7.1.2 Παραδείγματα

1) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$ στο διάστημα [1,3]. Να βρεθούν οι τιμές του ξ που ικανοποιούν το θεώρημα του Rolle στο διάστημα αυτό.

Λύση

$f(1) = 1^2 - 4\times 1 + 5 = 2$ και $f(3) = (3)^2 - 4\times 3 + 5 = 2$. Άρα $f(\alpha) = f(\beta) = 2$

$f'(x) = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2\xi - 4 = 0 \Leftrightarrow \xi = 2$

Επομένως η τιμή του ξ που ικανοποιεί το θεώρημα του Rolle στο διάστημα [1,3] είναι η $\xi = 2$

2) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3-4x$ στο διάστημα [-2,2]. Να βρεθούν οι τιμές του ξ που ικανοποιούν το θεώρημα του Rolle στο διάστημα αυτό.

Λύση

$f(-2)=(-2)^3+8=0$ και $f(2)=(2)^3-8=0$. Άρα $f(\alpha)=f(\beta)=0$.

$$f'(x)=3x^2-4=0 \Leftrightarrow 3\xi^2-4=0 \Leftrightarrow \xi=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Επομένως οι τιμές του ξ που ικανοποιούνε του θεώρημα του Rolle στο διάστημα [-2,2] είναι $\xi_1=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ και $\xi_2=+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

7.1.3 Θεώρημα (Θεώρημα Μέσης Τιμής)

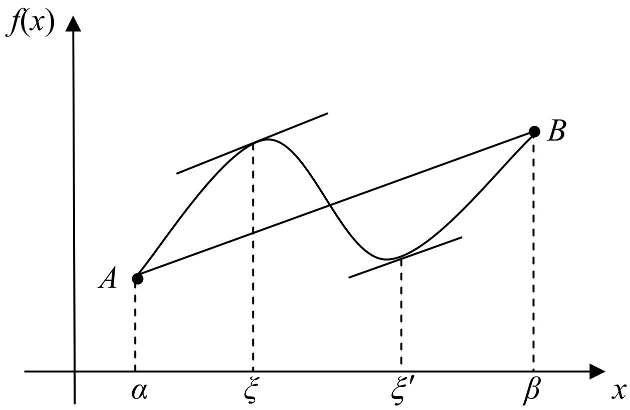
Εάν μία συνάρτηση $f(x)$ είναι

- *συνεχής στο διάστημα $\alpha \le x \le \beta$ και*
- *παραγωγίσιμη στο διάστημα $\alpha < x < \beta$*

τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο ξ ανάμεσα στα α και β τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο σημείο $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $x=\xi$ είναι παράλλήλη στην χορδή *AB*.



7.1.4 Παραδείγματα

1) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 1$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα [1,2] και να βρεθούν οι τιμές του ξ που ικανοποιούν το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα αυτό.

Λύση

Η $f(x)$ είναι πολυώνυμο. Άρα είναι συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2). Επομένως η $f(x)$ ικανοποιεί τις υποθέσεις (και συμπεράσματα) του Θ.Μ.Τ.

$f'(x) = 3x^2$, $f'(\xi) = 3\xi^2$, $f(a) = f(1) = 2$ και $f(\beta) = f(2) = 9$

Άρα

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow 3\xi^2 = 7 \Leftrightarrow \xi = \pm\sqrt{7/3}\,.$$

Μόνο το $\xi = \sqrt{7/3}$ βρίσκεται στο διάστημα (1,2) και επομένως είναι και η τιμή η οποία και ικανοποιεί τις υποθέσεις (και συμπεράσματα) του Θ.Μ.Τ.

2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3$ στο διάστημα [-2,2]. Να βρεθούν οι τιμές του ξ που ικανοποιούν το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα αυτό.

Λύση

$f'(x) = 3x^2$, $f'(\xi) = 3\xi^2$, $f(a) = (-2)^3 = -8$ και $f(\beta) = (2)^3 = 8$

Άρα

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow 3\xi^2 = \frac{8-(-8)}{2-(-2)} = \frac{16}{4} \Leftrightarrow \xi = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}\,.$$

Σημείωση *Στο παράδειγμα αυτό υπάρχουν δύο τιμές του ξ, στο διάστημα [-2,2], που ικανοποιούν το Θ.Μ.Τ.*

Ασκήσεις 7.1

1) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα που αναφέρεται, και στη συνέχεια για εκείνες που ισχύει, να βρείτε όλα τα $\xi \in (\alpha, \beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$

   i) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $[0,2]$

   ii) $f(x) = \sin(3x)$, $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$

   iii) $f(x) = 1 + \cos(2x)$, $\left[0, \pi\right]$

   iv) $f(x) = |x|$, $[-1,1]$

2) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα που αναφέρεται, και στη συνέχεια για εκείνες που ισχύει, να βρείτε όλα τα $\xi \in (\alpha, \beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(a)}{\beta - \alpha}$

   i) $f(x) = x^2 + 2x$, $[0,4]$

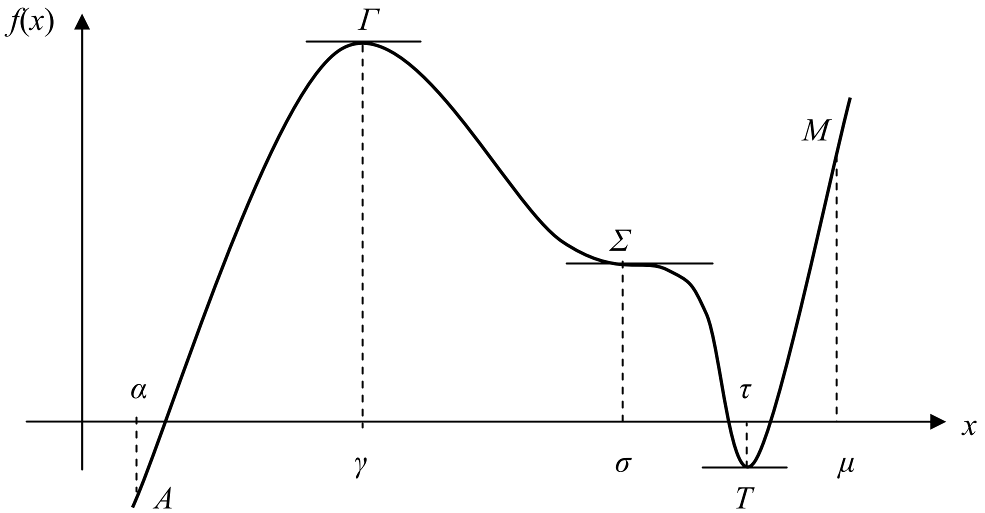
   ii) $f(x) = 3\sin(2x)$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

   iii) $f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x \le -1 \\ x^3 - x, & x > 1 \end{cases}$, $[-3,2]$

7.2 Μονοτονία Συναρτήσεων

Μία συνάρτηση $f(x)$ λέγεται "αύξουσα" στο σημείο $x = x_0$ εάν για οποιοδήποτε θετικό και αρκετά μικρό αριθμό h, είναι $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$. Μία συνάρτηση $f(x)$ λέγεται "φθίνουσα" στο σημείο $x = x_0$ εάν για οποιοδήποτε θετικό και αρκετά μικρό αριθμό h, είναι $f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h)$.

Εάν $f'(x_0) > 0$, τότε η συνάρτηση $f(x)$ είναι αύξουσα στο σημείο $x = x_0$. Εάν $f'(x_0) < 0$ είναι φθίνουσα στο σημείο $x = x_0$. Εάν $f'(x_0) = 0$,τότε το σημείο $x = x_0$ λέγεται σημείο στάσης ή κρίσιμο σημείο.



Στο παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι η συνάρτηση ανεβαίνει (είναι αύξουσα) στα διαστήματα $\alpha < x < \gamma$ και $\tau < x < \mu$. Η συνάρτηση έχει κρίσιμα σημεία στα $x = \gamma$, $x = \sigma$ και $x = \tau$, ενώ οι εφαπτόμενες στα σημεία Γ, Σ και T είναι οριζόντιες.

7.2.1 Θεώρημα
Έστω η συνάρτηση $f(x)$, η οποία είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα Δ.

- *Εάν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f(x) είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.*
- *Εάν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.*

Απόδειξη Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση όπου $f'(x) > 0$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathit{\Delta}$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Στο κλειστό διάστημα $\left[x_1, x_2\right]$ η $f(x)$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)\left(x_2 - x_1\right)$$

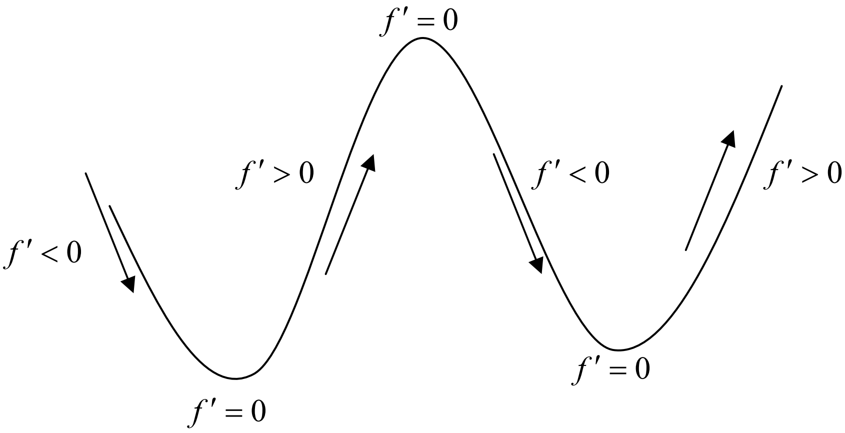
Επειδή $f'(x) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$. □

Ο αναγνώστης μπορεί αναλόγως να αποδείξει και την περίπτωση όπου $f'(x) < 0$.

7.3 Ακρότατα Συνάρτησης

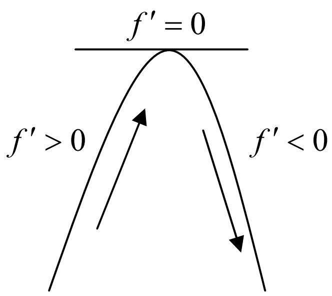
Η παράγωγος μίας συνάρτησης σ' ένα σημείο καθορίζει την κλίση της γραφικής της παράστασης στο συγκεκριμένο αυτό σημείο. Η κλίση της καμπύλης μπορεί να πάρει την τιμή μηδέν σε πολλά σημεία. Μελετώντας την συμπεριφορά της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης, δεξιά και αριστερά από αυτά τα σημεία παίρνουμε τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε για την γραφική της παράσταση.

Εάν η παράγωγος $f'(x)$ μίας συνάρτησης $y = f(x)$ είναι συνεχής τότε η $f'(x)$ μπορεί να περάσει από αρνητικές σε θετικές τιμές μόνο περνώντας από το μηδέν.
Αυτή η συμπεριφορά φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

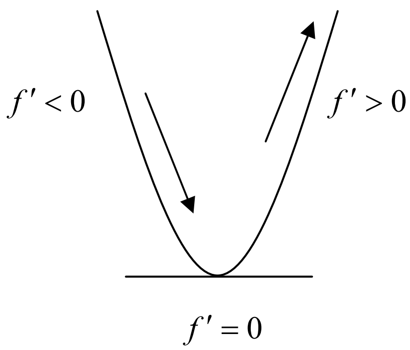


Εάν η $f'(x)$ αλλάζει από θετική σε αρνητική τιμή καθώς το x περνά από τα αριστερά στα δεξιά ενός σημείου, τότε η τιμή της $f(x)$ στο σημείο αυτό είναι τοπικό μέγιστο. Ομοίως εάν η $f'(x)$ αλλάζει από αρνητική σε θετική τιμή καθώς το x περνά από τα αριστερά στα δεξιά ενός σημείου, τότε η τιμή της $f(x)$ στο σημείο αυτό είναι τοπικό ελάχιστο. Οι δυο αυτές περιπτώσεις φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.

Τοπικό Μέγιστο



Τοπικό Ελάχιστο



7.3.1 Θεώρημα (Fermat)

Έστω μία συνάρτηση f(x) ορισμένη στο διάστημα Δ και x_0 *ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Εάν η f(x) παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο* x_0 *και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό τότε*

$$f'(x) = 0.$$

Απόδειξη Ας υποθέσουμε ότι η *f(x)* παρουσιάζει στο σημείο $x = x_0$ τοπικό μέγιστο. Επειδή το $x = x_0$ είναι εσωτερικό του *Δ* και η συνάρτηση *f(x)* παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\left(x_0 - \delta, x_0 + \delta\right) \subseteq \Delta$ και $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in \left(x_0 - \delta, x_0 + \delta\right)$.

Επιπλέον, η *f(x)* είναι παραγωγίσιμη στο $x = x_0$ και επομένως

$$f'(x_0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Άρα,

- εάν $x \in \left(x_0 - \delta, x_0\right)$ τότε $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \qquad (1)$$

- εάν $x \in \left(x_0, x_0 + \delta\right)$ τότε $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \qquad (2)$$

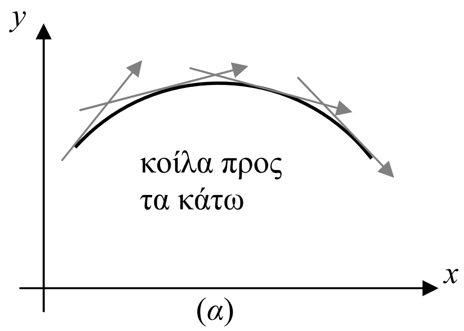
Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $f'(x) = 0$. □

7.4 Κυρτότητα – Σημεία Καμπής

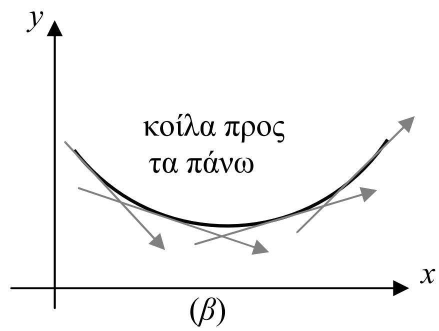
Οι πληροφορίες που μας δίνει το πρόσημο της πρώτης παραγώγου μίας συνάρτησης, μας βοηθάει για να δούμε κατά πόσο συνάρτηση είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Η πληροφορία αυτή δεν είναι όμως ικανή να μας πει τίποτα για την κυρτότητα της συνάρτησης αυτής .

Για να εξετάσουμε την κυρτότητα μίας καμπύλης ας δούμε για παράδειγμα την συμπεριφορά των εφαπτόμενων γραμμών πάνω στις καμπύλες που δύνονται στα παρακάτω δύο σχήματα (α) και (β).

Η καμπύλη του σχήματος (α) βρίσκετε κάτω από τις εφαπτόμενες γραμμές και λέμε ότι στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω. Καθώς το x αυξάνει, το πρόσημο της $f'(x)$ ελαττώνεται. Σε αντίθεση η καμπύλη του σχήματος (β) βρίσκετε πάνω από τις εφαπτόμενες γραμμές και λέμε ότι στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω. Καθώς το x αυξάνει, το πρόσημο της $f'(x)$ αυξάνει.



(α)



(β)

7.4.1 Ορισμός

Έστω μία συνάρτηση $f(x)$ συνεχής σ΄ ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι

- *Η συνάρτηση $f(x)$ στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω ή είναι κυρτή στο Δ εάν η $f'(x)$ είναι αύξουσα στο εσωτερικό του Δ*

- *Η συνάρτηση $f(x)$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάνω ή είναι κοίλη στο Δ εάν η $f'(x)$ είναι φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.*

Αφού η $f''(x)$ είναι η παράγωγος της $f'(x)$ έπεται ότι η $f'(x)$ θα αυξάνεται στο ανοικτό διάστημα (α,β) εάν η $f''(x)>0$ για όλα τα $x\in(\alpha,\beta)$ και η $f'(x)$ θα ελαττώνεται στο ανοικτό διάστημα (α,β) εάν η $f''(x)<0$ για όλα τα $x\in(\alpha,\beta)$.

Η μελέτη μίας συνάρτησης ως προς τα κοίλα και κυρτά διευκολύνεται με την βοήθεια του επόμενου θεωρήματος που είναι άμεση συνέπεια του προηγούμενου ορισμού και του θεωρήματος της μονοτονίας μίας συνάρτησης.

7.4.2 Θεώρημα

Έστω μία συνάρτηση $f(x)$ συνεχής στο διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.

- *Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η συνάρτηση $f(x)$ είναι κυρτή στο Δ.*
- *Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η συνάρτηση $f(x)$ είναι κοίλη στο Δ.*

7.4.3 Παραδείγματα

Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω δύο συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες.

1) $f(x) = x^3$ 2) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

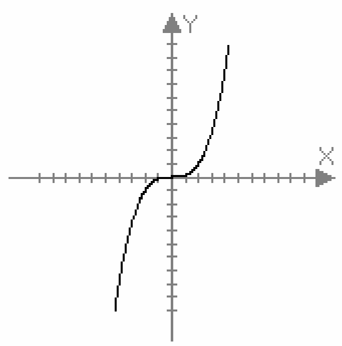
Λύση

1) $f'(x) = 3x^2$ και $f''(x) = 6x$

Εάν $x < 0$, $f''(x) < 0$ και η συνάρτηση είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 0)$

Εάν $x > 0$, $f''(x) > 0$ και η συνάρτηση είναι κυρτή στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Η συμπεριφορά αυτή φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

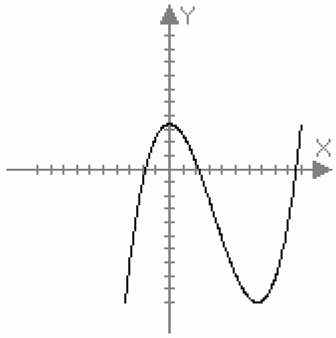


2) $f'(x) = 3x^2 - 6x$ και $f''(x) = 6x - 6$

Η συνάρτηση είναι κυρτή όταν $6x - 6 > 0$, δηλαδή όταν $x > 1$ και κοίλη όταν $6x - 6 < 0$, δηλαδή όταν $x < 1$.

Επομένως, η συνάρτηση είναι κυρτή στο διάστημα $(1, +\infty)$ και κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 1)$

Η συμπεριφορά αυτή φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Υπάρχουν όμως και σημεία στο γράφημα μίας συνάρτησης $f(x)$ στα οποία η κυρτότητά της συνάρτησης αλλάζει. Στα σημεία αυτά θα λέμε ότι η γραφική παράσταση της $f(x)$ ''κάμπτεται ''. Τα σημεία αυτά ονομάζονται ***σημεία καμπής***.

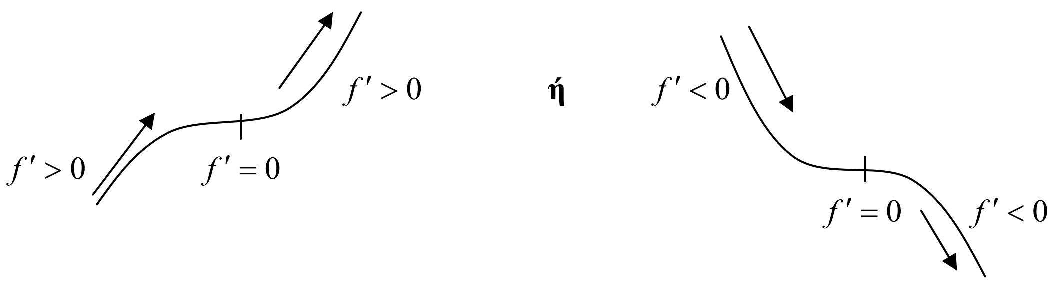
7.4.4 Ορισμός

Έστω μία συνάρτηση $f(x)$ παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) και $x_0 \in (\alpha,\beta)$. *Αν*

- *η συνάρτηση* $f(x)$ *είναι κυρτή στο* (α, x_0) *και κοίλη στο* (x_0,β) *ή αντιστρόφως και*
- *η καμπύλη της συνάρτησης* $f(x)$ *έχει εφαπτόμενη στο σημείο* $A(x_0, f(x_0))$

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ *ονομάζεται "σημείο καμπής" της γραφικής παράστασης της συνάρτησης* $f(x)$.

Οι δυο αυτές περιπτώσεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



7.4.4 Θεώρημα

Εάν το σημείο $A\left(x_0, f(x_{0)}\right)$*είναι σημείο καμπής της γραφικής παράσταση της συνάρτησης* $f(x)$ και η συνάρτηση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x) = 0$.

Στα παραδείγματα 7.4.3 το σημείο $(0,0)$ είναι σημείο καμπής για την 1) και το σημείο $(1,-1)$ είναι σημείο καμπής για την 2) αντίστοιχα.

7.5 Σχεδιασμός Γραφικών Παραστάσεων

Για να μπορέσουμε να σχεδιάσουμε μία συνάρτηση θα πρέπει πρώτα απ' όλα να βρούμε τα μέγιστα, τα ελάχιστα και τα σημεία καμπής που πιθανώς να υπάρχουν .

Για την διαδικασία αυτή μπορούμε να χρησιμοποιούμε ένα από τα δύο ακόλουθα κριτήρια.

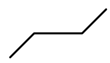
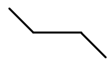
Α) Το Κριτήριο της Πρώτης Παραγώγου

Για να βρούμε τα ακρότατα μίας συνάρτησης ακολουθούμε τα εξής βήματα:

Βήμα 1ο Βρίσκουμε την $f'(x)$.

Βήμα 2ο Θέτουμε $f'(x) = 0$ και λύνουμε την ισότητα.

Βήμα 3ο Ελέγχουμε από δεξιά και αριστερά το σημείο. Εάν το πρόσημο της $f'(x)$ είναι θετικό από αριστερά και αρνητικό από δεξιά τότε έχουμε τοπικό μέγιστο. Εάν το πρόσημο της $f'(x)$ είναι αρνητικό από αριστερά και θετικό από δεξιά τότε έχουμε τοπικό ελάχιστο. Τέλος εάν το πρόσημο της $f'(x)$ είναι θετικό από αριστερά και από δεξιά ή αρνητικό από αριστερά και από δεξιά τότε έχουμε σημείο καμπής. Δηλαδή,

Πρόσημο	Μέγιστο	Ελάχιστο	Σημείο Καμπής
$f'(x)$	+ 0 -	- 0 +	+ 0 + ή - 0 -
$f'(x)$			 

Β) Το Κριτήριο της Δεύτερης Παραγώγου

Για να βρούμε τα ακρότατα μίας συναρτήσεις ακολουθούμε τα εξής βήματα:

Βήμα 1ο Βρίσκουμε την $f'(x)$ και την $f''(x)$ της συνάρτησης .

Βήμα 2ο Θέτουμε $f'(x) = 0$ και λύνουμε την ισότητα. Εάν :

- $f''(x) < 0$ το σημείο είναι τοπικό μέγιστο (max)
- $f''(x) > 0$ το σημείο είναι τοπικό ελάχιστο (min).

Βήμα 3ο Για τα σημεία καμπής θέτουμε $f''(x) = 0$ και λύνουμε την ισότητα . Παίρνουμε τιμές αριστερά και δεξιά του x. Εάν η $f''(x)$ αλλάζει πρόσημο τότε έχουμε σημείο καμπής . Δηλαδή,

Πρόσημο	Αριστερά του x	Δεξιά του x
$f''(x)$	+	-
$f''(x)$	_	+

Σημείωση *Είναι φανερό ότι το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου μας εξασφαλίζει την εύρεση των σημείων καμπής μιας συνάρτησης πολύ πιο εύκολα από το κριτήριο της πρώτης παραγώγου.*

7.5.1 Παράδειγμα

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$ και να δοθεί η γραφική της παράσταση.

.

Λύση

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 \quad \text{και} \quad y'' = 12x + 6$$

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \Rightarrow 6(x-1)(x+2) = 0$$

Άρα,

$x = 1$ και $x = -2$.

Για $x = 1$, $y'' = 12 + 6 = 18 > 0$ άρα τοπικό ελάχιστο.

Για $x = -2$, $y'' = -24 + 6 = -18 < 0$ άρα τοπικό μέγιστο.

Άρα το σημείο (1,0) είναι ελάχιστο και το σημείο (-2,27) είναι μέγιστο.

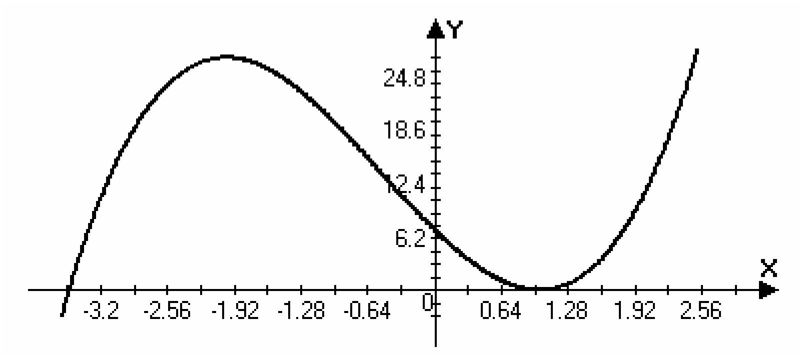
Για την εύρεση του σημείου καμπής έχουμε :

$$y'' = 12x + 6 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

	-1/2				-1/2	
Πρόσημο	-1	0	**ή**	Πρόσημο	-1	0
$\frac{d^2y}{dx^2}$	-	+		$\frac{dy}{dx}$	-	-

Άρα το σημείο (-1/2 , 27/2) είναι σημείο καμπής.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$ δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Ασκήσεις 7.5

1. Να βρεθούν τα τοπικά μέγιστα, τοπικά ελάχιστα και σημεία καμπής των παρακάτω συναρτήσεων

a) $f(x)=x^3-3x$

b) $f(x)=x+\dfrac{4}{x^2}$

c) $f(x)=x-\dfrac{4}{x^2}$

d) $f(x)=x^2(3-x)$

e) $f(x)=(x-3)(2x+1)$

f) $f(x)=x^3$

g) $f(x)=x^4$

h) $f(x)=x^2(x^2-2)$

i) $f(x)=x^2(3+2x-3x^2)$

2. Να σχεδιαστούν τα γραφήματα των παρακάτω συναρτήσεων

a) $f(x)=x^2-x^3$

b) $f(x)=1-x^4$

c) $f(x)=x^2-x+3$

d) $f(x)=3+24x-21x^2-4x^3$

e) $f(x)=2x^4$

f) $f(x)=3x^5-5x^3$

g) $f(x)=x(x-1)^3$

h) x^4+2x^3-1

k) $f(x)=(x-1)^4$

7.6 Προβλήματα Μεγίστου και Ελαχίστου

Προβλήματα που απαιτούν ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση μίας συνάρτησης μπορούν να λυθούν χρησιμοποιώντας παραγώγους. Παρακάτω θα δούμε παραδείγματα ελαχιστοποίησης και μεγιστοποίησης και στην συνέχεια θα συνοψίσουμε τις τεχνικές που χρησιμοποιούμε με κάποιους κανόνες.

7.5.1 Παραδείγματα

1) Ένας παραγωγός μπορεί και πουλάει x προϊόντα την εβδομάδα στην τιμή $P = 200 - 0.01x$. Το κόστος για την παραγωγή των x αυτών προϊόντων είναι $y = 50x + 20000$ ευρώ. Πόσα προϊόντα πρέπει να παράγει ο παραγωγός για να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος ; Να βρεθεί το κέρδος αυτό.

Λύση

Τα συνολικά εβδομαδιαία έσοδα του παραγωγού από την πώληση των προϊόντων του είναι $x \times P$. Δηλαδή,

$$xP = x\left(200 - 0.01x\right) = 200x - 0.01x^2 .$$

Το κέρδος (T) του παραγωγού είναι τα **έσοδά του** μείον το **κόστος του**. Δηλαδή,

$$T = xp - y = 200x - 0.01x^2 - (50x - 20000) = 150x - 0.01x^2 - 20000 .$$

Παραγωγίζουμε ως προς x,

$$\frac{dT}{dx} = 150 - 0.02x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{150}{0.02} = 7500$$

Άρα,

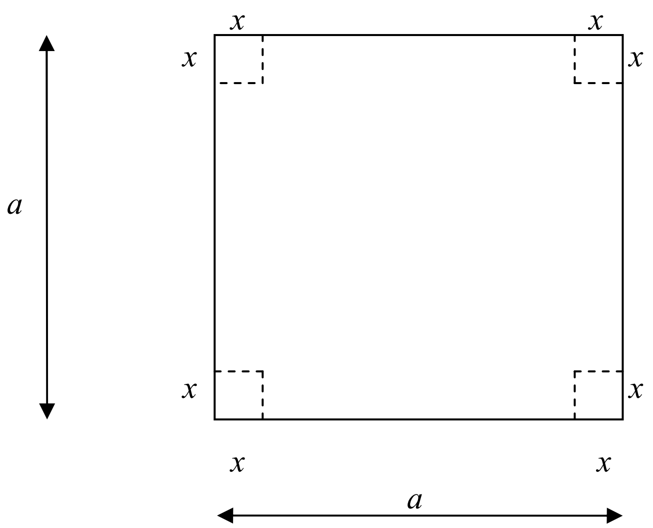
$$\frac{d^2T}{dx^2} = -0.02 < 0 \quad (\textit{μέγιστο}).$$

Δηλαδή, ο παραγωγός θα πρέπει να παράγει 7500 προϊόντα εβδομαδιαίως για να έχει το μέγιστο κέρδος. Επομένως το μέγιστο κέρδος του παραγωγού θα είναι

$$T = 150(7500) - 0.01(7500)^2 - 20000 = 582500 \text{ ευρώ.}$$

2) Ένα τετράγωνο φύλλο λαμαρίνας πρόκειται να χρησιμοποιηθεί για να κατασκευαστεί ένα ανοικτό κουτί (χωρίς καπάκι) κόβοντας μικρά τετράγωνα από κάθε γωνία και λυγίζοντας τις πλευρές του. Πόσο πρέπει να είναι το μέγεθος του τετραγώνου που θα κόψουμε από κάθε γωνία έτσι ώστε να έχει όσο το δυνατό μεγαλύτερο όγκο ; Να βρεθεί ο μέγιστος όγκος.

Λύση



Έστω ο όγκος του κουτιού = y. Επομένως,

$$y = \text{μήκος x πλάτος x ύψος} = (a-2x)^2 x, \quad \text{και} \quad 0 < x < \frac{a}{2}$$

Παραγωγίζουμε ως προς x,

$$\frac{dy}{dx} = (a-2x)^2 + x.2.(a-2x).(-2) = (a-2x)(a-6x) \quad \text{και}$$

$$\frac{d^2x}{dx^2} = 24x - 8a = 24(x - \frac{a}{3})$$

Όταν $y' = 0$ τότε $x = \frac{a}{6}$ ή $x = \frac{a}{2}$

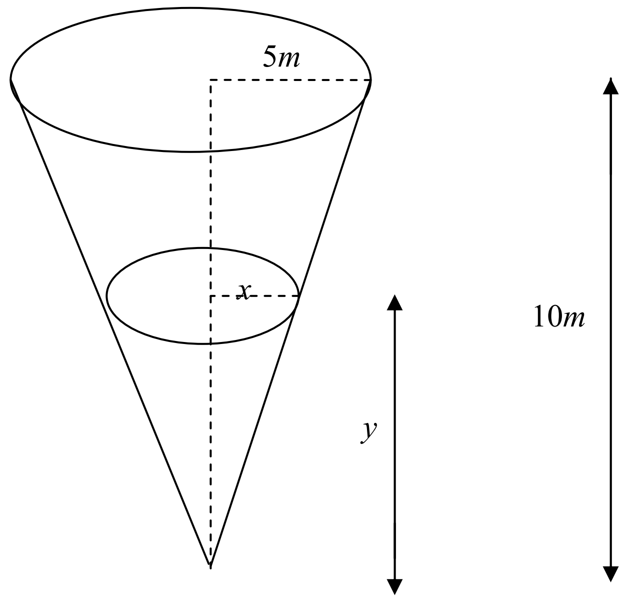
Για $x = \frac{a}{6}$ $\frac{d^2y}{dx^2} = -4a < 0$. Άρα είναι μέγιστο (max).

Δηλαδή, για $x = \frac{a}{6}$ ο όγκος του κιβωτίου γίνεται μέγιστος. Επομένως ο μέγιστος όγκος είναι ,

$$y = \left(a - 2\frac{a}{6}\right)^2 \times \frac{a}{6} = \frac{8}{108}a^3 \quad \text{κυβικές μονάδες.}$$

3) Έστω μία κωνική δεξαμενή στην οποία τρέχει νερό με σταθερή ταχύτητα 2 κυβικών μέτρων το λεπτό. Πόσο γρήγορα θα ανεβεί το ύψος του νερού την στιγμή που το νερό έχει 6 μέτρα βάθος ;

Λύση



Έστω,

$V(t)$ = Ο όγκος του νερού στην δεξαμενή σε χρόνο t λεπτά .

$x(t)$ = Η ακτίνα σε μέτρα (m) του κύκλου, που είναι η επιφάνεια του νερού, σε χρόνο t λεπτά .

$y(t)$ = Το βάθος σε μέτρα (m) του νερού της δεξαμενής σε χρόνο t λεπτά .

Οι διαστάσεις της δεξαμενής είναι σταθερές καθώς και ο ρυθμός με τον οποίον τρέχει το νερό στη δεξαμενή. Επομένως,

$$\frac{dV}{dt} = 2 \ m^3/\min .$$

Ζητάμε να βρούμε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ όταν $y = 6$. Από τον τύπο του όγκου ενός κώνου $\left(V = \frac{h}{3}\pi r^2 \right)$ μπορούμε να βρούμε την σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές μας .

Έχουμε δηλαδή,

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

Τώρα από τα όμοια τρίγωνα στο σχήμα μας έχουμε ότι

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \quad \text{ή} \quad x = \frac{1}{2} y .$$

Επομένως έχουμε

$$V = \frac{1}{12}\pi y^3$$

Παραγωγίζοντας ως προς t και τα δύο μέλη έχουμε

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4}\pi y^2 \frac{dy}{dt} \quad \textbf{ή} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{4}{\pi y^2}\frac{dV}{dt}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $\frac{dV}{dt} = 2$ και ότι $y = 6$. Επομένως,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2}{9\pi} \approx 0.071\ m/\min .$$

Στρατηγική Λύσης Προβλημάτων

1. *Σχεδιάζουμε το σχήμα για το πρόβλημα μας*. Προσέχουμε τι μεταβάλλεται και τι δεν μεταβάλλεται .
2. *Σημειώνουμε τι μας ζητείται από το πρόβλημα μας* .
3. *Ονομάζουμε τις υπόλοιπες μεταβλητές και σταθερές*. Τις εντοπίζουμε στο σχήμα μας. Βρίσκουμε τυχόν αριθμητικές σχέσεις που τις συσχετίζουν.
4. Γράφουμε τις εξισώσεις που συσχετίζουν μεταβλητές και σταθερές .
5. *Αντικαθιστούμε εάν χρειάζεται και παραγωγίζουμε.*

Ασκήσεις 7.6

1) Ένα σφαιρικό μπαλόνι φουσκώνεται έτσι ώστε ο όγκος του να αυξάνεται με σταθερή ταχύτητα $2\ cm^3/s$. Να βρεθεί το πόσο γρήγορα αυξάνεται η ακτίνα όταν ο όγκος του μπαλονιού είναι 50 cm^3 (Όγκος σφαίρας $V=\frac{4}{3}\pi r^3$).

2) Ένας μοχλός (Μ) βρίσκεται σε ύψος 22 μέτρων πάνω από το έδαφος και ένα σχοινί είναι περασμένο από αυτόν. Στο ένα άκρο του σχοινιού προσδένουμε κάποιο βάρος (Β) και το άλλο άκρο του το κρατά κάποιος άνθρωπος. Σε μία δεδομένη στιγμή η απόσταση (x) του ανθρώπου (A) από την προβολή (O) του μοχλού στο έδαφος ισούται με 15 μέτρα και ο άνθρωπος απομακρύνεται από τον μοχλό. Ο άνθρωπος κρατά το σχοινί σε ύψος 2 μέτρων πάνω από το έδαφος και περπατά σε ευθεία γραμμή και με ταχύτητα $6\ m/s$. Αν το μήκος του σχοινιού είναι 45 μέτρα, πόσο γρήγορα υψώνεται το βάρος στην δεδομένη αυτή στιγμή ;

3) Το μήκος των πλευρών ενός φύλλου αλουμινίου είναι 8 cm και 3 cm αντίστοιχα. Ένα τετράγωνο, πλευράς x, κόβεται από κάθε γωνία του φύλλου αυτού και από το υπόλοιπο κομμάτι φτιάχνουμε ένα ανοικτό κουτί . **(α)** Να δείξετε ότι ο όγκος του κουτιού δίνετε από την σχέση $V=4x^3-22x^2+24x\ \ cm^3$. **(β)** Να βρεθεί η τιμή του x για την οποία το κουτί έχει το μέγιστο όγκο και να βρεθεί η τιμή του.

4) Μία μη-ομοιόμορφη μεταλλική αλυσίδα κρέμεται μεταξύ δύο τοίχων. Το ύψος της αλυσίδας από το έδαφος δίνεται από τον τύπο $h(x)=e^{-2x}+e^x$, $0\le x\le 2$, όπου x είναι η απόσταση στο έδαφος μεταξύ των δύο τοίχων . Πόσο κοντά στο έδαφος βρίσκεται η αλυσίδα ;

5) Το τελικό κόστος (C) σε ευρώ μίας εταιρίας, για την κατασκευή x τεμαχίων κάποιου συγκεκριμένου είδους δίνεται από την σχέση $C=600+20x$, $0\le x\le 100$, ενώ τα έσοδα (R) από την πώληση αυτών των τεμαχίων δίνεται από την σχέση $R=x(100-x)$, $0\le x\le 100$.

(α) Να σχεδιαστούν τα γραφήματα και των δύο συναρτήσεων στους ίδιους καρτεσιανούς άξονες .
(β) Να βρεθούν οι τιμές του x που ικανοποιούν και τις δύο συναρτήσεις.
(γ) Για ποίες τιμές του x η εταιρία θα έχει μέγιστο κέρδος ;
(δ) Να βρεθεί σχέση για το κέρδος (P) που θα έχει η εταιρία μετά την κατασκευή x τεμαχίων και να βρεθεί το μέγιστο κέρδος.

7.7 Το Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής

Το γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής ή το δεύτερο Θεώρημα Μέσης Τιμής όπως αλλιώς ονομάζεται συνδέει τις τιμές δύο συναρτήσεων με τις τιμές των παραγώγων τους. Η ιδιότητα αυτή αποτελεί το κλειδί στον κανόνα L' Hospital που θα εξετάσουμε στην επόμενη παράγραφο (7.8).

7.7.1 Θεώρημα

Εάν οι συναρτήσεις f και g

(i) *είναι συνεχείς στο* $[\alpha,\beta]$
(ii) *είναι παραγωγίσιμες στο* (α,β)
(iii) *οι* f' *και* g' *δεν έχουν ρίζες στο* (α,β) *και*
(iv) $g(\alpha)\neq g(\beta)$

τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ *τέτοιο ώστε*

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Απόδειξη Πρώτα απ' όλα $g(\beta)-g(\alpha)\neq 0$ διότι διαφορετικά από το Θεώρημα Μέσης Τιμής (7.1.3) θα είχαμε ότι $g'(x)=0$ για κάποιο σημείο $x\in(\alpha,\beta)$. Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβεί διότι $g'(x)\neq 0$ για κάποιο σημείο $x\in(\alpha,\beta)$.

Για δική μας ευκολία θα χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση

$$F(x)=\left[f(\beta)-f(\alpha)\right]g(x)-\left[g(\beta)-g(\alpha)\right]f(x)$$

Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής και παραγωγίσιμη εκεί που είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες οι $f(x)$ και $g(x)$. Ακόμα $F(\beta)=F(\alpha)=0$. Επομένως από το Θεώρημα Μέσης Τιμής (7.1.3) υπάρχει ένας αριθμός ξ ανάμεσα στο α και στο β για τον οποίο $F'(\xi)=0$. Δηλαδή,

$$F'(\xi)=\left[f(\beta)-f(\alpha)\right]g'(\xi)-\left[g(\beta)-g(\alpha)\right]f'(\xi)=0$$

ή

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}$$

□

7.8 Κανόνας L' Hospital

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τον κανόνα L' Hospital ο οποίος και μας παρέχει ένα σαφή σύνδεσμο ανάμεσα στις παραγώγους και στα όρια.

7.8.1 Θεώρημα (Κανόνας L' Hospital)
Εάν οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι

(i) *πλευρικά συνεχείς στο διάστημα [α,α+h]*
(ii) *παραγωγίσιμες στο διάστημα (α,α+h)*
(iii) *f(α) = g(α) = 0 και*
(iv) *υπάρχει το πλευρικό όριο*

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

τότε υπάρχει το πλευρικό όριο

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι το *x* βρίσκεται δεξιά του *α*. Το $g'(x)\neq 0$ και εφαρμόζοντας το γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής (7.7.1) στο διάστημα $[\alpha, x]$ θα υπάρχει ένας αριθμός ξ ανάμεσα στο *α* και στο *x* τέτοιος ώστε

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}$$

Αλλά το $f(\alpha)=g(\alpha)=0$ έτσι ώστε

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Καθώς το *x* πλησιάζει στο *α*, το *ξ* πλησιάζει στο *α*, επειδή βρίσκεται μεταξύ του *x* και του *α*. Άρα,

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to\alpha^+}\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \lim_{x\to\alpha^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Σημείωση *Αυτό αποδεικνύει τον κανόνα L' Hospital για την περίπτωση κατά την οποία το x πλησιάζει το α από τα δεξιά* (α^+). *Η περίπτωση το x να πλησιάζει το α από τα αριστερά* (α^-) *αποδεικνύεται με εφαρμογή του* γενικευμένου Θεωρήματος Μέσης Τιμής (7.7.1) στο κλειστό διάστημα $[x,\alpha]$, $x<\alpha$. □

Στην ουσία ο κανόνας L'Hospital μας βοηθάει να αντικαταστήσουμε ένα πρόβλημα ορίων με κάποιο άλλο πολύ πιο απλό. Για να εφαρμόσουμε τον κανόνα L'Hospital θα πρέπει να ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα :

Βήμα 1º Ελέγχουμε εάν το $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ είναι σε απροσδιόριστη μορφή. Εάν δεν είναι τότε ο κανόνας *L'Hospital* δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί.

Βήμα 2º Παραγωγίζουμε κάθε συνάρτηση (*f* και *g*) ξεχωριστά.

Βήμα 3º Βρίσκουμε το όριο $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Εάν το όριο ορίζεται τότε ισούται με το $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ διαφορετικά επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1, 2 και 3.

Ο κανόνας *L'Hospital* εφαρμόζεται στις ακόλουθες απροσδιόριστες μορφές: $0/0$, $\pm\infty/\pm\infty$, $0.(\pm\infty)$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^1, 1^∞.

Απροσδιόριστη Μορφή $0/0$

7.8.2 Παραδείγματα

1) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 2}\frac{2x}{1} = 4.$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-(x/2)}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}-1/2}{2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(-1/4)(1+x)^{-3/2}}{2} = -\frac{1}{8}$$

Απροσδιόριστη Μορφή ∞/∞

7.8.3 Παραδείγματα

1) $$\lim_{x\to \pi/2}\frac{\tan(x)}{1+\tan(x)} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to \pi/2}\frac{\sec^2(x)}{\sec^2(x)} = 1$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{1/\sin(x)} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{(-1/\sin(x))}\tan(x) = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\lim_{x\to 0}\tan(x) = -1(0) = 0$$

Απροσδιόριστη Μορφή $0\cdot\infty$

7.8.4 Παραδείγματα

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\ln(x)\right]$

Μετατρέπουμε το παράδειγμα αυτό από την μορφή $0\cdot\infty$ στην μορφή $0/0$. Άρα

$$\lim_{x\to 0}\left[x\ln(x)\right]= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{1/x} \overset{(0/0)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0}(-x)=0 .$$

2) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\left[(1-\tan(x))\sec(2x)\right]$

Μετατρέπουμε το παράδειγμα αυτό από την μορφή $0\cdot\infty$ στην μορφή $0/0$. Άρα

$$\lim_{x\to\pi/4}\left[(1-\tan(x))\sec(2x)\right] = \lim_{x\to\pi/4}\frac{1-\tan(x)}{1/\sec(2x)} = \lim_{x\to\pi/4}\frac{1-\tan(x)}{\cos(2x)} \overset{(0/0)}{=}$$

$$= \lim_{x\to\pi/4}\frac{-\sec^2 x}{-2\sin(2x)}=\frac{-2}{-2}=1 .$$

Απροσδιόριστη Μορφή $\infty-\infty$

Τα προβλήματα των ορίων όπως $\lim[f(x)-g(x)]$ ή $\lim[f(x)+g(x)]$ μας οδηγούν σε μία από τις ακόλουθες κατηγορίες : $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$, $(+\infty)+(-\infty)$, $(-\infty)+(+\infty)$.Δηλαδή, ένας από τους όρους μας σπρώχνει σε θετική κατεύθυνση και ο άλλος σε αρνητική κατεύθυνση.

7.8.5 Παραδείγματα

$$1)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)}\right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)+x\cos(x)}\right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)}\right)=\frac{0}{2}=0$$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+}[\cot(x)-\ln(x)]$

Εδώ το $\lim\limits_{x\to 0^+}\cot(x)=+\infty$ ενώ το $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$. Άρα έχουμε ένα πρόβλημα της μορφής $(+\infty)-(-\infty)$. Το πρόβλημα αυτό δεν είναι απροσδιόριστης μορφής. Το πρώτο όριο τείνει στο ∞ και το δεύτερο όριο, λόγω της αφαίρεσης, επίσης στο ∞. Άρα

$$\lim_{x\to 0^+}[\cot(x)-\ln(x)]=+\infty\ .$$

Οι απροσδιόριστες μορφές εκθετικού τύπου $0^0, \infty^0, 1^\infty$ αντιμετωπίζονται παίρνοντας τον λογάριθμο των εκφράσεων.

Απροσδιόριστη Μορφή 0^0

7.8.6 Παράδειγμα $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin(x)}$

Έστω $y = x^{\sin(x)}$. Παίρνουμε λογάριθμους και από τα δύο μέλη

$\ln(y)=\ln\left(x^{\sin(x)}\right)=\sin(x)\ln(x)$. Άρα το

$$\lim_{x\to 0}(\ln(y)=\left(\lim_{x\to 0}[\sin(x)\ln(x)]\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{1/\sin(x)}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{(-1/\sin(x))}\tan(x)=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\lim_{x\to 0}\tan(x)=-1(0)=0\ .$$

Το $\ln(y)\to 0$ όταν το $x\to 0$. Από την ιδιότητα των λογαρίθμων: $x=\log_a a^x = a^{\log_a x}$ έχουμε ότι $e^{\ln y}\to e^0$ ή $y\to 1$ όταν το $x\to 0$. Επομένως

$$\lim_{x\to\infty} x^{\sin(x)}=1\ .$$

Απροσδιόριστη Μορφή ∞^0

7.8.7 Παράδειγμα $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$

Εδώ θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη ιδιότητα των λογαρίθμων, $x=\log_a a^x = a^{\log_a x}$.

Άρα, $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}=\lim\limits_{x\to\infty} e^{\left(\frac{1}{x}.\ln(x)\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)}=e^0=1\ .$

Απροσδιόριστη Μορφή 1^{∞}

7.8.8 Παράδειγμα Να δείξετε ότι το $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$

Το $\lim_{x\to 0}(1+x) = 1$ και το $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x} = \infty$. Άρα έχουμε 1^{∞}.

Έστω $y = (1+x)^{1/x}$. Παίρνουμε λογάριθμους και από τα δύο μέλη

$$\ln y = \ln(1+x)^{1/x} = \frac{1}{x}\ln(1+x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$ Άρα το

$$\lim_{x\to 0}(\ln y) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1/(1+x)}{1}\right) = 1$$

Το $\ln y \to 1$ όταν το $x \to 0$. Από την συνέχεια της εκθετικής συνάρτησης έχουμε ότι $e^{\ln y} \to e^{1}$ ή $y \to e$ όταν το $x \to 0$. Επομένως ,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$$

Ασκήσεις 7.8

Να βρεθούν τα παρακάτω όρια χρησιμοποιώντας τον κανόνα *L'Hospital*.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$

2) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\cot(x)}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln(x)}{x+\ln(x)}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{100}}{e^x}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x.e^{-x}$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} x.\sin(\pi/x)$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{\sin(2/x)}-1)$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\dfrac{3}{x}\right)^x$

9) $\lim\limits_{x\to0} (e^x+x)^{1/x}$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$

11) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

12) $\lim\limits_{x\to1} (2-x)^{\tan(\pi/2)x}$

13) $\lim\limits_{x\to0^+} (\sin(x))^{3/\ln(x)}$

14) $\lim\limits_{x\to(1/2)\pi^-} (\tan(x))^{\cos(x)}$

15) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+x^2)^{1/\ln(x)}$

16) $\lim\limits_{\theta\to0} \left(\dfrac{1}{1-\cos\theta}-\dfrac{2}{\sin^2\theta}\right)$

17) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

18) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x-\ln(x^2+1)\right]$

19) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\cot(x)}{\cot(2x)}$

20) $\lim\limits_{\theta\to0} \dfrac{\cos(\alpha\theta)-\cos(\beta\theta)}{\theta^2}$

7.9 Λύσεις Ασκήσεων

Ασκήσεις 7.1

1) i) 1, ii) $\frac{\pi}{6}$ ή $\frac{\pi}{2}$, iii) $\frac{\pi}{2}$, iv) δεν ισχύει

2) i) 2, ii) $\frac{\pi}{4}$, iii) $\xi \in (-3,-1)$ και $\xi = 1$

Ασκήσεις 7.5

a) -2 ελάχιστο, 2 μέγιστο, b) 4 ελάχιστο , -4 μέγιστο, c) -3 μέγιστο, d) 0 ελάχιστο, 4 μέγιστο, e) $-\frac{49}{8}$ ελάχιστο, f) 0 σημείο καμπής , g) 0 ελάχιστο, h) -1 ελάχιστο, 0 μέγιστο, i) 0 ελάχιστο, $\frac{5}{16}$ μέγιστο και 2 μέγιστο.

Ασκήσεις 7.6

1) 0.03 cm/s , 2) $3\frac{3}{5}$ m/s , 3) (β) $x = \frac{2}{3}$ cm, $V = \frac{200}{27}$ cm^3, 4) 1.89 m

5) (β) 8.38 και 71.62, (γ) $8.38 < x < 71.62$, (δ) $P = 80x - x^2 - 600$, 1000 ευρώ.

Ασκήσεις 7.8

1) 0, 2) $-\infty$, 3) $+\infty$, 4) 0, 5) 0, 6) π, 7) 2, 8) e^{-3}, 9) e^2, 10) 1, 11) $+\infty$, 12) $e^{2/\pi}$, 13) e^3, 14) 1, 15) e^2, 16) $-\frac{1}{2}$, 17) $\frac{1}{2}$, 18) $+\infty$, 19) 2, 20) $\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$.