# ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο κύριος στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να δείξουμε ότι η ολοκλήρωση είναι η "αντίστροφη πράξη" της παραγώγισης και να δώσουμε τις βασικές μεθόδους υπολογισμού των ολοκληρωμάτων.

Το σημαντικότερο σημείο της θεωρίας που εξετάζουμε είναι το εξής:
Αν $f(x)$ είναι συνάρτηση συνεχής στο $[a,b]$, τότε υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $g(x)$ με την ιδιότητα $g'(x)=f(x)$ για κάθε $x$, οπότε το $g(b)-g(a)$ ισούται με τη διαφορά:

το εμβαδόν του χωρίου $\{(x,y): \ x\in[a,b], \ 0\le y\le f(x)\}$

μείον το εμβαδόν του χωρίου $\{(x,y): \ x\in[a,b], \ f(x)\le y\le 0\}$.

## ΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ας δούμε πρώτα πως ορίζουμε το εμβαδόν του χωρίου $X$ που περιορίζεται από το γράφημα μιας συνεχούς θετικής συνάρτησης $f(x)$ ορισμένη στο διάστημα $[a,b]$, και τις ευθείες $x=a$, $x=b$, $y=0$, δηλ.

$$X=\{(x,y): x\in[a,b], \ 0\le y\le f(x)\}.$$

Χωρίζουμε το διάστημα $[a,b]$ σε n ίσα διαστήματα μήκους $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ το καθένα, ως εξής:

$$[a,b]=[a,a+\Delta x]\cup[a+\Delta x,a+2\Delta x]\cup\ldots\cup[a+(n-1)\Delta x,a+n\Delta x].$$

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι το άθροισμα

$$E_n=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

είναι μια προσέγγιση του εμβαδού του $X$, όπου $x_k$ τυχόν σημείο του $k$ διαστήματος, δηλ.

$$x_k \in [a+(k-1)\Delta x, a+k\Delta x], \text{ για } k=1,2,...,n.$$

Παρατηρούμε ότι όσο το n μεγαλώνει, τόσο το $E_n$ προσεγγίζει καλύτερα το εμβαδόν του χωρίου.

Αποδεικνύεται ότι το $\lim_{n\to+\infty} E_n$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Ο αριθμός αυτός είναι το εμβαδόν του χωρίου $X$.

Αν η $f(x)$ είναι τυχούσα συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[a,b]$ (όχι κατ' ανάγκη θετική), τότε, όταν το n τείνει στο $+\infty$, το $E_n$ τείνει στην τιμή $E = E_+ - E_-$, όπου $E_+$ το εμβαδόν του χωρίου

$$X_+ = \{(x,y): \ x \in [a,b], \ 0 \le y \le f(x)\}$$

και $E_-$ το εμβαδόν του χωρίου

$$X_- = \{(x,y): \ x \in [a,b], \ f(x) \le y \le 0\}.$$

Την τιμή Ε την ονομάζουμε <u>ορισμένο ολοκλήρωμα</u> της $f(x)$ στο διάστημα $[a,b]$ και την συμβολίζουμε $\int_a^b f(x)dx$.

Στα επόμενα παραδείγματα τα ολοκληρώματα εξετάζονται βάσει του ορισμού, από τον γεωμετρικό υπολογισμό των εμβαδών των χωρίων $X_+$, $X_-$.

**Παραδείγματα**.

**1.** Το $\int_0^1 x^2dx$ ισούται με το εμβαδόν του χωρίου $\{(x,y): \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le x^2\}$ (την ακριβή τιμή του δεν μπορούμε προς το παρόν να υπολογίσουμε). ■

**2.** Αν $f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{αν } -1 \le x \le 0 \\ x+1, & \text{αν } 0 < x \le 1 \end{cases}$ τότε $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 3$. ■

**3.** Για την σταθερή συνάρτηση $f(x)=1$ έχουμε $\int_a^b f(x)dx = b-a$ .■

**4.** Αν $f(x)=x$ και $a<0<b$ τότε $\int_a^b f(x)dx = E_+ - E_- = \frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}$.■

**5.** $\int_a^a f(x)dx = 0$.■

**6.** $\int_a^b 0dx = 0$. ■

**ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ**

Οι επόμενες ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος αποδεικνύονται σχετικά εύκολα με τον ορισμό.

**Πρόταση.** Αν $f(x)$, $g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις στο $[a,b]$, τότε

1. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$,
2. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, όπου k σταθερά,
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, όπου $a \le c \le b$,
4. $m(b\text{-}a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b\text{-}a)$, όταν $m \le f(x) \le M$, $\forall\, x \in [a, b]$. ■

Χάριν ενοποίησης του συμβολισμού μπορούμε να ορίσουμε και την ακόλουθη ιδιότητα:

**Ορισμός.** $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

**Παραδείγματα.**

**1.** $\int_{-3}^{9}[2x^3-3\sin(x+1)-7xe^{2x}]dx = 2\int_{-3}^{9}x^3dx-3\int_{-3}^{9}\sin(x+1)dx-7\int_{-3}^{9}xe^{2x}dx$. ■

**2.** Αν $f(x)=\begin{cases}0 & \text{αν } x\in[0,1]\\ 1-x & \text{αν } x\in[1,2]\end{cases}$, τότε

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx = 0+\int_1^2(1-x)dx=\int_1^2 1dx-\int_1^2 xdx = 1-3/2$ (τα δύο τελευταία ολοκληρώματα υπολογίστηκαν γεωμετρικά). ■

**3.** $2\le\int_{-1}^{1}e^{x^2}dx\le 2e$, διότι $1=e^{0^2}\le e^{x^2}\le e^{1^2}=e$ για κάθε $x\in[-1,\ 1]$. ■

**4.** $\int_1^0 e^{x^2}dx+\int_0^1 e^{x^2}dx=0$. ■

**5.** Αν $f(x)$ συνεχής στο $[a,b]$, τότε $\int_s^t f(x)dx=\int_s^r f(x)dx+\int_r^t f(x)dx$, για κάθε $s,t,r\in[a,b]$.

*Απόδειξη*. Όταν $s\le r\le t$, είναι άμεσο. Όταν $r\le s\le t$, τότε

$\int_s^t f(x)dx=\int_r^t f(x)dx-\int_r^s f(x)dx=\int_r^t f(x)dx+\int_s^r f(x)dx$. Όμοια οι άλλες περιπτώσεις. ■

## ΤΟ ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Η επόμενη έννοια είναι πολύ χρήσιμη στον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος.

**Ορισμός.** Αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f(x) ορισμένη σε ένα διάστημα λέμε τις συναρτήσεις που η παράγωγός τους ισούται με f(x). Αν $g(x)$ είναι μία τέτοια συνάρτηση, δηλ. $g'(x) = f(x)$, τότε κάθε άλλη θα έχει τη μορφή $g(x) + c$ όπου c κάποια σταθερά (δες επόμενη Σημείωση). Τότε λέμε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα της $f(x)$ είναι $g(x) + c$, και το συμβολίζουμε

$$\int f(x)dx = g(x) + c\,.$$

*Σημείωση.* Αν $h(x)$, $g(x)$ διαφορίσιμες σε ένα διάστημα, και $h'(x) = g'(x) = f(x)$ για κάθε $x$, τότε υπάρχει σταθερά $c$ έτσι ώστε $h(x) = g(x) + c$. Διότι από το Θεώρημα μέσης τιμής, αν μία συνάρτηση όπως η $h(x) - g(x)$ έχει σταθερά μηδενική παράγωγο σε ένα διάστημα τότε είναι σταθερή.

**Παραδείγματα.**

**1.** $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c.$

*Απόδειξη.* $(-\cos(x))' = \sin(x)$. ■

**2.** $\int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} + c$.

*Απόδειξη.* $(\dfrac{x^3}{3})' = \dfrac{3x^2}{3} = x^2$. ■

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το επόμενο σημαντικό θεώρημα που δικαιολογεί γιατί λέμε "η ολοκλήρωση είναι η αντίστροφη πράξη της παραγώγισης".

**Θεώρημα.** Έστω $f : [a,b] \to \mathrm{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $F'(x) = f(x)$, για $x \in [a, b]$, δηλ.

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + c\,.$$

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι $x_0 \in (a, b)$. Αν $x_0 = a$ ή $x_0 = b$, η απόδειξη μπορεί να συμπληρωθεί εύκολα από τον αναγνώστη.

Εξ ορισμού έχουμε

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}.$$

Υποθέτουμε κατ' αρχάς ότι h > 0. Τότε $F(x_0+h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx$ .

Ορίζουμε τα $m_h$, $M_h$ ως εξής:

$$m_h = \min\{f(x): x_0 \le x \le x_0 + h\},$$

$$M_h = \max\{ f(x): x_0 \le x \le x_0 + h\}.$$

Από ιδιότητα των ορισμένων ολοκληρωμάτων, έχουμε ότι

$$m_h \cdot h \le \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx \le M_h \cdot h .$$

Επομένως $m_h \le \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \le M_h$ .

Εάν h < 0, λίγα πράγματα πρέπει να αλλάξουμε: Θέτουμε

$$m_h = \min\{f(x): x_0 + h \le x \le x_0\}$$

$$M_h = \max\{ f(x): x_0 + h \le x \le x_0\}.$$

Τότε

$$m_h(-h) \le \int_{x_0+h}^{x_0} f(x)dx \le M_h(-h).$$

Επειδή

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_{a}^{x_0+h} f(x)dx - \int_{a}^{x_0} f(x)dx = -\int_{x_0+h}^{x_0} f(x)dx ,$$

παίρνουμε

$$hm_h \ge F(x_0+h) - F(x_0) \ge hM_h.$$

Επειδή h < 0, διαιρώντας με h αντιστρέφεται η ανισότητα και έχουμε

$$m_h \le \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \le M_h$$

Όμως η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0$, άρα ισχύει

$$\lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h\to 0} M_h = f(x_0) .$$

Αυτό αποδεικνύει ότι

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0).\ \blacksquare$$

**Πόρισμα.** Αν $f(x)$ είναι συνεχής σε ένα διάστημα τότε υπάρχει το αόριστο ολοκλήρωμά του. ■

Έχουμε τώρα το εξής σημαντικό θεώρημα που δικαιολογεί τη σημασία του αόριστου ολοκληρώματος για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος.

**Θεώρημα (Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού).**

Αν $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και $\int f(x)dx = g(x)+c$ τότε

$$\int_a^b f(x)dx = g(b)-g(a).$$

*Απόδειξη.* Έχουμε $g'(x)=f(x)$, και $F'(x)=f(x)$ από το προηγούμενο θεώρημα, όπου $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. Άρα υπάρχει σταθερά *c* τέτοια ώστε $g(x) = F(x)+c$. Οπότε

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) = F(b)-F(a) = g(b)-g(a).\ \blacksquare$$

**Παραδείγματα.**

**1.** $\int_a^b \cos(x)dx = \sin(b)-\sin(a)$, διότι $\int \cos(x)dx = \sin(x)+c$. ■

**2.** $\int_0^1 e^x dx = e^1 - e^0 = e-1$, διότι $\int e^x dx = e^x + c$. ■

**3.** Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x) = \int_1^{x^3} \frac{\eta\mu t}{t}dt,\ x>0.$$

*Λύση.*

Θέτουμε $h(x)=x^3$ και $g(x) = \int_1^x \frac{\eta\mu t}{t}dt$

Τότε έχουμε

$$f(x) = g(x^3) = g(h(x)).$$

Άρα, από τον κανόνα σύνθετης παραγώγισης έχουμε

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x^3) \cdot h'(x).$$

Από προηγούμενο Θεώρημα έχουμε $g'(x) = \dfrac{\eta\mu x}{x}$. Επιπλέον $h'(x) = 3x^2$.

Άρα $\quad f'(x) = \dfrac{\eta\mu x^3}{x^3} \cdot 3x^2 = 3\dfrac{\eta\mu x^3}{x}$. ■

*Σημείωση*. Το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \dfrac{\eta\mu t}{t} dt$ δεν υπολογίζεται με στοιχειώδεις μεθόδους.

## ΑΟΡΙΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΑΠΛΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Για τον υπολογισμό των αορίστων ολοκληρωμάτων μπορούμε να θεωρούμε ως γνωστά τα παρακάτω στοιχειώδη αόριστα ολοκληρώματα.

**Πρόταση.** Ισχύουν τα εξής:

1. $\int x^{\lambda} dx = \dfrac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} + c$ ($\lambda \neq -1$ με $x > 0$ ή $\lambda \in \mathbb{N}$)

2. $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + c$, ($x < 0$ ή $x > 0$) .

3. $\int e^x dx = e^x + c.$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + c.$

5. $\int \cos x dx = \sin x + c.$

6. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$, $(-1 < x < 1)$.

7. $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c.$

*Απόδειξη*. Τα πρώτα πέντε ολοκληρώματα επαληθεύονται εύκολα:

$$\left(\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}\right)' = \frac{(\lambda+1)x^{\lambda}}{\lambda+1} = x^{\lambda},\ \left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{|x|}\left(|x|\right)' = \frac{1}{x},\ \left(e^x\right)' = e^x,$$

$$\left(-\cos x\right)' = \sin x,\ \left(\sin x\right)' = \cos x.$$

Όμοια επαληθεύονται και τα 6), 7):

Για το 6): Η συνάρτηση f(x) = sinx ορισμένη στο [-π/2, π/2] είναι ένα προς ένα και επί το σύνολο [-1, 1]. Η $y = \sin^{-1}x$ είναι η αντίστροφή της. Έχουμε λοιπόν siny = x, και παραγωγίζοντας: $\left(\cos y\right)(\sin^{-1} x)' = 1$, δηλ. $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\cos y}$. Επίσης έχουμε

$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2$, οπότε $\cos y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Αλλά $y \in \left(-\pi/2, \pi/2\right)$ όταν

$-1 < x < 1$, άρα $\cos y > 0$. Επομένως $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$ και $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Για το 7): Η συνάρτηση f(x) = tanx ορισμένη στο (-π/2, π/2) είναι ένα προς ένα και επί το σύνολο $\mathbb{R}$. Η $y = \tan^{-1}x$ είναι η αντίστροφή της. Έχουμε λοιπόν tany = x, και παραγωγίζοντας: $\dfrac{1}{\cos^2 y}(\tan^{-1} x)' = 1$, δηλ. $(\tan^{-1} x)' = \cos^2 y$. Επίσης έχουμε

$\dfrac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \tan^2 y = x^2$, $\dfrac{1 - \cos^2 y}{\cos^2 y} = x^2$ οπότε $\cos^2 y = \dfrac{1}{1 + x^2}$. Άρα $(\tan^{-1} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.■

Τα δύο τελευταία ολοκληρώματα θα τα υπολογίσουμε αργότερα χωρίς να τα υποθέτουμε.

## ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΟΡΙΣΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Οι πιο συνηθισμένοι τρόποι υπολογισμού αορίστων ολοκληρωμάτων είναι με την μέθοδο της αντικατάστασης, την κατά παράγοντες ολοκλήρωση, και την ολοκλήρωση με ανάλυση σε απλά κλάσματα .

Καταρχάς, να διευκρινίσουμε ότι με $\int f(y)dy$ θα εννοούμε ότι η μεταβλητή της συνάρτησης f είναι το y (και όχι τοx), και ότι ολοκληρώνουμε ως προς αυτήν την μεταβλητή.

**Παραδείγματα.**

**1.** $\int y^2 dy = \frac{y^3}{3} + c$, διότι $\int x^2 dy = \frac{x^3}{3} + c$. ■

**2.** $\int e^{2z} dz = \frac{e^{2z}}{2} + c$, διότι $\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{2z}}{2}\right) = e^{2z}$. ■

Πρώτα απ' όλα πρέπει να επιδιώκουμε τον υπολογισμό του αορίστου ολοκληρώματος βάσει του ορισμού και των απλών ιδιοτήτων του όπως αυτές διατυπώνονται στην ακόλουθη εύκολη Πρόταση.

**Πρόταση.** Αν $f(x)$, $g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις στο $[a,b]$, τότε

1. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$,

2. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, όπου k σταθερά. ■

**Παραδείγματα.**

**1.** $\int [3\sigma\upsilon\nu x + ce^x]dx = 3\int \sigma\upsilon\nu x dx + c\int e^x dx = 3\eta\mu x + ce^x + c_0$.

**2.** $\int\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right)dy = \int \frac{y}{x}dy + \int \frac{x}{y}dy = \frac{1}{x}\int ydy + x\int \frac{1}{y}dy = \frac{1}{x}\frac{y^2}{2} + x\ln|y| + c$.

**Πρόταση. (Μέθοδος αντικατάστασης).**

Έστω $f(x)$, $g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε κάποια διαστήματα, έτσι ώστε να υπάρχει η σύνθετη συνεχής συνάρτηση $f(g(x))$. Υποθέτουμε την $g(x)$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο $g'(x)$. Τότε

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy, \text{ όπου } y = g(x).$$

*Απόδειξη.* Αν θέσουμε $\int f(y)dy = F(y) + c$, τότε

$$\frac{dF(y)}{dx} = F'(y)y' = f(y)y' = f(g(x))g'(x).$$

Άρα $\int f(x)g'(x)dx = F(y) + c = \int f(y)dy$. ■

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, αντικαθιστούμε τη μεταβλητή της συνάρτησης που ζητάμε το ολοκλήρωμα, με μία νέα μεταβλητή. Με αυτό τον τρόπο, το ολοκλήρωμα μπορεί να αναχθεί σε κάποιο απλούστερο ολοκλήρωμα.

*Σημείωση.* Υπάρχει ο εξής μνημονικός κανόνας:

α) Αν θέσουμε τον μετασχηματισμό $x = h(y)$ (με την $h(y)$ να έχει συνεχή παράγωγο) τότε μπορούμε να αντικαθιστούμε βάσει της εξίσωσης $dx = h'(y)dy$.

β) Αν θέσουμε τον μετασχηματισμό $y = g(x)$, (με την $g(x)$ να έχει συνεχή παράγωγο και με $g'(x) \neq 0$), τότε μπορούμε να αντικαθιστούμε βάσει της εξίσωσης $dy = g'(x)dx$ (διότι αν η συνάρτηση $y = g(x)$ έχει αντίστροφη την $x = h(y)$, τότε $h'(y) = \dfrac{1}{g'(x)}$, και έχουμε την αντικατάσταση $dx = h'(y)dy = \dfrac{1}{g'(x)}dy$).

γ) Γενικότερα, αν αντικαταστήσουμε την μεταβλητή $x$ με την $y$, ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση $g(x) = h(y)$, (με τις $g(x)$, $h(y)$ να έχουν συνεχείς παραγώγους και με $g'(x) \neq 0$), τότε μπορούμε να αντικαθιστούμε βάσει της εξίσωσης $g'(x)dx = h'(y)dy$ (η εξήγηση είναι όπως στο β) ).

**Παραδείγματα.**

**1.** $\int f(e^x)\cdot e^x dx = \int f(y)dy$, όπου $y = e^x$, και $f: \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ συνεχής συνάρτηση.

*Απόδειξη.* Διότι $(e^x)' = e^x$, και εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $e^x = y$. ■

**2.** $\int e^{\sin x}\cos x dx = \int e^{\sin x}\left(\sin x\right)' dx = \int e^y dy = e^y + c$, με $y = \sin x$. ■

**3.** Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(1) $\int \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$ (2) $\int e^x ημ(e^x)dx$ (3) $\int (ημx\text{-}συνx)^2 dx$ (4) $\int \dfrac{ημx}{2+συνx}dx$

*Λύση*

(1) Θέτουμε $1+e^{-x} = y \Rightarrow dy = -e^{-x}dx$.

Άρα

$$\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx \ = -\int \frac{dy}{y} = -\ln|y| + c = -\ln(1+e^{-x})+ c.$$

(2) Θέτουμε $e^x = y \Rightarrow dy = e^x dx$. Άρα

$$\int e^x ημ(e^x)dx = \int ημy dy = -συνy + c = -συν(e^{-x}) + c.$$

(3) $\int (ημx-συνx)^2 dx = \int (ημ^2x + συν^2x - 2ημx\, συνx)dx$

$= \int (1-2ημx\, συνx)dx = \int 1dx - 2\int ημx\, συνx dx = \int 1dx - 2\int ημx\, (ημx)' \, dx$

$= x - 2\int y dy$ (όπου $y = ημx$)

$= x - y^2 + c = x - ημ^2x + c.$

(4) Θέτουμε $y = 2 + συνx \Rightarrow dy = -ημx dx$.

Άρα $\int \frac{ημx}{2+συνx}dx = -\int \frac{dy}{y} = -\ln|y|+c = -\ln|2+συνx| + c = -\ln(2+συνx)+ c.$ ■

**4.** $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1}(x)+c$.

*Απόδειξη*. Αν θέσουμε $x = \sin y$, δηλ. $y = \sin^{-1}(x)$, τότε $dx = \cos y dy$ και έχουμε $-1 < x < 1$, $-\pi/2 < y < \pi/2$, $\cos y > 0$. Οπότε

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}\cos y dy = \int \frac{1}{\cos y}\cos y dy = y + c = \sin^{-1}(x)+c. \ ■$$

**5.** $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}(x)+c$.

*Απόδειξη*. Θέτουμε $x = \tan y$. Οπότε $dx = (\tan y)' dy = \frac{1}{\cos^2 y}dy$, και άρα

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{1+\tan^2 y}\frac{1}{\cos^2 y}dy = \int 1dy = y + c = \tan^{-1}(x)+c. \ ■$$

**Πόρισμα.** Έστω $f(x)$, $g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις έτσι ώστε να υπάρχει η σύνθετη συνεχής συνάρτηση $f(g(x))$ ορισμένη σε διάστημα $[a,b]$. Υποθέτουμε την $g(x)$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο $g'(x)$. Τότε

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy.$$

*Απόδειξη.* Έχουμε $\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int f(y)dy$, όπου $y = g(x)$. Αν $\int f(y)dy = F(y)+c$, τότε $\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = F(g(x))+c$. Οπότε

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy. \blacksquare$$

**Παραδείγματα.**

**1.** Να υπολογιστεί το $\frac{d}{dt}\left(\int_t^{\sin(t)} e^x dx\right)$.

*Λύση.* Έχουμε $\int e^x dx = e^x + c$. Άρα $\int_t^{\sin(t)} e^x dx = e^x\Big|_{x=t}^{x=\sin(t)} = e^{\sin(t)} - e^t$.

Επομένως $\frac{d}{dt}\left(\int_t^{\sin(t)} e^x dx\right) = \cos(t)e^{\sin(t)} - e^t$. ■

**2.** Αν $P(x) = \int_x^{2x} [s + x\cos(s)]ds$, να υπολογιστεί το $P'(x)$.

*Λύση.* Έχουμε $\int [s + x^2\cos(s)]ds = s^2/2 + x^2\sin(s) + c$.

Άρα $\int_x^{2x} [s + x\cos(s)]ds =$

$\left(s^2/2 + x^2\sin(s)\right)\Big|_{s=x}^{s=2x} = \left(4x^2/2 + x^2\sin(2x)\right) - \left(x^2/2 + x^2\sin(x)\right) = x^2\left(3/2 + \sin(2x) - \sin(x)\right).$

Επομένως $P'(x) = 2x\left(3/2 + \sin(2x) + \sin(x)\right) + x^2\left(2\cos(2x) - \cos(x)\right)$. ■

**3.** $\int_0^1 \sin(e^x)e^x dx = \int_0^1 \sin(e^x)\left(e^x\right)' dx = \int_{e^0}^{e^1} \sin(y)dy = -\cos y\Big|_{e^0}^{e^1} = -\cos e + \cos 1$. ■

**Πρόταση. (Μέθοδος κατά παράγοντες ολοκλήρωση).**

Έστω $f(x)s$, $g(x)$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις, ορισμένες σε κάποιο διάστημα, με συνεχείς παραγώγους. Τότε $\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)dx$.

*Απόδειξη.* Έχουμε $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Οπότε

$$\int \left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right)dx = f(x)g(x) + c. \ \blacksquare$$

**Παραδείγματα.**

**1.** Υπολογισμός του $\int xe^x dx$.

*Λύση.* $\int xe^x dx = \int x(e^x)'dx = xe^x - \int (x)'e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c.$ ■

**2.** Υπολογισμός του $\int x^2e^x dx$.

*Λύση.* Θα εφαρμόσουμε δύο φορές την ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Με την πρώτη έχουμε $\int x^2e^x dx = \int x^2(e^x)'dx = x^2e^x - \int (x^2)'e^x dx = x^2e^x - 2\int xe^x dx$. Οπότε, χρησιμοποιώντας το προηγούμενο Παράδειγμα, παίρνουμε $\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2(xe^x - e^x + c)$. Το αποτέλεσμα αυτό το γράφουμε απλά $x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$, γιατί το c είναι τυχαία σταθερά. ■

**3.** Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(1) $\int x^2 \ln x dx$ (2) $\int xe^{-3x}dx$ (3) $\int e^{2x}\text{συν}3xdx$ (4) $\int x\sqrt{1+x}dx$

*Λύση.*

(1) $\int x^2\ln x dx = \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}(\ln x)'dx =$

$= \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + c.$

(2) $\int xe^{-3x}dx = -\frac{1}{3}\int x(e^{-3x})'dx =$

$= -\frac{1}{3}[xe^{-3x} - \int (x)'e^{-3x}dx] = -\frac{1}{3}(xe^{-3x} - \int e^{-3x}dx) = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + c.$

(3) $\int e^{2x}\text{συν}3xdx = \frac{1}{2}\int \left(e^{2x}\right)' \text{συν}3xdx = \frac{1}{2}[e^{2x}\text{συν}3x - \int e^{2x}\left(\text{συν}3x\right)' dx] =$

$= \frac{1}{2}[e^{2x}\text{συν}3x + 3\int e^{2x}\text{ημ}3xdx] = \frac{1}{2}e^{2x}\text{συν}3x + \frac{3}{4}\int \left(e^{2x}\right)' \text{ημ}3xdx =$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\sigma\upsilon\nu 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\eta\mu 3x - \frac{3}{4}\int e^{2x}\left(\eta\mu 3x\right)' dx =$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x}\sigma\upsilon\nu 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\eta\mu 3x - \frac{9}{4}\int e^{2x}\sigma\upsilon\nu 3x dx.$$

Άρα $\frac{13}{4}\int e^{2x}\sigma\upsilon\nu 3x dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sigma\upsilon\nu 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\eta\mu 3x + c.$

(4) $\quad \int x\sqrt{1+x}dx = \frac{2}{3}\int x\left((1+x)^{3/2}\right)' dx =$

$$= \frac{2}{3}[x(1+x)^{3/2} - \int x'(1+x)^{3/2}dx] =$$

$$= \frac{2}{3}[x(1+x)^{3/2} - \int (1+x)^{3/2}dx] =$$

$$= \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}(1+x)^{5/2} + c. \ \blacksquare$$

Με την επόμενη μέθοδο υπολογίζουμε αόριστα ολοκληρώματα ρητών παραστάσεων, αναλύοντας την ρητή παράσταση σε απλά κλάσματα.

*Υπενθυμίζουμε ότι αν έχουμε δύο πολυώνυμα* $p(x), q(x) \neq c$ *τότε κάνοντας διαίρεση το ρητό κλάσμα* $\frac{p(x)}{q(x)}$ *μπορεί να γραφεί ως* $\pi(x) + \frac{\upsilon(x)}{q(x)}$, *όπου* $\pi(x)$, $\upsilon(x)$ *πολυώνυμα, με το* $\upsilon(x)$ *να έχει βαθμό μικρότερο του* $q(x)$.

**Πρόταση (Ανάλυση σε απλά κλάσματα).**

Θεωρώντας ότι αναφερόμαστε πάντα σε πραγματικούς αριθμούς, έχουμε τα εξής:

α) Αν τα πολυώνυμα $p(x), q_1(x), q_2(x)$ έχουν βαθμό $\lambda, \mu_1, \mu_2$ αντίστοιχα, με $\lambda < \mu_1 + \mu_2$ και επιπλέον τα $q_1(x), q_2(x)$ δεν έχουν κοινό παράγοντα (ισοδύναμα, δεν έχουν κοινή ρίζα), τότε υπάρχουν πολυώνυμα $p_1(x), p_2(x)$ με βαθμό $\nu_1, \nu_2$ αντίστοιχα, με $\nu_1 < \mu_1$ και $\nu_2 < \mu_2$, έτσι ώστε

$$\frac{p(x)}{q_1(x)q_2(x)} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{p_2(x)}{q_2(x)}.$$

β) Αν το πολυώνυμο $p(x)$ είναι βαθμού μικρότερου από 2n και $a \neq 0$, τότε υπάρχουν $A_i, B_i$ έτσι ώστε

$$\frac{p(x)}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}=\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}+...+\frac{A_nx+B_n}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}.$$

γ) Αν το πολυώνυμο $p(x)$ είναι βαθμού μικρότερου από n και $a \neq 0$, τότε υπάρχουν $A_i$ έτσι ώστε

$$\frac{p(x)}{\left(ax+b\right)^n}=\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{\left(ax+b\right)^2}+...+\frac{A_n}{(ax+b)^n}.$$

Η απόδειξη παραλείπεται. ■

**Παραδείγματα.**

**1.** Να αναχθεί η ρητή παράσταση $\dfrac{x^3}{\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)^2}$ σε απλούστερα κλάσματα.

*Λύση.*

Σύμφωνα με την προηγούμενη Πρόταση:

Παρατηρούμε ότι τα πολυώνυμα $x^2+1,\left(x+1\right)^2$ δεν έχουν κοινό παράγοντα, οπότε, λόγω του α) υπάρχουν πολυώνυμα $p_1(x), p_2(x)$ βαθμού μικρότερου του 2, ώστε

$$\frac{x^3}{\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)^2}=\frac{p_1(x)}{x^2+1}+\frac{p_2(x)}{\left(x+1\right)^2}.$$

Από το β) έχουμε ότι $p_1(x)=Ax+B$.

Από το γ) έχουμε ότι $\dfrac{p_2(x)}{\left(x+1\right)^2}=\dfrac{C}{x+1}+\dfrac{D}{\left(x+1\right)^2}$.

Υπάρχουν λοιπόν σταθερές A, B,C,D έτσι ώστε

$$\frac{x^3}{\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{\left(x+1\right)^2}.$$

Για τον υπολογισμό των σταθερών:

Για κάθε x έχουμε $x^3=\left(Ax+B\right)\left(x+1\right)^2+C\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)+D\left(x^2+1\right)$ ,

ισοδύναμα

$$x^3=\left(A+C\right)x^3+(2A+B+C+D)x^2+(A+2B+C)x+\left(B+C+D\right).$$

Στη συνέχεια εξισώνουμε τους ομοβάθμιους όρους βρίσκουμε ένα σύστημα εξισώσεων

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ 2A + B + C + D = 0 \\ A + 2B + C = 0 \\ B + C + D = 0 \end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε: A = 0, B = -1/2, C = 1, D = -1/2.

Επομένως $\dfrac{x^3}{(x^2+1)(x+1)^2} = \dfrac{-1/2}{x^2+1} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{-1/2}{(x+1)^2}$. ■

**2.** Να αναχθεί η ρητή παράσταση $\dfrac{x^5}{(x^2+1)^2(x+1)^3}$ σε απλούστερα κλάσματα.

*Λύση.*

Σύμφωνα με την προηγούμενη Πρόταση:

Παρατηρούμε ότι τα πολυώνυμα $(x^2+1)^2, (x+1)^3$ δεν έχουν κοινό παράγοντα, οπότε, λόγω του α) υπάρχουν πολυώνυμα $p_1(x), p_2(x)$ βαθμού μικρότερου του 4 και 3, αντίστοιχα, ώστε $\dfrac{x^5}{(x^2+1)^2(x+1)^3} = \dfrac{p_1(x)}{(x^2+1)^2} + \dfrac{p_2(x)}{(x+1)^3}$.

Από το β) έχουμε ότι $\dfrac{p_1(x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{A_1x+B_1}{x^2+1} + \dfrac{A_2x+B_2}{(x^2+1)^2}$.

Από το γ) έχουμε ότι $\dfrac{p_2(x)}{(x+1)^3} = \dfrac{C_1}{x+1} + \dfrac{C_2}{(x+1)^2} + \dfrac{C_3}{(x+1)^3}$.

Υπάρχουν λοιπόν σταθερές $A_i, B_i, C_j$ έτσι ώστε

$$\frac{x^5}{(x^2+1)^2(x+1)^3} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+1} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+1)^2} + \frac{C_1}{x+1} + \frac{C_2}{(x+1)^2} + \frac{C_3}{(x+1)^3}.$$

Για τον υπολογισμό των σταθερών:

Για κάθε x έχουμε

$$x^5 = (A_1x+B_1)(x^2+1)(x+1)^3 + (A_2x+B_2)(x+1)^3 +$$

$$+C_1\left(x^2+1\right)^2\left(x+1\right)^2+C_2\left(x^2+1\right)^2\left(x+1\right)+C_3\left(x^2+1\right)^2.$$

Στη συνέχεια εξισώνουμε τους ομοβάθμιους όρους και βρίσκουμε ένα σύστημα εξισώσεων με το οποίο υπολογίζουμε τις σταθερές όπως προηγουμένως. ■

**3**. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

(1) $\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}dx$ (2) $\int \frac{2x-3}{x^2-2x+5}dx$

*Λύση.*

(1) Έχουμε ότι $\frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+5}$ όπου A, B σταθερές τις οποίες θα υπολογίσουμε ως εξής:

Απλοποιώντας τους παρονομαστές έχουμε

6 - x = A(2x + 5) + B(x - 3) $\Rightarrow$ 6 - x = 5A –3B + (2A + B)x $\Rightarrow$

5A - 3B - 6, 2A + B = -1.

Άρα

$$A = \frac{3}{11} \qquad , B = \frac{-17}{11}.$$

Επομένως $\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}dx = \int \frac{3}{11}\cdot\frac{1}{x-3}dx + \int \frac{-17}{11}\cdot\frac{1}{2x+5}dx =$

$$= \frac{3}{11}\ln|x-3| - \frac{17}{11}\frac{\ln|2x+5|}{2} + c.$$

(2) $\int \frac{2x-3}{x^2-2x+5}dx = \int \frac{2x}{x^2-2x+5}dx - \int \frac{3}{x^2-2x+5}dx$

(i) Υπολογισμός του $\int \frac{1}{x^2-2x+5}dx$

Έχουμε ότι $x^2 - 2x + 5 = (x-2)^2 + 1$,

άρα

$$\int \frac{1}{x^2-2x+5}dx = \int \frac{dx}{(x-2)^2+1}$$

Θέτουμε y = x-2. Άρα dy = dx

Επομένως $\int \frac{dx}{(x-2)^2+1} = \int \frac{dy}{y^2+1}$ = $\tan^{-1}y + c = \tan^{-1}(x-2) + c$.

(ii) Υπολογισμός του $\int \frac{2x}{x^2-2x+5}dx$

Θέτουμε

$$y = x^2 - 2x + 5 \ \Rightarrow \ \frac{dy}{dx} = 2x-2 \Rightarrow \ dy = (2x-2)dx$$

Άρα $\int \frac{2x}{x^2-2x+5}dx = \int \frac{2x-2+2}{x^2-2x+5}dx =$

$= \int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx + \int \frac{2}{x^2-2x+5}dx =$

$= \int \frac{dy}{y} + \int \frac{2}{x^2-2x+5}dx = \ln|y| + \int \frac{2}{x^2-2x+5}dx =$

$= \ln(x^2 - 2x + 5) + \int \frac{2}{x^2-2x+5}dx = \ln(x^2 - 2x + 5) + 2[\tan^{-1}(x-2) + c]$.

**4**. Υπάρχουν Α, Β, Γ, Δ, Ε έτσι ώστε

$$\frac{x^{15}-x^3+5}{(1-x)^2(x+3)(x^2+ax+b)} = p(x) + \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{\Gamma}{x+3} + \frac{\Delta x + E}{x^2+ax+b}$$

όπου p(x) πολυώνυμο (πηλίκο της διαίρεσης του $x^{15}-x^3+5$ με το $(1-x)^2(x+3)(x^2+ax+b)$). ■

## ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Είδαμε ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα αφορά συνεχείς συναρτήσεις που είναι ορισμένες σε κλειστά διαστήματα. Τώρα μπορούμε να επεκτείνουμε το ολοκλήρωμα και για συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε διαστήματα της μορφής $[a,b)$, $[a,+\infty)$, $(a,b]$, $(-\infty,b]$ όπου $a,b$ πραγματικοί. Σ' αυτή την περίπτωση ορίζουμε

$$\int_a^{b-} f(x)dx = \lim_{h\to b-} \int_a^h f(x)dx$$

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{h\to+\infty}\int_{a}^{h} f(x)dx$$

$$\int_{a+}^{b} f(x)dx = \lim_{h\to a+}\int_{h}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{h\to-\infty}\int_{h}^{b} f(x)dx$$

αντίστοιχα, εφόσον υπάρχει το όριο. Τα ολοκληρώματα αυτά επονομάζονται <u>γενικευμένα</u>. Κάποια από αυτά ανάγονται στα ορισμένα ολοκληρώματα, σύμφωνα με την επόμενη Πρόταση.

**Πρόταση.**

Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$, τότε

$$\int_{a}^{b-} f(x)dx = \int_{a+}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

*Απόδειξη.* $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{h} f(x)dx + \int_{h}^{b} f(x)dx =$

$$= \lim_{h\to b-}\left(\int_{a}^{h} f(x)dx + \int_{h}^{b} f(x)dx\right) = \lim_{h\to b-}\int_{a}^{h} f(x)dx + \lim_{h\to b-}\int_{h}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b-} f(x)dx + \lim_{h\to b-}\int_{h}^{b} f(x)dx.$$

Αλλά, επειδή η $f(x)$ είναι συνεχής, υπάρχει $M$ ώστε $-M \le f(x) \le M$ για κάθε x.

Άρα $-M(b-h) \le \int_{h}^{b} f(x)dx \le M(b-h)$, οπότε $\lim_{h\to b-}\int_{h}^{b} f(x)dx = 0$.

Επομένως $\int_{a}^{b-} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$. Όμοια, $\int_{a+}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$. ■

**Παραδείγματα.**

**1.** Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}$$

*Λύση.*

Υπολογισμός του $\int \frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}$:

$$\int \frac{dx}{e^{x}+e^{-x}} = \int \frac{e^{x}dx}{e^{2x}+1}$$

Θέτουμε $e^x = y \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = e^x \Rightarrow dy = e^x dx$.

Άρα

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{dy}{y^2+1} = \tan^{-1}(y) + c = \tan^{-1}(e^x) + c.$$

Άρα

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \tan^{-1}(e^x) - \tan^{-1}(e^0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \ \blacksquare$$

**2.** Υπολογισμός του $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{1}{x^2}dx$.

*Λύση.*

Έχουμε $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + c$.

Άρα $\displaystyle\int_{0+}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to0+}\int_t^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to0+}\left(-\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{t}\right)\right) = +\infty.$ $\blacksquare$

**ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ**

**Α**. Το ορισμένο ολοκλήρωμα, σύμφωνα με τον ορισμό, δίνει το εμβαδόν κάποιων επίπεδων χωρίων. Λίγο πιο γενικά έχουμε το ακόλουθο.

**Πρόταση.** Αν f(x), g(x) είναι συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε το χωρίο $\{(x,y): a \le x \le b, f(x) \le y \le g(x)\}$ που περικλείεται από τις ευθείες x = a, x = b και τα γραφήματα των συναρτήσεων f(x), g(x), έχει εμβαδόν

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]dx.$$

*Απόδειξη.* Αν κάνουμε μία παράλληλη μεταφορά του χωρίου

$$\{(x,y): a \le x \le b, f(x) \le y \le g(x)\}$$

κατά το διάνυσμα $\vec{v} = (0, M)$ θα έχουμε το χωρίο

$$\{(x,y): a \le x \le b, f(x) + M \le y \le g(x) + M\}$$

με εμβαδόν όσο και το πρώτο.

Λόγω της συνέχειας της f(x) μπορούμε να επιλέξουμε το M τέτοιο ώστε

$$-M < f(x), \text{ δηλ. } 0 < f(x) + M, \text{ για κάθε x.}$$

Παρατηρούμε ότι το χωρίο $\{(x,y): a \le x \le b, f(x)+M \le y \le g(x)+M\}$ ισούται με το $\{(x,y): a \le x \le b, 0 \le y \le g(x)+M\}$ μείον το $\{(x,y): a \le x \le b, 0 \le y < f(x)+M\}$ και ότι το εμβαδόν του $\{(x,y): a \le x \le b, 0 \le y < f(x)+M\}$ ισούται με το εμβαδόν του $\{(x,y): a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)+M\}$.

Οπότε το εμβαδόν που θέλουμε να υπολογίσουμε ισούται με το εμβαδόν του

$$\{(x,y): a \le x \le b, 0 \le y \le g(x)+M\}$$

μείον το εμβαδόν του

$$\{(x,y): a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)+M\},$$

δηλ. με $\int_a^b [g(x)+M]dx - \int_a^b [f(x)+M]dx$ που είναι ίσο με $\int_a^b [g(x)-f(x)]dx$. ■

**Παράδειγμα.**

Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από τα γραφήματα των συναρτήσεων

$$f(x) = x^3 - x \quad \text{και} \quad g(x) = x^2.$$

*Λύση.*

Μελετώντας τις συναρτήσεις f και g μπορούμε να σχεδιάσουμε τα γραφήματα τους.

Για παράδειγμα, επιλύοντας την εξίσωση $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - x = x^2$

έχουμε

$$x^3 - x^2 - x = 0 \quad \text{ή}$$

$$x(x^2 - x - 1) = 0$$

Άρα οι ρίζες είναι $x = 0,\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

Έτσι, βρήκαμε που τέμνονται τα γραφήματα των f, g.

Στη συνέχεια επαληθεύουμε εύκολα ότι

$f(x) \ge g(x) \quad \forall\, x \in \left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right]$ π.χ. f(½) > g(½), και $f(x) \le g(x) \quad \forall x \in \left[0, \ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ π.χ. $f(1) < g(1)$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{0} (x^3 - x - x^2)dx + \int_{0}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} (x^2 - (x^3 - x))dx$$

Το οποίο υπολογίζεται εύκολα. ■

**Β**. Με το ολοκλήρωμα μπορούμε να υπολογίσουμε όγκους σύμφωνα με την επόμενη Πρόταση (που δεν αποδεικνύουμε).

**Πρόταση.**

Έστω $f(z)$ συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$, και $V$ χωρίο του $\mathsf{R}^3$. Αν $f(z)$ είναι το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου $V(z) = \{(x,y):(x,y,z) \in V\}$, τότε $\int_a^b f(z)dz$ είναι ο όγκος του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των επιπέδων $z = a$, $z = b$ και ανήκει στο V. ■

**Παράδειγμα.**

Να υπολογιστεί ο όγκος του χωρίου $V$ που περικλείεται από τα επίπεδα $z = 0$, $z = h$ και την επιφάνεια $x^2 + y^2 = r^2$ (κύλινδρος διαμέτρου $r$ και ύψους $h$).

*Λύση.* Έχουμε ότι το V(z) είναι δίσκος ακτίνας r, άρα το εμβαδόν του είναι $f(z) = \pi r^2$. Οπότε ο όγκος του V είναι $\int_0^h \pi r^2 dz = \pi r^2 h$. ■

**Γ.** Το ολοκλήρωμα υπολογίζει μήκη καμπύλης.

Ας δούμε πρώτα πως ορίζουμε το μήκος της καμπύλης y = f(x) της γραφικής παράστασης μιας συνεχούς θετικής συνάρτησης $f(x)$ ορισμένη στο διάστημα $[a,b]$.

Χωρίζουμε το διάστημα $[a,b]$ σε n ίσα διαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ το καθένα, ως εξής:

$$[a,b]=[a,a+\Delta x]\cup[a+\Delta x,a+2\Delta x]\cup\ldots\cup[a+(n-1)\Delta x,a+n\Delta x]$$

και παίρνουμε τα σημεία $\vec{z}_k=\left(x_k,f\left(x_k\right)\right)$ της καμπύλης y = f(x) που αντιστοιχούν στα άκρα των διαστημάτων, δηλ. $x_k=a+k\Delta x$, για k = 0, 1, 2, …n.

Εύκολα μπορούμε να δεχτούμε ότι το άθροισμα

$$M_n=\sum_{k=1}^{n}\left\|\vec{z}_k-\vec{z}_{k-1}\right\|=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(x_k-x_{k-1}\right)^2+\left(f(x_k)-f(x_{k-1})\right)^2}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(f(x_k)-f(x_{k-1})\right)^2}$$

είναι μια προσέγγιση του μήκους της y = f(x), που γίνεται καλύτερη όσο μεγαλώνει το n.

Υποθέτουμε ότι η f(x) έχει παράγωγο. Τότε, από το Θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχουν $\xi_k\in[a+(k-1)\Delta x,a+k\Delta x]$, για $k=1,2,\ldots,n$, έτσι ώστε $f'(\xi_k)=\dfrac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{\Delta x}$.

Οπότε $M_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta x f'(\xi_k)\right)^2}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta x$.

Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι η f(x) έχει συνεχή παράγωγο τότε η συνάρτηση $\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}$ είναι συνεχής. Άρα από τον ορισμό του ολοκληρώματος το $\lim_{n\to+\infty}M_n$ ισούται με το $\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$ και λέγεται μήκος της καμπύλης y = f(x), $x\in[a,b]$.

Έχουμε έτσι την ακόλουθη Πρόταση.

**Πρόταση.** Αν $f(x)$ είναι συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[a,b]$ με συνεχή παράγωγο τότε το μήκος της καμπύλης y = f(x) ισούται με

$$\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx\ .\ \blacksquare$$

**Παράδειγμα.**

Υπολογισμός του μήκους της καμπύλης της γραφικής παράστασης $f(x)=x^2/2$, όταν $x\in[0,1]$.

*Λύση.* Το μήκος της είναι $h=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx$. Αρκεί να υπολογίσουμε το $\int\sqrt{1+x^2}\,dx$.

Θέτουμε $x = \varepsilon\varphi y$, οπότε $dx = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 y} dy$,

άρα $\int \sqrt{1+x^2}dx = \int \sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 y}\,\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 y} dy = \int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^3 y} dy = \int \frac{(\eta\mu y)'}{(\sigma\upsilon\nu^2 y)^2} dy =$

$= \int \frac{(\eta\mu y)'}{(1-\eta\mu^2 y)^2} dy = \int \frac{1}{(1-z^2)^2} dz$, όπου $z = \eta\mu y$.

Αλλά $\int \frac{1}{(1-z^2)^2} dz = \int \frac{1}{(1-z)^2(1+z)^2} dz$, και σύμφωνα με προηγούμενη Πρόταση

$\frac{1}{(1-z)^2(1+z)^2} = \frac{\alpha}{1-z} + \frac{\beta}{(1-z)^2} + \frac{\gamma}{1+z} + \frac{\delta}{(1+z)^2}$, για κάποια α, β, γ, δ, που

υπολογίζουμε και βρίσκουμε $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{1}{4}$.

Άρα

$$\int \frac{1}{(1-z)^2(1+z)^2} dz = \frac{1}{4}\left(-\ln|1-z| + \frac{1}{1-z} + \ln|1+z| - \frac{1}{1+z}\right) + c = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{1+z}{1-z} + \frac{2z}{1-z^2}\right) + c.$$

Συνεπώς $\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{1-z}{1+z} + \frac{2z}{1-z^2}\right) + c$, με $z = \eta\mu(\varepsilon\varphi^{-1}x)$, και

$$h = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{1-z}{1+z} + \frac{2z}{1-z^2}\right)\Bigg|_{\eta\mu(\varepsilon\varphi^{-1}0)}^{\eta\mu(\varepsilon\varphi^{-1}1)} = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{1-z}{1+z} + \frac{2z}{1-z^2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}/2}.\ \blacksquare$$