Κεφάλαιο 1

Το Αόριστο Ολοκλήρωμα

1.1 Ορισμός

Ας υποθέσουμε ότι μας δίδεται μία συνάρτηση $f(x)$, γιά την οποία γνωρίζουμε ότι έχει προκύψει σαν παράγωγος μιάς άλλης συνάρτησης $\sigma(x)$, δηλαδή $\frac{d\sigma(x)}{dx} = f(x)$ καί ότι η $f(x)$ είναι γνωστή και η $\sigma(x)$ άγνωστη. Ζητείται να προσδιορίσουμε την $\sigma(x)$, δοθείσης της $f(x)$. Ένα τέτοιο πρόβλημα λέγεται **διαφορική εξίσωση** . Η λύση της είναι μιά άλλη συνάρτηση, πού ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα** και συμβολίζεται $\int f(x)dx$. Γενικά:

Θεώρημα 1.1 *Κάθε συνάρτηση $f(x)$, συνεχής στο ανοικτό διάστημα (a, b), είναι ολοκληρώσιμη στο (a, b).*

Θεώρημα 1.2 *Κάθε συνάρτηση, έχουσα αόριστο ολοκλήρωμα στο (a, b), θα έχει άπειρα αόριστα ολοκληρώματα, τα οποία θα διαφέρουν μεταξύ τους κατά μία σταθερά ποσότητα C.*

Επομένως, ο προηγούμενος τύπος γενικεύεται ως εξής:

$$\boxed{\frac{d\sigma(x)}{dx} = f(x) \Leftrightarrow \sigma(x) = \int f(x)dx + C}$$

1.3 Η Σταθερά της Ολοκλήρωσης

Η σταθερά C, που αναφέραμε προηγουμένως αποτελεί δομικό και αναπόσπαστο στοιχείο του ολοκληρώματος και καλό είναι να μην παραλείπεται ποτέ. Όταν δίδονται ορισμένες πληροφορίες (αρχικές συνθήκες), η σταθερά αυτή μπορεί να προσδιορισθεί.

1.4 Στοιχειώδη Αόριστα Ολοκληρώματα

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό, μπορούμε να αποδείξουμε τους παρακάτω τύπους των στοιχειωδών αορίστων ολοκληρωμάτων. Πράγματι, παραγώγιση των δευτέρων μελών μας δίδει πάντα τα πρώτα.

$$\boxed{\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a \in R, a \neq -1} \quad , \quad \boxed{\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C}$$

$$\boxed{\int e^x dx = e^x + C}$$

$$\boxed{\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x + C} \quad , \quad \boxed{\int \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x + C}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\eta\mu^2 x} = -\sigma\varphi x + C} \quad , \quad \boxed{\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \varepsilon\varphi x + C}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \tau o\xi\eta\mu x + C} \quad , \quad \boxed{-\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu x + C}$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{1+x^2} = \tau o\xi\varepsilon\varphi x + C} \quad , \quad \boxed{-\int \frac{dx}{1+x^2} = \tau o\xi\sigma\varphi x + C}$$

1.5 Βασικές Ιδιότητες

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$\boxed{\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx}$$

$$\boxed{\int \lambda \cdot f(x)dx = \lambda \cdot \int f(x)dx, \lambda \in R}$$

Όπως βλέπουμε δεν υπάρχει ιδιότητα που να περιγράφει την συμπεριφορά του ολοκληρώματος σχετικά με το γινόμενο συναρτήσεων. Αυτή είναι και η αιτία της δυσκολίας υπολογισμού ολοκληρωμάτων, εν αντιθέσει με την παραγώγιση που ακολουθεί συγκεκριμένο αλγόριθμο.

1.6 Λυμένες Ασκήσεις.

1.1 Υπολογίσατε το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int(4x^3 - 5x^2 + 6x - 1)dx$.

Λύση: Διαδοχικά έχουμε,

$$\int(4x^3 - 5x^2 + 6x - 1)dx = \int 4x^3dx - \int 5x^2dx + \int 6xdx - \int 1dx =$$

$$= 4\int x^3dx - 5\int x^2dx + 6\int xdx - 1\int dx = 4\frac{x^{3+1}}{3+1} - 5\frac{x^{2+1}}{2+1} + 6\frac{x^{1+1}}{1+1} - 1\frac{x^{0+1}}{0+1} + C =$$

$$= 4\frac{x^4}{4} - 5\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 1\frac{x^1}{1} + C = x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 - x + C$$

q.e.d.

1.2 Υπολογίσατε το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})dx$.

Λύση: Διαδοχικά έχουμε,

$$\int(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx + \int x^{-\frac{1}{3}}dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$$

q.e.d.

1.3 Προσδιορίσατε καμπύλη, διερχομένη από το σημείο $M(1,5)$ και μέ κλίση $4x$.

Λύση: Έστω $y = f(x)$ η εξίσωση της συγκεκριμένης καμπύλης. Αφού η κλίση της είναι $4x$ θα έχουμε $\frac{df}{dx} = 4x$. Με ολοκλήρωση έχουμε $f(x) = \int 4xdx = 2x^2 + C$. Επειδή το σημείο M ανήκει στην καμπύλη, έπεται ότι $f(1) = 5$, οπότε $5 = 2 + C$, $C = 3$. Άρα τελικά, η ζητουμένη καμπύλη είναι η $f(x) = 2x^2 + 3$.

q.e.d.

1.4 Τα οριακά έσοδα μίας επιχείρησης δίδονται από την σχέση:

$$\frac{dR}{dq} = 22 - 4q + 7\sqrt{q}$$

Εάν την χρονική στιγμή μηδέν έσοδα δεν υπάρχουν, βρείτε την συνάρτηση εσόδων.

Λύση: Από την σχέση $\frac{dR}{dq} = 22 - 4q + 7\sqrt{q}$ έχουμε ότι

$$R(q) = \int (22 - 4q + 7\sqrt{q})dq \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R(q) = 22q - 4 \cdot \frac{q^2}{2} + 7 \cdot \frac{q^{3/2}}{3/2} + C = 22q - 2q^2 + \frac{14}{3} \cdot q^{3/2} + C$$

Μας δίδεται ακόμα ότι $R(0) = 0$, από όπου προκύπτει ότι $C = 0$ και τελικά:

$$R(q) = 22q - 2q^2 + \frac{14}{3} \cdot q^{3/2}$$

q.e.d.

1.7 Ασκήσεις Προς Επίλυση.

Υπολογίσατε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

1.5 $\int \frac{4x^3 - 5x^2}{x^2} dx.$

Απ: $2x^2 - 5x + C.$

1.6 $\int (2x^2 - \frac{1}{x^2} + x)dx$

Απ: $\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} + C.$

1.7 $\int (4\sqrt{x} - 5x^2 + 6x^{-\frac{1}{2}} - 1)dx$

Απ: $\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{3}x^3 + 12\sqrt{x} - x + C.$

1.8 $\int (\frac{1}{x^4} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} - 4)dx$

Απ:$-\frac{1}{3x^3} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - 4x + C.$

1.9 $\int (\sqrt[3]{x} - \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{7x^2}{\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt{x})dx$

Απ: $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{7}{3}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$

1.10 $\int (e^x - x^e)dx$

Απ: $e^x - \frac{x^{e+1}}{e+1} + C.$

1.11 *Προσδιορίσατε καμπύλη, διερχομένη από τα σημεία* $(1, 2)$, $(\frac{1}{4}, -10)$ *καί μέ κλίση αντιστρόφως ανάλογη του* x^2.

Απ: $f(x) = -\frac{4}{x} + 6$.

1.12 *Εάν η συνάρτηση οριακού κόστους είναι* $5 - 6q^2 + 7q^3$, *βρείτε την συνάρτηση του κόστους.*

Απ: $5q - 2q^3 + \frac{7}{4}q^4 + C$

1.13 *Εάν η συνάρτηση οριακών εσόδων είναι* $16 - 4q - \frac{1}{q}$, *βρείτε την συνάρτηση των μέσων εσόδων.*

Απ: $\frac{1}{q}(16q - 2q^2 - \ln q + C)$

1.14 *Η οριακή ζήτηση ενός προϊόντος δίδεται από την σχέση:* $\frac{dD}{dp} = -0.1$. *Εάν γνωρίζουμε ότι, όταν η τιμή του προϊόντος είναι* 3 *χρηματικές μονάδες, ζητούνται* 11 *μονάδες προϊόντος, βρείτε τα ολικά έσοδα όταν η τιμή θα είναι* 4.5 *χρηματικές μονάδες.*

Απ: $11.3p - 0.1p^2$

Κεφάλαιο 2

Ολοκλήρωση με την Μέθοδο των Προσδιοριστέων Συντελεστών

2.1 Η Μέθοδος

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται συνήθως σε ολοκληρώματα της μορφής:

$$I = \int \pi(x)\varphi(x)dx$$

όπου $\pi(x)$ πολυώνυμο και $\varphi(x)$ εκθετική συνάρτηση. (π.χ. e^x, 2^x, 5^{x^2}.) Θεωρούμε ότι το ολοκλήρωμα που ζητάμε, I, γράφεται:

$$I = (Ax^k + Bx^{k-1} + \Gamma x^{k-2} + \cdots + E) \cdot \varphi(x)$$

όπου k ένας, κατάλληλα επιλεγμένος, βαθμός πολυωνύμου. Αφού το I είναι αόριστο ολοκλήρωμα, θα ισχύει προφανώς η σχέση:

$$\frac{dI}{dx} = \pi(x)\varphi(x)$$

Αντικαθιστώντας το I με το ίσο του και κάνοντας πράξεις, προσδιορίζουμε τους συντελεστές $A, B, \Gamma, \ldots$ και τελικά το I.

2.2 Λυμένες Ασκήσεις.

2.1 Υπολογίσατε με την μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών το ολοκλήρωμα: $\int x^3 e^{2x} dx$.

Λύση: Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ολοκλήρωμα I, έχει την μορφή:

$$I = (Ax^3 + Bx^2 + \Gamma x + \Delta)e^{2x}$$

όπου A, B, Γ και Δ συντελεστές προς προσδιορισμό. Από την σχέση: $\frac{dI}{dx} = x^3 e^{2x}$, έχουμε:

$$(Ax^3 + Bx^2 + \Gamma x + \Delta)' e^{2x} + (Ax^3 + Bx^2 + \Gamma x + \Delta)(e^{2x})' = x^3 e^{2x}$$

άρα,

$$(3Ax^2 + 2Bx + \Gamma)e^{2x} + 2(Ax^3 + Bx^2 + \Gamma x + \Delta)' e^{2x} = x^3 e^{2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2A)x^3 e^{2x} + (3A + 2B)x^2 e^{2x} + (2B + 2\Gamma)x e^{2x} + (\Gamma + 2\Delta)e^{2x} = x^3 e^{2x}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των δύο μερών της εξίσωσης, παίρνουμε το σύστημα:

$$2A = 1$$

$$3A + 2B = 0$$

$$2B + 2\Gamma = 0$$

$$\Gamma + 2\Delta = 0$$

απ΄ όπου βρίσκουμε:

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{3}{4}, \quad \Gamma = \frac{3}{4}, \quad \Delta = -\frac{3}{8}$$

και άρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι:

$$I = (\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8})e^{2x} + C$$

q.e.d.

2.2 Με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών υπολογίσατε το ολοκλήρωμα: $I = \int 5x^2 2^x dx$**.**

Λύση: Θεωρούμε ότι: $I = (Ax^2 + Bx + \Gamma)2^x$. Από την σχέση $\frac{dI}{dx} = 5x^2 2^x$, έχουμε:

$$(Ax^2 + Bx + \Gamma)' 2^x + (Ax^2 + Bx + \Gamma)(2^x)' = 5x^2 2^x \Rightarrow$$

$$(2Ax + B)2^x + (Ax^2 + Bx + \Gamma)2^x \ln 2 = 5x^2 2^x$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές παίρνουμε:

$$A \ln 2 = 5$$

$$2A + B \ln 2 = 0$$

$$B + \Gamma \ln 2 = 0$$

απ΄ όπου προκύπτει ότι:

$$A = \frac{5}{\ln 2}, \quad B = -\frac{10}{(\ln 2)^2}, \quad \Gamma = \frac{10}{(\ln 2)^3}$$

και άρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι:

$$I = \left(\frac{5}{\ln 2} x^2 - \frac{10}{(\ln 2)^2} x + \frac{10}{(\ln 2)^3} \right) 2^x + C$$

q.e.d.

2.3 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα $I = \int x^2 \alpha^{x^2} dx$.

Λύση: Θεωρούμε ότι το ζητούμενο ολοκλήρωμα I, έχει την μορφή: $I = (Ax + B)\alpha^{x^2}$. Η σχέση $\frac{dI}{dx} = x^2 \alpha^{x^2}$, θα δώσει:

$$(Ax + B)' \alpha^{x^2} + (Ax + B)(\alpha^{x^2})' = x^2 \alpha^{x^2}$$

οπότε

$$A\alpha^{x^2} + (Ax + B) 2x \alpha^{x^2} \ln \alpha = x^2 \alpha^{x^2}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές έχουμε:

$$2A \ln \alpha = 1$$

$$A + 2B \ln \alpha = 0$$

απ΄ όπου βρίσκουμε ότι:

$$A = \frac{1}{2 \ln \alpha}, \quad B = -\frac{1}{4(\ln \alpha)^2}$$

άρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι:

$$I = \left(\frac{1}{2 \ln \alpha} x - \frac{1}{4(\ln \alpha)^2} \right) \alpha^{x^2} + C$$

q.e.d.

2.4 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα: $I = \int (x+1)^{1000}(5x+7)dx$.

Λύση: Υποθέτουμε ότι το I έχει την μορφή $I = (x+1)^{1001}(Ax+B)$. Η σχέση $\frac{dI}{dx} = (5x+7)(x+1)^{1000}$ θα μας δώσει:

$$(Ax+B)'(x+1)^{1001} + (Ax+B)((x+1)^{1001})' = (5x+7)(x+1)^{1000}$$

ή

$$A(x+1)^{1001} + (Ax+B)1001(x+1)^{1000} = (5x+7)(x+1)^{1000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x+1)(x+1)^{1000} + (Ax+B)1001(x+1)^{1000} = (5x+7)(x+1)^{1000}$$

και απλοποιώντας το $(x+1)^{1000}$, παίρνουμε:

$$Ax + A + 1001Ax + 1001B = 5x + 7$$

απ΄ όπου εξισώνοντας τους συντελεστές, προκύπτει:

$$A = \frac{5}{1002}, \quad B = \frac{7009}{1003002}$$

Άρα, το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι:

$$I = \left(\frac{5}{1002}x + \frac{7009}{1003002}\right)(x+1)^{1001} + C$$

q.e.d.

2.3 Ασκήσεις Προς Επίλυση

2.5 *Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα* $\int 6x^6 e^x dx$.

Απ: $(4320 - 4320x + 2160x^2 - 720x^3 + 180x^4 - 36x^5 + 6x^6)e^x + C$

2.6 *Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα* $\int 11x^2 e^{2x+7} dx$.

Απ: $e^{2x+7}(\frac{11}{4} - \frac{11}{2}x + \frac{11}{2}x^2) + C$

2.7 *Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα* $\int 6x^3 \alpha^x dx$.

Απ: $\frac{6\alpha^x}{\ln a}(-\frac{3}{2} + 2x - \frac{3}{2}x^2 + x^3) + C$

2.8 *Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα* $\int x^2 5^{x^3} dx$.

Απ: $\frac{1}{3\ln 5}5^{x^3}$

2.9 *Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα* $\int (2x+8)^{999}(7x+9)dx$.

Απ: $\left(\frac{7}{2002}x + \frac{8962}{2002000}\right)(2x+8)^{1000}$

Κεφάλαιο 3

Ολοκλήρωση με Αντικατάσταση

Η ολοκλήρωση με αντικατάσταση βασίζεται κυρίως στον παρακάτω μετασχηματισμό:

$$\boxed{\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(\omega)d\omega \quad \textit{οπου} \quad \omega = g(x)}$$

Παρατήρηση 3.1 *Η ολοκλήρωση με αντικατάσταση εφαρμόζεται συνήθως σε συναρτήσεις που ένα τμήμα τους είναι σύνθετο, της μορφής $f(g(x))$ και το άλλο ¨περιέχει¨ την παράγωγο της $g(x)$, ή μπορούμε εύκολα να την σχηματίσουμε.*

3.1 Λυμένες Ασκήσεις

3.1 Υπολογίσατε το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int \frac{dx}{2x+3}$.

Λύση: Θέτουμε $\omega = 2x+3$, οπότε $\frac{d\omega}{dx} = 2$, $d\omega = 2dx$ και το ολοκλήρωμα γίνεται $\int \frac{dx}{2x+3} = \int \frac{d\omega}{2\omega} = \frac{1}{2}\int \frac{d\omega}{\omega} = \frac{1}{2}\ln|\omega| + C = \frac{1}{2}\ln|2x+3| + C$.

q.e.d.

3.2 Υπολογίσατε το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int \frac{dx}{4-5x}$.

Λύση: Θέτουμε $\omega = 4-5x$, οπότε $\frac{d\omega}{dx} = -5$, $dx = \frac{d\omega}{-5}$ και το ολοκλήρωμα γίνεται $\int \frac{dx}{4-5x} = \int \frac{d\omega}{-5\omega} = -\frac{1}{5}\int \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{1}{5}\ln|\omega| + C = -\frac{1}{5}\ln|4-5x| + C$.

q.e.d.

3.3 Υπολογίσατε το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int \frac{dx}{(3-2x)^3}$.

Λύση: Θέτουμε $\omega = 3 - 2x$, οπότε $\frac{d\omega}{dx} = -2$, $dx = \frac{d\omega}{-2}$ και το ολοκλήρωμα γίνεται $\int \frac{dx}{(3-2x)^3} = \int \frac{d\omega}{-2\omega^3} = -\frac{1}{2}\int \frac{d\omega}{\omega^3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-2\omega^2} + C$ $= \frac{1}{4(3-2x)^2} + C$.

q.e.d.

3.4 Υπολογίσατε το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int \frac{xdx}{x^2+1}$.

Λύση: Θέτουμε $\omega = x^2 + 1$ και έχουμε $\frac{d\omega}{dx} = 2x$, οπότε $dx = \frac{d\omega}{2x}$ και το ολοκλήρωμα διαδοχικά γίνεται:

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \int \frac{x\frac{d\omega}{2x}}{\omega} = \frac{1}{2}\int \frac{d\omega}{\omega} = \frac{1}{2}\ln|\omega| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

q.e.d.

3.5 Υπολογίσατε το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int (1-2x)^{100}dx$.

Λύση: Θέτουμε $\omega = 1 - 2x$ και έχουμε $\frac{d\omega}{dx} = -2$, οπότε $dx = \frac{d\omega}{-2}$ και το ολοκλήρωμα διαδοχικά γίνεται:

$$\int (1-2x)^{100}dx = \int \omega^{100}\frac{d\omega}{-2} = -\frac{1}{2}\frac{\omega^{101}}{101} + C = -\frac{1}{202}(1-2x)^{101} + C$$

q.e.d.

3.6 Υπολογίσατε το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int e^{x^3+2}x^2dx$.

Λύση: Θέτουμε $\omega = x^3 + 2$, οπότε $\frac{d\omega}{dx} = 3x^2$, $dx = \frac{d\omega}{3x^2}$ και το ολοκλήρωμα διαδοχικά γίνεται:

$$\int e^{x^3+2}x^2dx = \int e^{\omega}x^2\frac{d\omega}{3x^2} = \frac{1}{3}\int e^{\omega}d\omega = \frac{1}{3}e^{\omega} + C = \frac{1}{3}e^{x^3+2} + C$$

q.e.d.

3.7 Υπολογίσατε το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int 3^x dx$.

Λύση: Θέτοντας $\omega = 3^x$, έχουμε $\frac{d\omega}{dx} = 3^x\ln 3$, $dx = \frac{d\omega}{3^x\ln 3}$ και το ολοκλήρωμα διαδοχικά γίνεται:

$$\int 3^x dx = \int 3^x\frac{d\omega}{3^x\ln 3} = \frac{1}{\ln 3}\int d\omega = \frac{1}{\ln 3}\omega + C = \frac{1}{\ln 3}3^x + C$$

q.e.d.

3.8 Υπολογίσατε το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int \varepsilon\varphi x dx$.

Λύση: Κατ' αρχάς γράφουμε $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ και μετά θέτουμε $\omega = \sigma\upsilon\nu x$, οπότε $\frac{d\omega}{dx} = -\eta\mu x$, $dx = -\frac{d\omega}{\eta\mu x}$ και το ολοκλήρωμα διαδοχικά γίνεται:

$$\int \varepsilon\varphi x dx = \int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} dx = \int -\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot \frac{d\omega}{\eta\mu x} = -\int \frac{d\omega}{\omega} = -\ln|\omega| + C = -\ln|\sigma\upsilon\nu x| + C$$

q.e.d.

3.9 Υπολογίσατε το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$.

Λύση: Θέτοντας $\omega = \varepsilon\varphi x$, έχουμε $\frac{d\omega}{dx} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, $dx = \sigma\upsilon\nu^2 x d\omega$ και το ολοκλήρωμα διαδοχικά γίνεται:

$$\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \int \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x d\omega}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \int d\omega = \omega + C = \varepsilon\varphi x + C$$

q.e.d.

3.10 Υπολογίσατε το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x dx}{\eta\mu^4 x}$.

Λύση: Θέτοντας $\omega = \eta\mu x$, έχουμε $\frac{d\omega}{dx} = \sigma\upsilon\nu x$, $dx = \frac{d\omega}{\sigma\upsilon\nu x}$ και το ολοκλήρωμα διαδοχικά γίνεται:

$$\int \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x dx}{\eta\mu^4 x} = \int \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x \sigma\upsilon\nu x dx}{\eta\mu^4 x} = \int \frac{(1 - \eta\mu^2 x)\sigma\upsilon\nu x dx}{\eta\mu^4 x} =$$

$$= \int \frac{(1-\omega^2)\sigma\upsilon\nu x \frac{d\omega}{\sigma\upsilon\nu x}}{\omega^4} = \int \frac{d\omega}{\omega^4} - \int \frac{d\omega}{\omega^2} = -\frac{1}{3\omega^3} + \frac{1}{\omega} + C = -\frac{1}{3\eta\mu^3 x} + \frac{1}{\eta\mu x} + C$$

q.e.d.

3.11 Υπολογίσατε το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int \frac{x\sigma\upsilon\nu x dx}{x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}$.

Λύση: Θέτοντας $\omega = x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, έχουμε $\frac{d\omega}{dx} = x \cdot \sigma\upsilon\nu x$, $x \cdot \sigma\upsilon\nu x dx = d\omega$ και το ολοκλήρωμα διαδοχικά γίνεται:

$$\int \frac{x\sigma\upsilon\nu x dx}{x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} = \int \frac{d\omega}{\omega} = \ln|\omega| + C = \ln|x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x| + C$$

q.e.d.

3.12 Υπολογίσατε το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int \frac{dx}{x(\ln x + 3)}$.

Λύση: Θέτοντας $\omega = \ln x + 3$, έχουμε $\frac{d\omega}{dx} = \frac{1}{x}$, $d\omega = \frac{dx}{x}$ και το ολοκλήρωμα διαδοχικά γίνεται:

$$\int \frac{dx}{x(\ln x + 3)} = \int \frac{d\omega}{\omega} = \ln|\omega| + C = \ln|\ln x + 3| + C$$

q.e.d.

3.13 Υπολογίσατε το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}$.

Λύση: Θέτοντας $\omega = x^3 + 2$, έχουμε $\frac{d\omega}{dx} = 3x^2$, $d\omega = 3x^2 dx$ και το ολοκλήρωμα διαδοχικά γίνεται:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{x^3+2}} = \frac{1}{3}\int \frac{d\omega}{\sqrt[4]{\omega}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\omega^{-\frac{3}{4}}}{\left(-\frac{3}{4}\right)} + C = +\frac{4}{9}(x^3+2)^{\frac{3}{4}} + C$$

q.e.d.

3.14 Υπολογίσατε το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int \sqrt{x^2 - 2x^4}dx$ **με** $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Λύση: Θέτοντας $\omega = 1 - 2x^2$, έχουμε $\frac{d\omega}{dx} = -4x$, $d\omega = -4xdx$ και το ολοκλήρωμα διαδοχικά γίνεται:

$$\int \sqrt{x^2 - 2x^4}dx = \int \sqrt{1-2x^2}xdx = -\frac{1}{4}\int \sqrt{\omega}d\omega =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{\omega^{3/2}}{3/2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{(1-2x^2)^{3/2}}{3/2} + C$$

q.e.d.

3.2 Ασκήσεις Προς Επίλυση.

Υπολογίσατε τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα:

3.15 $\int \frac{1}{ax+b}dx$

Απ: $\frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

3.16 $\int \frac{1}{(ax+b)^n}dx$

Απ: $\frac{1}{a(1-n)(b+ax)^{n-1}}$

3.17 $\int \frac{xdx}{(x^2+5)^5}$.

Απ: $-\frac{1}{8(5+x^2)^4} + C$

3.18 $\int \frac{xdx}{(x^2+4)^3}$.

Απ: $-\frac{1}{4(4+x^2)^2} + C$

3.19 $\int (5+2x)^{1000} dx$.

Απ: $\frac{(5+2x)^{1001}}{2002} + C$

3.20 $\int (ax+b)^n dx$

Απ: $\frac{(b+ax)^{n+1}}{a(n+1)} + C$

3.21 $\int x^3(x^4+2)^{\frac{3}{4}} dx$

Απ: $\frac{1}{7}(2+x^4)^{7/4} + C$

3.22 $\int (1-x^3)^2 x^2 dx$

Απ: $\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^9}{9} + C$

3.23 $\int (2x^2+3)^{\frac{1}{3}} x dx$

Απ: $\frac{1}{2}(\frac{9}{8} + \frac{3x^2}{4})(3+2x^2)^{1/3} + C$

3.24 $\int (x^2-x)^4(2x-1) dx$

Απ: $-\frac{x^5}{5} + x^6 - 2x^7 + 2x^8 - x^9 + \frac{x^{10}}{5} + C$

3.25 $\int a^x dx$

Απ: $\frac{a^x}{\ln a} + C$

3.26 $\int \eta\mu(ax+b) dx$

Απ: $-\frac{\sigma\upsilon\nu(ax+b)}{a} + C$

3.27 $\int x\eta\mu(3+x^2) dx$

Απ: $-\frac{\sigma\upsilon\nu(3+x^2)}{2} + C$

3.28 $\int \frac{1}{\eta\mu^2 x} dx$

Απ: $-\sigma\varphi x + C$

3.29 $\int \eta\mu x 5^{\sigma\upsilon\nu x} dx$

Απ: $-\frac{5^{\sigma\upsilon\nu x}}{\ln 5} + C.$

3.30 $\int \sigma\varphi x dx$

Απ: $\ln(\eta\mu x) + C$

3.31 $\int \frac{\eta\mu 2x dx}{\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}$

Απ: $2\sqrt{1+\eta\mu^2 x} + C.$

3.32 $\int \frac{\tau o\xi\eta\mu x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Απ: $\frac{1}{2}\tau o\xi\eta\mu^2 x.$

3.33 $\int e^{ax+b} dx$

Απ: $\frac{1}{a}e^{ax+b} + C.$

3.34 $\int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

Απ: $e^{\sqrt{x}} + C.$

3.35 $\int \frac{e^{2x}-7e^x+2}{e^x} dx$

Απ: $-2e^{-x} + e^x - 7x + C.$

3.36 $\int \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$

Απ: $-e^{\frac{1}{x}} + C.$

3.37 $\int \frac{e^{\frac{1}{x^2}} dx}{x^3}$

Απ: $-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{x^2}} + C.$

3.38 $\int \frac{3\ln x+2}{x} dx$

Απ: $2\ln x + \frac{3}{2}\ln^2 x + C.$

3.39 $\int \sqrt{x^5+3} \cdot x^4 dx$

Απ: $\frac{1}{5}(2+\frac{2x^5}{3})\sqrt{3+x^5}+C.$

3.40 $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Απ: $\tau o\xi\eta\mu(x/2)+C.$

3.41 $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x-4}}$

Απ: $\sqrt{x^2+2x-4}+C.$

3.42 $\int \sqrt[3]{1-x^2}\cdot x$

Απ: $\frac{1}{2}(1-x^2)^{1/3}(-\frac{3}{4}+\frac{3x^2}{4})+C.$

Κεφάλαιο 4

Ολοκληρώματα μέσω της $\tau o\xi\varepsilon\varphi x$

Όταν έχουμε προς ολοκλήρωση κλάσματα, με άθροισμα τετραγώνων στον παρανομαστή, τότε συνήθως χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$\boxed{\int \frac{du}{u^2+\delta^2} = \frac{1}{\delta}\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{u}{\delta} + C}$$

Το u, στον παραπάνω τύπο, μπορεί να είναι μία απλή μεταβλητή ή και ολόκληρη συνάρτηση.

4.1 Λυμένες Ασκήσεις

4.1 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{dx}{x^2+4}$.

Λύση: Διαδοχικά έχουμε:

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \int \frac{dx}{x^2+2^2} = \frac{1}{2}\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{x}{2} + C$$

q.e.d.

4.2 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$.

Λύση: Διαδοχικά έχουμε

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \int \frac{dx}{x^2+6x+9+4} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+2^2} =$$

$$= \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+2^2} = \frac{1}{2}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{x+3}{2}\right) + C$$

q.e.d.

4.3 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{dx}{3x^2+4x+11}$.

Λύση: Ο παρανομαστής γίνεται: $3x^2+4x+11 = (\sqrt{3}x)^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot x+11 = (\sqrt{3}x)^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot x+11 = (\sqrt{3}x)^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot x+(\frac{2}{\sqrt{3}})^2-(\frac{2}{\sqrt{3}})^2+11 = (\sqrt{3}x+\frac{2}{\sqrt{3}})^2+(\sqrt{\frac{29}{3}})^2$ και επομένως το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$I = \int \frac{dx}{(\sqrt{3}x+\frac{2}{\sqrt{3}})^2+(\sqrt{\frac{29}{3}})^2}$$

Θέτοντας $u = \sqrt{3}x+\frac{2}{\sqrt{1}}$, έχουμε $du = \sqrt{3}dx \Rightarrow dx = \frac{du}{\sqrt{3}}$ και αντικαθιστώντας παίρνουμε:

$$I = \int \frac{\frac{du}{\sqrt{3}}}{u^2+(\sqrt{\frac{29}{3}})^2} = \frac{2}{\sqrt{1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{29}{3}}}\cdot \tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{u}{\sqrt{\frac{29}{3}}}+C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{29}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\sqrt{3}x+\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{29}{3}}}\right)+C = \frac{\sqrt{29}}{29}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{3x+2}{\sqrt{29}}\right)+C$$

q.e.d.

4.4 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{dx}{x\ln^2 x+10x}$.

Λύση: Κατ΄ αρχάς θέτουμε $w = \ln x$, οπότε $\frac{dw}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = xdw$. Αντικαθιστώντας παίρνουμε για το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{dx}{x(lnx)^2+10x} = \int \frac{xdw}{x(w^2+10)} = \int \frac{dw}{w^2+(\sqrt{10})^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{w}{\sqrt{10}}\right)+C = \frac{\sqrt{10}}{10}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\ln x}{\sqrt{10}}\right)+C$$

q.e.d.

4.5 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμ: $\int \frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot dx}{\eta\mu^4 x+\sigma\upsilon\nu^4 x}$.

Λύση: Διαιρούμε αριθμητή και παρανομαστή με το $\sigma\upsilon\nu^4 x$ και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot dx}{\eta\mu^4 x+\sigma\upsilon\nu^4 x} = \int \frac{\varepsilon\varphi x\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{(\varepsilon\varphi^2 x)^2+1}\cdot dx$$

Θέτουμε $w = \varepsilon\varphi^2 x$ και έχουμε $\frac{dw}{dx} = 2\varepsilon\varphi x \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, οπότε $\frac{dw}{2} = \varepsilon\varphi x \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \cdot dx$ και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{dw}{w^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dw}{w^2+1} = \frac{1}{2}\tau o\xi\varepsilon\varphi w + C =$$
$$= \frac{1}{2}\tau o\xi\varepsilon\varphi(\varepsilon\varphi^2 x) + C$$

q.e.d.

4.2 Ασκήσεις Προς Επίλυση.

Υπολογίσατε τα ολοκληρώματα:

4.6 $\int \frac{dx}{2\eta\mu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Απ: $\frac{1}{3}\tau o\xi\varepsilon\varphi(\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \varepsilon\varphi x) + C.$

4.7 $\int \frac{\sigma\upsilon\nu x dx}{\eta\mu^2 x + 7}$

Απ: $\frac{6}{\sqrt{7}}\tau o\xi\varepsilon\varphi(\sqrt{\frac{1}{7}} \cdot \eta\mu x) + C.$

4.8 $\int \frac{x dx}{x^4+9}$

Απ: $\frac{1}{4}\tau o\xi\varepsilon\varphi(\frac{x^2}{3}) + C.$

4.9 $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$

Απ: $\tau o\xi\varepsilon\varphi(e^x) + C.$

4.10 $\int \frac{\sigma\upsilon\nu x dx}{(\ln^8(\eta\mu x)+4)\eta\mu x}$

Απ: $\frac{1}{2}\tau o\xi\varepsilon\varphi(\frac{\ln(\eta\mu x)}{2}) + C.$

4.11 $\int \frac{\eta\mu x dx}{9\sigma\upsilon\nu^2 x + 4}$

Απ: $\frac{1}{6}\tau o\xi\varepsilon\varphi(\frac{3}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x) + C.$

4.12 $\int \frac{dx}{5x^2+5x+3}$

Απ: $-\frac{2}{\sqrt{21}}\tau o\xi\varepsilon\varphi(\frac{7+10x}{\sqrt{29}}) + C.$

4.13 $\int \frac{dx}{x^2-x+1}$

Απ: $\frac{2}{\sqrt{39}}\tau o\xi\varepsilon\varphi(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + C.$

4.14 $\int \frac{dx}{\frac{11}{3}x^6 - x + \frac{8}{7}}$

Απ: $2\sqrt{\frac{21}{23}}\tau o\xi\varepsilon\varphi(\sqrt{\frac{7}{69}}(22x-3)) + C.$

Κεφάλαιο 5

Παραγοντική Ολοκλήρωση

5.1 Ο Βασικός Τύπος.

Αν και δεν υπάρχει γενικός τύπος γιά την ολοκλήρωση γινομένου, η παρακάτω σχέση μπορεί να απλοποιήσει πολλά ολοκληρώματα:

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

Ονομάζεται *παραγοντική ολοκλήρωση* και προκύπτει συνοπτικά ως εξής: Έστωσαν δύο συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$. Ισχύει ότι $[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$, ολοκληρώνοντας έχουμε $\int[f(x)\cdot g(x)]'dx = \int f'(x)\cdot g(x)dx + \int f(x)\cdot g'(x)dx$. Επειδή δε, $\int[f(x)\cdot g(x)]'dx = f(x)\cdot g(x)$, αντικαθιστώντας έχουμε το ζητούμενο.

5.2 Εμπειρικοί Κανόνες

Δεν υπάρχει ακριβής διαδικασία για το ποιά συνάρτηση θα συνδυασθεί με την παράγωγο. Μολοταύτα, οι ακόλουθοι εμπειρικοί κανόνες είναι εξαιρετικά χρήσιμοι:

• Όταν έχουμε δύναμη του x και τριγωνομετρική συνάρτηση, συνδυάζουμε με την παράγωγο, την τριγωνομετρική συνάρτηση.

• Όταν έχουμε δύναμη του x και εκθετική συνάρτηση, συνδυάζουμε με την παράγωγο, την εκθετική συνάρτηση.

• Όταν έχουμε δύναμη του x και λογαριθμική συνάρτηση, συνδυάζουμε με την παράγωγο, την δύναμη του x.

• Όταν έχουμε εκθετική συνάρτηση και τριγωνομετρική συνάρτηση, κάνουμε δύο παραγοντικές ολοκληρώσεις με τον ίδιο συνδυασμό και μετά λύνουμε εξίσωση.

• Ενίοτε και απλό ολοκλήρωμα μπορεί να μετατραπεί σε παραγοντικό πολλαπλασιαζόμενο με την ποσότητα x'.

5.3 Λυμένες Ασκήσεις

5.1 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα: $\int x\sigma\upsilon\nu x dx$.

Λύση: Διαδοχικά έχουμε:

$$\int x(\eta\mu x)' dx = x\eta\mu x - \int (x)'\eta\mu x dx =$$

$$= x\eta\mu x - \int \eta\mu x dx = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + C$$

q.e.d.

5.2 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα: $\int x^2 e^x dx$.

Λύση: Διαδοχικά έχουμε:

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 (e^x)' dx = x^2 e^x - \int (x^2)' e^x dx =$$

$$= x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2\int x(e^x)' dx =$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2\int (x)' e^x dx =$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2\int e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C =$$

$$= e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

q.e.d.

5.3 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα: $\int x^2 \eta\mu x dx$.

Λύση: Διαδοχικά έχουμε:

$$\int x^2 \eta\mu x dx = \int x^2(-\sigma\upsilon\nu x)' dx = -x^2\sigma\upsilon\nu x + \int (x^2)'\sigma\upsilon\nu x dx =$$

$$= -x^2\sigma\upsilon\nu x + 2\int x\sigma\upsilon\nu x dx = -x^2\sigma\upsilon\nu x + 2\int x(\eta\mu x)' dx =$$

$$= -x^2\sigma\upsilon\nu x + 2x\eta\mu x - 2\int (x)'\eta\mu x dx =$$

$$= -x^2\sigma\upsilon\nu x + 2x\eta\mu x - 2\int \eta\mu x dx = -x^2\sigma\upsilon\nu x + 2x\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x + C$$

q.e.d.

5.4 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα: $\int x^3 \ln x dx$.

Λύση: Διαδοχικά έχουμε, εφαρμόζοντας παραγοντική:

$$\int x^3 \ln x dx = \int \left(\frac{x^4}{4}\right)' \ln x dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4} + C =$$

$$= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C$$

q.e.d.

5.5 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα: $\int e^{-x}\eta\mu x dx$

Λύση: Ορίζουμε $w = \int e^{-x}\eta\mu x dx$ και εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση, έχουμε διαδοχικά:

$$I = \int (-e^{-x})'\eta\mu x dx = -e^{-x}\eta\mu x - \int (-e^{-x}(\eta\mu x)')dx$$

$$= -e^{-x}\eta\mu x + \int (e^{-x}\sigma\upsilon\nu x)dx = -e^{-x}\eta\mu x + I_0$$

όπου $I_0 = \int e^{-x}\sigma\upsilon\nu x dx$. Το νέο αυτό ολοκλήρωμα υπολογίζεται με μία ακόμα παραγοντική ολοκλήρωση και έχουμε:

$$I_0 = \int (-e^{-x})'\sigma\upsilon\nu x dx = -e^{-x}\sigma\upsilon\nu x - \int (-e^{-x})(\sigma\upsilon\nu x)' dx$$

$$= -e^{-x}\sigma\upsilon\nu x - \int e^{-x}\eta\mu x dx = -e^{-x}\sigma\upsilon\nu x - I \Rightarrow I_0 = -e^{-x}\sigma\upsilon\nu x - I$$

άρα τελικά $I = -e^{-x}\eta\mu x - e^{-x}\sigma\upsilon\nu x - I$. Λύνοντας αλγεβρικά ως προς I, παίρνουμε:

$$I = \frac{1}{2}(-e^{-x}\eta\mu x - e^{-x}\sigma\upsilon\nu x) + C$$

q.e.d.

5.6 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα: $\int \eta\mu(\ln x)dx$

Λύση: Θέτουμε $w = \ln x$ και άρα $x = e^w \Rightarrow dx = e^w dw$. Το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I = \int \eta\mu w e^w dw = \int \eta\mu w (e^w)' dw =$$

$$= \eta\mu w e^w - \int (\eta\mu w)' e^w dw = \eta\mu w e^w - \int \sigma\upsilon\nu w e^w dw = \eta\mu w e^w - I_o$$

Υπολογίζουμε τώρα το ολοκλήρωμα I_o, χρησιμοποιώντας πάλι παραγοντική:

$$I_o = \int \sigma\upsilon\nu w e^w dw = \int \sigma\upsilon\nu w (e^w)' dw =$$

$$= \sigma\upsilon\nu w e^w - \int (\sigma\upsilon\nu w)' e^w dw =$$

$$= \sigma\upsilon\nu w e^w + \int \eta\mu w e^w dw = \sigma\upsilon\nu w e^w + I$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του I_o στην σχέση για το I, έχουμε:

$$I = \eta\mu w e^w - \sigma\upsilon\nu w e^w - I \Rightarrow 2I = \eta\mu w e^w - \sigma\upsilon\nu w e^w \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \cdot (\eta\mu w e^w - \sigma\upsilon\nu w e^w) + C$$

Με αντίστροφη αντικατάσταση παίρνουμε τελικά:

$$I = \frac{x}{2}[\eta\mu(\ln x) - \sigma\upsilon\nu(\ln x)] + C$$

q.e.d.

5.7 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα: $\int \eta\mu x \cdot \eta\mu(3x)dx$

Λύση: Ορίζουμε

$$I = \int \eta\mu x \cdot \eta\mu(3x)dx = \int (-\sigma\upsilon\nu x)' \eta\mu(3x)dx =$$

$$= -\sigma\upsilon\nu x \eta\mu(3x) - \int [-\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu(3x))']dx =$$

$$= -\sigma\upsilon\nu x \eta\mu(3x) + 3\int \sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu(3x)dx = -\sigma\upsilon\nu x \eta\mu(3x) + 3I_o$$

Υπολογίζουμε τώρα το I_o, πάλι με παραγοντική:

$$I_o = \int \sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu(3x)dx = \int (\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu(3x)dx =$$

$$= \eta\mu x\sigma\upsilon\nu(3x) - \int \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu(3x))'dx =$$

$$= \eta\mu x\sigma\upsilon\nu(3x) + 3\int \eta\mu x\eta\mu(3x)dx = \eta\mu x\sigma\upsilon\nu(3x) + 3I$$

Αντικαθιστώντας και λύνοντας ως προς I, έχουμε

$$I = -\sigma\upsilon\nu x\eta\mu(3x)+3(\eta\mu x\sigma\upsilon\nu(3x)+3I) \Rightarrow I = \frac{1}{8}(\sigma\upsilon\nu x\eta\mu(3x)-3\eta\mu x\sigma\upsilon\nu(3x))+C$$

q.e.d.

5.8 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα: $\int x\eta\mu(ax+b)dx$.

Λύση: Ορίζουμε $I = \int x\eta\mu(ax+b)dx$ και έχουμε διαδοχικά:

$$I = \left(-\frac{1}{a}\right)\int x(\sigma\upsilon\nu(ax+b))'dx = \left(-\frac{1}{a}\right)x\sigma\upsilon\nu(ax+b)+\left(\frac{1}{a}\right)\int (x)'\sigma\upsilon\nu(ax+b)dx =$$

$$= \left(-\frac{1}{a}\right)x\sigma\upsilon\nu(ax+b) + \left(\frac{1}{a}\right)\int \sigma\upsilon\nu(ax+b)dx =$$

$$= \left(-\frac{1}{a}\right)x\sigma\upsilon\nu(ax+b) + \left(\frac{1}{a^2}\right)\eta\mu(ax+b) + C$$

q.e.d.

5.9 Υπολογίσατε το Ολοκλήρωμα $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$.

Λύση: Ζητάμε αριθμούς A και B έτσι ώστε:

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{Ax+A+B}{(x+1)^2}$$

οπότε $A = 1$ και $A + B = 0$, άρα $A = 1$ και $B = -1$. Το ολοκλήρωμα τώρα γίνεται:

$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = \int \frac{e^x}{x+1}dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx$$

Υπολογίζουμε πρώτα το πρώτο ολοκλήρωμα με παραγοντική:

$$\int \frac{e^x}{x+1}dx = \int \frac{(e^x)'}{x+1}dx =$$

$$= \frac{e^x}{x+1} - \int e^x \cdot (\frac{1}{x+1})'dx = \frac{e^x}{x+1} + \int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx$$

άρα τελικά

$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = \frac{e^x}{x+1} + \int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2}dx = \frac{e^x}{x+1} + C$$

q.e.d.

5.10 Υπολογίσατε ταυτόχρονα τα ολοκληρώματα: $I_1 = \int e^{ax}\sigma\upsilon\nu(bx)dx$ **και** $I_2 = \int e^{ax}\eta\mu(bx)dx$**.**

Λύση: Υπολογίζουμε πρώτα το I_1 παραγοντικά:

$$I_1 = \int (\frac{1}{a}e^{ax})'\sigma\upsilon\nu(bx)dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sigma\upsilon\nu(bx) - \frac{1}{a}\int e^{ax}(\sigma\upsilon\nu(bx))'dx =$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sigma\upsilon\nu(bx) - \frac{1}{a}\int e^{ax}b(-\eta\mu(bx))dx$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{a}e^{ax}\sigma\upsilon\nu(bx) + \frac{b}{a}I_2 \tag{5.1}$$

Ομοίως για το I_2 έχουμε:

$$I_2 = \int (\frac{1}{a}e^{ax})'\eta\mu(bx)dx =$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\eta\mu(bx) - \frac{1}{a}\int e^{ax}(\eta\mu(bx))'dx =$$

$$= \frac{1}{a}e^{ax}\eta\mu(bx) - \frac{1}{a}\int e^{ax}b \cdot \sigma\upsilon\nu(bx)dx$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{a}e^{ax}\eta\mu(bx) - \frac{b}{a}I_1 \tag{5.2}$$

Επιλύοντας το σύσμημα των εξισώσεων (5.1) και (5.2), ως πρός I_1 και I_2, έχουμε τελικά:

$$I_1 = \frac{1}{(a^2+b^2)}[ae^{ax}\sigma\upsilon\nu(bx) + be^{ax}\eta\mu(bx)] + C$$

$$I_2 = \frac{1}{(a^2+b^2)}[ae^{ax}\eta\mu(bx) + be^{ax}\sigma\upsilon\nu(bx)] + C$$

q.e.d.

5.11 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$.

Λύση: Βλέπουμε ότι $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ και επομένως θα δουλέψουμε παραγοντικά. Διαδοχικά έχουμε:

$$\int \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \int x(\varepsilon\varphi x)' dx = x\varepsilon\varphi x - \int (x)'\varepsilon\varphi x dx =$$

$$= x\varepsilon\varphi x - \int \varepsilon\varphi x dx$$

Ξέρουμε ότι $\int \varepsilon\varphi x dx = -\ln(|\sigma\upsilon\nu x|) + C$ και άρα τελικά

$$\int \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = x\varepsilon\varphi x + \ln(|\sigma\upsilon\nu x|) + C$$

q.e.d.

5.12 Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση υπολογίσατε το ολοκλήρωμα $\int \varepsilon\varphi^2 x dx$.

Λύση: Ορίζουμε $I = \int \varepsilon\varphi^2 x dx$ και διαδοχικά έχουμε:

$$I = \int \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \int \frac{\eta\mu x \cdot \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \int \frac{\eta\mu x \cdot (-\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx =$$

$$= -\frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \int \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right)' \cdot \sigma\upsilon\nu x dx =$$

$$= -\varepsilon\varphi x + \int \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu^2 x)'}{\sigma\upsilon\nu^4 x} \cdot \sigma\upsilon\nu x dx =$$

$$= -\varepsilon\varphi x + \int \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x + \eta\mu^2 x \cdot 2 \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^3 x} dx =$$

$$= -\varepsilon\varphi x + \int (1 + 2\varepsilon\varphi^2 x) dx$$

Άρα έχουμε:

$$I = -\varepsilon\varphi x + \int dx + 2\int \varepsilon\varphi^2 x dx = -\varepsilon\varphi x + x + 2I$$

και λύνοντας ως πρός I, παίρνουμε τελικά:

$$I = \varepsilon\varphi x - x + C$$

q.e.d.

5.13 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα

$$\int \pi(x)\sigma\upsilon\nu(\beta x)dx, \quad \beta \neq 0$$

όπου $\pi(x)$ **πολυώνυμο** μ**-βαθμού.**

Λύση: Ολοκληρώνοντας παραγοντικά έχουμε:

$$\int \pi(x)\sigma\upsilon\nu(\beta x)dx = \int \pi(x)\left(\frac{1}{\beta}\eta\mu(\beta x)\right)' dx =$$

$$= \frac{1}{\beta}\pi(x)\eta\mu(\beta x) - \frac{1}{\beta}\int \pi'(x)\eta\mu(\beta x)dx =$$

$$= \frac{1}{\beta}\pi(x)\eta\mu(\beta x) + \frac{1}{\beta}\int \pi'(x)\sigma\upsilon\nu\left(\beta x + \frac{\pi}{2}\right)dx$$

Άρα δείξαμε ότι:

$$\int \pi^{(0)}(x)\sigma\upsilon\nu\left(\beta x + 0\cdot\frac{\pi}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{\beta}\cdot\pi^{(0)}(x)\eta\mu\left(\beta x + 0\cdot\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\beta}\int \pi'(x)\sigma\upsilon\nu\left(\beta x + 1\cdot\frac{\pi}{2}\right)dx$$

όπου $\pi^{(0)}(x) = \pi(x)$ η μηδενική παράγωγος του $\pi(x)$. Επαναλαμβάνοντας τα ίδια για το ολοκλήρωμα $\int \pi'(x)\sigma\upsilon\nu\left(\beta x + \frac{\pi}{2}\right)dx$, έχουμε:

$$\int \pi'(x)\sigma\upsilon\nu\left(\beta x + 1\cdot\frac{\pi}{2}\right)dx =$$

$$\frac{1}{\beta}\pi'(x)\eta\mu\left(\beta x + 1\cdot\frac{\pi}{2}\right) + \int \pi''(x)\sigma\upsilon\nu\left(\beta x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)dx$$

άρα γενικά έχουμε:

$$\int \pi^{(k)}(x)\sigma\upsilon\nu\left(\beta x + k\cdot\frac{\pi}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{\beta}\pi^{(k)}(x)\eta\mu\left(\beta x + k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + \int \pi^{(k+1)}(x)\sigma\upsilon\nu\left(\beta x + (k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)dx$$

Υπολογίζοντας όλα τα ολοκληρώματα για $k = 0, 1, 6, \ldots, \mu$, λαμβάνοντας υπ' όψην ότι $\pi^{(\mu+1)}(x) = 0$ και αντικαθιστώντας αντίστροφα, έχουμε τελικά:

$$\int \pi(x)\sigma\upsilon\nu(\beta x)dx = \sum_{\lambda=0}^{\mu}\frac{1}{\beta^{\lambda+1}}\cdot\pi^{(\lambda)}(x)\eta\mu\left(\beta x + \lambda\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

q.e.d.

5.14 Σε ένα αρχικό κεφάλαιο 500 **χρηματικών μονάδων, γίνονται επενδύσεις βάσει του τύπου** $I(t) = e^{0.2\sqrt{t}}$**. Βρείτε το κεφάλαιο την χρονική στιγμή** $t = 3$**.**

Λύση: Ισχύει η βασική σχέση:

$$\frac{dK}{dt} = I(t) \Rightarrow \frac{dK}{dt} = e^{0.2\sqrt{t}} \Rightarrow K(t) = \int e^{0.2\sqrt{t}}dt$$

Θα ολοκληρώσουμε με αντικατάσταση. Θέτουμε $\omega = 0.2\sqrt{t}$ και έχουμε

$$d\omega = 0.2 \cdot \frac{1}{2} \cdot t^{-1/2}dt = \frac{0.1}{\sqrt{t}}dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dt = \frac{\sqrt{t}}{0.1}d\omega = \frac{\omega}{0.02}d\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^{0.2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{0.02}\int e^{\omega}d\omega = 50\int e^{\omega}\omega d\omega$$

Χρησιμοποιώντας τώρα παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε:

$$\int e^{\omega}\omega d\omega = \int (e^{\omega})'\omega d\omega = \omega e^{\omega} - \int e^{\omega}(\omega)'d\omega =$$

$$\omega e^{\omega} - \int e^{\omega}d\omega = \omega e^{\omega} - e^{\omega} + C$$

Άρα

$$K(t) = 50\left(0.2\sqrt{t}e^{0.2\sqrt{t}} - e^{0.2\sqrt{t}} + C\right)$$

Γιά $t = 0$, $K(6) = 500$ και επομένως $500 = 50(0 - 1 + C) \Rightarrow C = 11$ και τελικά

$$K(t) = 50\left(0.2\sqrt{t}e^{0.2\sqrt{t}} - e^{0.2\sqrt{t}} + 11\right)$$

και με αντικατάσταση βρίσκουμε $K(3) = 503.792$.

q.e.d.

5.4 Ασκήσεις προς Επίλυσην

Υπολογίσατε τα ολοκληρώματα

5.15 $\int x\eta\mu x dx$

Απ: $-x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + C$

5.16 $\int \tau o\xi \eta \mu x dx$

Απ: $x\tau o\xi\eta\mu x + \sqrt{1-x^2} + C$

5.17 $\int x \tau o\xi \varepsilon \varphi x dx$

Απ: $\frac{1}{2}(x^2+1)\tau o\xi\varepsilon\varphi x - \frac{x}{2} + C$

5.18 $\int \frac{dx}{\eta\mu^3 x}$

Απ: $-\frac{\sigma\varphi x}{2\eta\mu x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{\eta\mu x} - \sigma\varphi x\right| + C$

5.19 $\int x\ln(x^2+7)dx$

Απ: $-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}(x^2+7)\ln(x^2+7) + C$

5.20 $\int \ln(\varepsilon\varphi x)\frac{9}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

Απ: $-9\varepsilon\varphi x + 9\ln(\varepsilon\varphi x)\varepsilon\varphi x + C$

5.21 $\int \frac{1}{x}\ln x dx$

Απ: $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$

5.22 $\int x\sqrt{x+1}dx$

Απ: $\frac{2}{15}(\sqrt{x+1})(3x^2+x-2)$

5.23 $\int (x+3)(x+2)^{-4}dx$

Απ: $-\frac{1}{3(2+x)^3} - \frac{1}{2(2+x)^2}$

5.24 $\int 3^x \eta\mu x dx$

Απ: $\frac{3^x(\ln x \cdot \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)}{\ln^2 3+1}$

5.25 $\int x\tau o\xi\eta\mu\left(\frac{a}{x}\right)dx$

Απ: $\frac{x^2}{2}\tau o\xi\eta\mu\left(\frac{a}{x}\right) + \frac{ax}{2}\sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2}} + C$

5.26 $\int x^3(\ln x)^2 dx$

Απ: $\frac{x^4}{4}\ln^2 x - \frac{x^4}{8}\ln x + \frac{x^4}{32} + C$

5.27 $\int \ln(\sqrt{x-1})dx$

Απ: $\ln(\sqrt{x-1})(x-1) + \frac{1-x}{2} + C$

5.28 $\int x^2 2^x dx$

Απ: $2^x \left(\frac{2}{\ln^3 2} - \frac{2x}{\ln^2 2} + \frac{x^2}{\ln 2}\right)$

5.29 *Να αποδειχθεί ο τύπος:*

$$\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$$

5.30 *Να αποδειχθεί ο τύπος:*

$$\int f(x)g''(x)dx + f'(x)g(x) = \int g(x)f''(x)dx + f(x)g'(x)$$

5.31 *Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα:*

$$\int \ln[\sigma(t)]e^{-rt}dt$$

όπου $r \in R$ *και* $\sigma(t)$ *συνάρτηση του* t.

5.32 *Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα:*

$$\int U(C(t))e^{-rt}dt$$

όπου $r \in R$ *και* $\sigma(t)$ *συνάρτηση του* t.

5.33 *Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα:*

$$T = k\int u^2(A-u)^{\gamma-1}du$$

όπου $A \in R$ *και* $\gamma > 0$.

5.34 *Δείξατε ότι, εάν το* $p(x)$ *είναι πολυώνυμο* n*-βθμού, τότε:*

$$\int e^x p(x) = e^x[p(x) - p'(x) + p''(x) - \cdots + (-1)^n p^{(n)}(x)]$$

Κεφάλαιο 6

Αναγωγικοί Τύποι

6.1 Γενικά

Με την βοήθεια της παραγοντικής ολοκλήρωσης μπορούμε να αποδείξουμε τύπους αναγωγής ενός ολοκληρώματος σε άλλο απλούστερο. Αυτοί οι τύποι ονομάζονται *αναγωγικοί*.

6.2 Τριγωνομετρικοί Αναγωγικοί Τύποι

Οι κάτωθι τύποι είναι χρησιμότατοι:
Εάν $I_\nu = \int \eta\mu^\nu x dx$, τότε:

$$\boxed{I_\nu = -\frac{\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x}{\nu} + \frac{\nu-1}{\nu} I_{\nu-2}}$$

Εάν $I_\nu = \int \sigma\upsilon\nu^\nu x dx$, τότε:

$$\boxed{I_\nu = \frac{\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\eta\mu x}{\nu} + \frac{\nu-1}{\nu} I_{\nu-2}}$$

6.3 Αναγωγικός Τύπος Ρητής Ολοκλήρωσης

Ο κάτωθι τύπος είναι εξαιρετικής σπουδαιότητος, αφού χρησιμοποιείται στον υπολογισμό ολοκληρώματος, ρητής συναρτήσεως.
Έστω $I_\nu = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^\nu}$, τότε:

$$\boxed{I_\nu = \frac{1}{a^2}\left[\frac{x}{(2\nu-2)(x^2+a^2)^{\nu-1}} + \frac{2\nu-3}{2\nu-2} I_{\nu-1}\right]}$$

όταν ν διάφορο του 1.

6.4 Λυμένες Ασκήσεις.

6.1 Υπολογίσατε το $\int \sigma\upsilon\nu^5 x dx$.

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε τον σχετικό αναγωγικό τύπο. Θέτουμε $I_5 = \int \sigma\upsilon\nu^5 x dx$ και έχουμε, αντικαθιστώντας στον $I_\nu = \frac{\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}x\eta\mu x}{\nu} + \frac{\nu-1}{\nu}I_{\nu-2}$:

$$I_5 = \frac{\sigma\upsilon\nu^4 x\eta\mu x}{5} + \frac{5-1}{5}I_3$$

Για το I_3 έχουμε:

$$I_3 = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu x}{3} + \frac{3-1}{3}I_1$$

και

$$I_1 = \int \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x + K$$

Με αντίστροφη αντικατάσταση και εκτέλεση των πράξεων, έχουμε τελικά:

$$I_5 = \frac{\sigma\upsilon\nu^4 x\eta\mu x}{5} + \frac{4\sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu x}{15} + \frac{8}{15}\eta\mu x + C$$

q.e.d.

6.2 Υπολογίσατε το $\int \frac{1}{(x^2+3)^3}dx$.

Λύση: θα χρησιμοποιήσουμε τον αναγωγικό τύπο ρητής ολοκλήρωσης. Έστω $I_3 = \int \frac{1}{(x^2+3)^3}dx$ τότε:

$$I_3 = \int \frac{1}{(x^2+(\sqrt{3})^2)^3}dx$$

, οπότε $\alpha = \sqrt{3}$ και διαδοχικά έχουμε:

$$I_3 = \frac{1}{(\sqrt{3})^2}\left[\frac{x}{(2\cdot 3-2)[x^2+(\sqrt{3})^2]^{3-1}} + \frac{2\cdot 3-3}{2\cdot 3-2}\cdot I_2\right]$$

$$I_2 = \frac{1}{(\sqrt{3})^2}\left[\frac{x}{(2\cdot 2-2)[x^2+(\sqrt{3})^2]^{2-1}} + \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}\cdot I_1\right]$$

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+(\sqrt{3})^2}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{x}{\sqrt{3}} + K$$

Με αντίστροφη αντικατάσταση και εκτέλεση των πράξεων, έχουμε τελικά:

$$I_3 = \frac{x}{12(x^2+3)^2} + \frac{x}{24(x^2+3)} + \frac{1}{24\sqrt{3}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

q.e.d.

6.3 Υπολογίσατε το

$$\int \frac{1}{(x^2+x+2)^2}dx$$

Λύση: Θα γράψουμε κατ΄ αρχάς το x^2+x+2 σαν άθροισμα τετραγώνων:

$$x^2+x+2 = x^2+2\frac{1}{2}x+2 = x^2+2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+2 =$$

$$= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$$

Το ολοκλήρωμα τώρα γράφεται:

$$I_2 = \int \frac{1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2\right]^2}dx$$

Χρησιμοποιώντας τον αναγωγικό τύπο έχουμε:

$$I_2 = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}\left[\frac{x+\frac{1}{2}}{(2\cdot 2-2)\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2\right]^{2-1}}+\frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}\cdot I_1\right]$$

$$I_1 = \int \frac{1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2\right]}dx = \frac{2}{\sqrt{7}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)+K$$

Με αντίστροφη αντικατάσταση και εκτέλεση των πράξεων, έχουμε τελικά:

$$I_2 = \frac{2x+1}{7(x^2+x+2)}+\frac{4}{7\sqrt{7}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)+C$$

q.e.d.

6.4 Υπολογίσατε το

$$\int \frac{1}{(5x^2+x+1)^3}dx$$

Λύση: Το ολοκλήρωμα διαδοχικά γράφεται:

$$\int \frac{1}{(5x^2+x+1)^3}dx = \int \frac{1}{5^3\left(x^2+\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}\right)^3}dx =$$

$$= \frac{1}{125}\int \frac{1}{\left(x^2+\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}\right)^3}dx$$

Μετατρέπουμε το $x^2+\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}$ σε άθροισμα τετραγώνων :

$$x^2+\frac{1}{5}x+\frac{1}{5} = x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}x+\left(\frac{1}{10}\right)^2-\left(\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{5} =$$

$$= \left(x+\frac{1}{10}\right)^2+\frac{19}{100} = \left(x+\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{19}}{10}\right)^2$$

Το ολοκλήρωμα τώρα γράφεται:

$$I_3 = \frac{1}{125}\int \frac{1}{\left[\left(x+\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{19}}{10}\right)^2\right]^3}dx$$

Ο αναγωγικός τύπος θα δώσει τελικά:

$$I_3 = \frac{10x+1}{38(5x^2+x+1)^2}+\frac{15(10x+1)}{361(5x^2+x+1)}+\frac{300}{361\sqrt{19}}\tau o\xi\varepsilon\varphi(\frac{10x+1}{\sqrt{19}})+C$$

q.e.d.

6.5 Εάν $I_\nu = \int \eta\mu^\nu x dx$, δείξατε ότι

$$I_\nu = -\frac{\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x}{\nu}+\frac{\nu-1}{\nu}I_{\nu-2}$$

Λύση: Εργαζόμενοι παραγοντικά έχουμε:

$$I_\nu = \int \eta\mu^{\nu-1}x\eta\mu x dx = \int \eta\mu^{\nu-1}x(-\sigma\upsilon\nu x)'dx =$$

$$= -\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x - \int[-\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu^{\nu-1}x)']dx =$$

$$= -\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x + \int[\sigma\upsilon\nu x(\nu-1)\eta\mu^{\nu-2}x\sigma\upsilon\nu x]dx =$$

$$= -\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x + (\nu-1)\int[\sigma\upsilon\nu^2 x\eta\mu^{\nu-2}x]dx =$$

$$= -\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x + (\nu-1)\int[(1-\eta\mu^2 x)\eta\mu^{\nu-2}x]dx =$$

$$= -\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x + (\nu-1)\int[\eta\mu^{\nu-2}x]dx - (\nu-1)\int[\eta\mu^{\nu}x]dx =$$

$$= -\eta\mu^{\nu-1}x\sigma\upsilon\nu x + (\nu-1)I_{\nu-2} - (\nu-1)I_{\nu}$$

Λύνοντας αυτήν την τελευταία εξίσωση ως πρός I_ν, παίρνουμε τον ζητούμενο αναγωγικό τύπο.

q.e.d.

6.6 Εάν $I_\nu = \int(x^2+a^2)^\nu dx$, δείξατε ότι

$$I_\nu = \frac{x(x^2+a^2)^\nu}{(2\nu+1)} + \frac{(2\nu a^2)}{(2\nu+1)}I_{\nu-1}$$

, $\nu \neq -\frac{1}{2}$.

Λύση: Ολοκληρώνοντας παραγοντικά, έχουμε διαδοχικά:

$$I_\nu = \int[x'(x^2+a^2)^\nu]dx =$$

$$= x(x^2+a^2)^\nu - \int x[(x^2+a^2)^\nu]'dx =$$

$$= x(x^2+a^2)^\nu - \int x\nu(x^2+a^2)^{\nu-1}2xdx$$

$$= x(x^2+a^2)^\nu - 2\nu\int(x^2+a^2)^{\nu-1}x^2dx$$

$$= x(x^2+a^2)^\nu - 2\nu\int(x^2+a^2)^{\nu-1}(x^2+a^2-a^2)dx$$

$$= x(x^2+a^2)^\nu - 2\nu\int(x^2+a^2)^{\nu}dx + 2\nu a^2\int(x^2+a^2)^{\nu-1}dx$$

$$= x(x^2+a^2)^\nu - 2\nu I_\nu + 2\nu a^2 I_{\nu-1}$$

Επιλύοντας την τελική σχέση, ώς πρός I_ν, παίρνουμε το ζητούμενο.

q.e.d.

6.7 Βρείτε αναγωγικό τύπο για το ολοκλήρωμα $\int(\ln x)^\nu dx$.

Λύση: Έστω $I_\nu = \int (\ln x)^\nu dx$. Διαδοχικά έχουμε:

$$I_\nu = \int x'(\ln x)^\nu dx =$$

$$= x(\ln x)^\nu - \int \nu(\ln x)^{\nu-1} x\frac{1}{x}dx =$$

$$= x(\ln x)^\nu - \nu\int (\ln x)^{\nu-1}dx = x(\ln x)^\nu - \nu I_{\nu-1}$$

ο οποίος είναι και ο ζητούμενος αναγωγικός τύπος.

q.e.d.

6.8 Βρείτε αναγωγικό τύπο για το ολοκλήρωμα $\int \frac{x^\nu}{(x^2+1)}dx$.

Λύση: Έστω $J_\nu = \int \frac{x^\nu}{(x^2+1)}dx$, τότε $J_\nu = \int \frac{x^2}{x^2+1}x^{\nu-2}dx$ αλλά $(x^{\nu-1})' = (\nu - 1)x^{\nu-2} \Rightarrow x^{\nu-2} = \frac{(x^{\nu-1})'}{\nu-1}$ αντικαθιστώντας, το J_ν γίνεται:

$$J_\nu = \frac{1}{\nu-1}\int \frac{x^2}{x^2+1}(x^{\nu-1})'dx$$

διαδοχικά τώρα έχουμε

$$J_\nu = \frac{1}{\nu-1}\int \left[1 - \frac{1}{x^2+1}\right](x^{\nu-1})'dx =$$

$$= \frac{1}{\nu-1}\int (x^{\nu-1})'dx - \frac{1}{\nu-1}\int \frac{(x^{\nu-1})'}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{x^{\nu-1}}{\nu-1} - \frac{1}{\nu-1}\int (\nu-1)\cdot\frac{x^{\nu-2}}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{x^{\nu-1}}{\nu-1} - \int \frac{x^{\nu-2}}{x^2+1}dx = \frac{x^{\nu-1}}{\nu-1} - J_{\nu-2}$$

ο οποίος είναι και ο ζητούμενος αναγωγικός τύπος.

q.e.d.

6.9 Βρείτε αναγωγικό τύπο για το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{x^\nu\sqrt{x^2+a}}$, $\nu \neq 1, a \neq 0$.

Λύση: Έστω $J_\nu = \int \frac{dx}{x^\nu\sqrt{x^2+a}}$, διαδοχικά έχουμε

$$J_{\nu-2} = \int \frac{dx}{x^{\nu-2}\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{x}{x^{\nu-1}\sqrt{x^2+a}}dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{x}\right)^{\nu-1} (\sqrt{x^2+a})' dx =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+a}}{x^{\nu-1}} - \int (\sqrt{x^2+a}) \left(\frac{1}{x^{\nu-1}}\right)' dx =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+a}}{x^{\nu-1}} + (\nu-1)\int \frac{\sqrt{x^2+a}}{x^\nu}dx =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+a}}{x^{\nu-1}} + (\nu-1)\int \frac{x^2+a}{x^\nu\sqrt{x^2+a}}dx =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+a}}{x^{\nu-1}} + (\nu-1)\int \frac{x^2}{x^\nu\sqrt{x^2+a}}dx + (\nu-1)\int \frac{adx}{x^\nu\sqrt{x^2+a}}$$

και τελικά έχουμε

$$J_{\nu-2} = \frac{\sqrt{x^2+a}}{x^{\nu-1}} + (\nu-1)J_{\nu-2} + a(\nu-1)J_\nu$$

και επιλύοντας ως πρός J_ν, παίρνουμε τον ζητούμενο αναγωγικό τύπο :

$$J_\nu = -\frac{\sqrt{x^2+a}}{a(\nu-1)x^{\nu-1}} - \frac{\nu}{a(\nu-1)}J_{n-2}$$

q.e.d.

6.5 Ασκήσεις προς Επίλυσην

6.10 *Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα* $\int \eta\mu^7 x dx$

Απ: $-\frac{1}{7}\eta\mu^6 x\sigma\upsilon\nu x - \frac{6}{35}\eta\mu^4 x\sigma\upsilon\nu x - \frac{24}{105}\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x - \frac{48}{105} + C$

6.11 *Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα* $\int \frac{1}{(x^2+7)^2}dx$

Απ: $\frac{x}{14(x^2+7)} + \frac{1}{14\sqrt{7}} \tau o\xi\varepsilon\varphi(\frac{x}{\sqrt{7}}) + C$

6.12 *Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα* $\int \frac{1}{(3x^2+5)^2}dx$

Απ: $\frac{x}{10(3x^2+5)} + \frac{1}{10\sqrt{15}} \tau o\xi\varepsilon\varphi(\sqrt{\frac{3}{5}}x) + C$

6.13 *Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα* $\int \frac{1}{(x^2-x+7)^3}dx$

Απ: $\frac{2x-1}{54(x^2-x+7)^2} + \frac{2x-1}{243(x^2-x+7)} + \frac{4}{729\sqrt{3}} \tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$

6.14 *Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα* $\int \frac{1}{(7x^2-x+2)^2}dx$

Απ: $\frac{14x-1}{55(7x^2-x+2)} + \frac{28}{55\sqrt{55}} \tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{14x-1}{\sqrt{55}}\right)$

Κεφάλαιο 7

Ανάλυση σε Άθροισμα Απλών Κλασμάτων

7.1 Γενικά

Το πηλίκον δύο ακεραίων πολυωνύμων $f(x)$ και $g(x)$ καλείται *ρητό κλάσμα* ή *ρητή συνάρτηση* ως προς x. Αναλυτικά γράφουμε:

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

όπου $a_m, b_n \neq 0$ και a_i, b_j ανήκουν στο $\mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

7.2 Ανάλυση σε Απλά Κλάσματα

Σε πολλές εφαρμογές χρειάζεται να αναλύουμε μια ρητή συνάρτηση σε άθροισμα απλούστερων κλασμάτων. Ακολουθούμε τον παρακάτω αλγόριθμο.

Αλγόριθμος ανάλυσης σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

Βήμα 1ον. Εάν ο αριθμητής έχει βαθμό μεγαλύτερο του παρανομαστού, κάνουμε την διαίρεση $f(x) : g(x)$. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε: $f(x) = g(x)p(x) + v(x)$ και άρα $\frac{f(x)}{g(x)} = p(x) + \frac{v(x)}{g(x)}$, όπου το κλάσμα $\frac{v(x)}{g(x)}$ έχει πλέον αριθμητή βαθμού μικρότερου του παρανομαστού.

Βήμα 2ον. Εάν ο αριθμητής έχει βαθμό μικρότερο του παρανομαστού, τότε παραγοντοποιούμε πλήρως τον παρανομαστή.

Βήμα 3ον. Χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο τύπο, εξισώνουμε το $\frac{f(x)}{g(x)}$ με ένα άθροισμα απλών κλασμάτων που περιέχουν σταθερές προς προσδιορισμόν.

Βήμα 4ον. Προσδιορίζουμε τις σταθερές.

7.3 Τύποι ανάλυσης σε απλά κλάσματα

Η ανάλυση στο 3ον βήμα του παραπάνω αλγορίθμου, γίνεται βάσει των τύπων των κάτωθι περιπτώσεων (*Heavaside*).

Περίπτωση *I*: Εάν το $g(x)$ έχει μόνο απλές πραγματικές ρίζες $p_1, p_2, \ldots, p_n$, δηλαδή $g(x) = (x-p_1)(x-p_2)\cdots(x-p_n)$ τότε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x-p_1)(x-p_2)\cdots(x-p_n)} = \frac{A_1}{(x-p_1)} + \frac{A_2}{(x-p_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-p_n)}$$

όπου $A_1, A_2, \ldots, A_n$ σταθερές προς προσδιορισμόν.

Περίπτωση *II*: Εάν το $g(x)$ έχει και πολλαπλές ρίζες, δηλαδή $g(x) = (x-p_1)(x-p_2)(x-p_3)^k\cdots(x-p_m)^l$, τότε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x-p_1)(x-p_2)(x-p_3)^k\cdots(x-p_m)^l} =$$

$$= \frac{A_1}{(x-p_1)} + \frac{A_2}{(x-p_2)} + \frac{B_1}{(x-p_3)} + \frac{B_2}{(x-p_3)^2} + \cdots + \frac{B_k}{(x-p_3)^k} +$$

$$+ \frac{M_1}{(x-p_m)} + \frac{M_2}{(x-p_m)^2} + \cdots + \frac{M_l}{(x-p_m)^l}$$

A_1, A_2, B_i, M_i σταθερές προς προσδιορισμόν.

Περίπτωση *III*: Εάν το $g(x)$ έχει την μορφή $g(x) = (\alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)\cdot(\alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2)^\varphi$ τότε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(\alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)\cdot(\alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2)^\varphi} =$$

$$= \frac{Mx+N}{\alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1} + \frac{A_1 x + B_1}{\alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2} +$$

$$+ \frac{A_2 x + B_2}{(\alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2)^2} + \cdots + \frac{A_\varphi x + B_\varphi}{(\alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2)^\varphi}$$

Περίπτωση *IV*: Όταν ισχύουν συγχρόνως οι περιπτώσεις I, II, III, τότε εφαρμόζουμε ταυτόχρονα τους αντιστοίχους τύπους.

7.4 Προσδιορισμός των σταθερών

Για να προσδιορίσουμε τις σταθερές χρησιμοποιούμε δύο μεθόδους: Είτε κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα και εξισώνουμε τους συντελεστές των ομοιοβαθμίων όρων των αριθμητών, είτε κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα και θέτουμε αυθαίρετες τιμές στις μεταβλητές x.

7.5 Λυμένες Ασκήσεις

7.1 Να αναλυθεί το κλάσμα

$$\frac{x^2 - x - 1}{(x-1)(x-2)(x+3)}$$

σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

Λύση: Ακολουθώντας τον αλγόριθμο και την περίπτωση I έχουμε:

$$\frac{x^2 - x - 1}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+3} =$$

$$= \frac{A_1(x-2)(x+3) + A_2(x-1)(x+3) + A_3(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+3)}$$

εξισώνοντας τους αριθμητές παίρνουμε:

$$x^2 - x - 1 = A_1(x-2)(x+3) + A_2(x-1)(x+3) + A_3(x-1)(x-2) \quad (7.1)$$

για $x = 1$ η (7.1) γίνεται: $-1 = (-4)A_1 \Rightarrow A_1 = 1/4$, για $x = 2$ η (7.1) γίνεται: $1 = 5A_2 \Rightarrow A_2 = 1/5$, για $x = -3$ η (7.1) γίνεται: $11 = 20A_3 \Rightarrow A_3 = 11/20$ και η ανάλυση τελικά είναι:

$$\frac{x^2 - x - 1}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{1/4}{x-1} + \frac{1/5}{x-2} + \frac{11/20}{x+3}$$

q.e.d.

7.2 Να αναλυθεί το κλάσμα

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x+2)(x+3)^2}$$

σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

Λύση: Απο την περίπτωση II έχουμε :

$$\frac{x^2+x+1}{(x+2)(x+3)^2} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{B_1}{x+3} + \frac{B_2}{(x+3)^2} =$$

$$= \frac{A_1(x+3)^2 + B_1(x+2)(x+3) + B_2(x+2)}{(x+2)(x+3)^2}$$

εξισώνοντας τους αριθμητές έχουμε:

$$x^2+x+1 = (A_1+B_1)x^2 + (6A_1+5B_1+B_2)x + (9A_1+6B_1+2B_2)$$

συγκρίνοντας τους συντελεστές των ομοιοβαθμίων όρων, παίρνουμε:

$$A_1+B_1 = 1$$

$$6A_1+5B_1+B_2 = 1$$

$$9A_1+6B_1+2B_2 = 1$$

και άρα

$$A_1 = 3, \quad B_1 = -2, \quad B_2 = -7$$

και η ανάλυση είναι:

$$\frac{x^2+x+1}{(x+2)(x+3)^2} = \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x+3} - \frac{7}{(x+3)^2}$$

q.e.d.

7.3 Να αναλυθεί σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα:

$$\frac{x^4+1}{(x^2-x+1)^3}$$

Λύση: Επειδή έχουμε στον παρανομαστή πολυώνυμο 2ου βαθμού, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της περίπτωσης III:

$$\frac{x^4+1}{(x^2-x+1)^3} = \frac{A_1x+B_1}{x^2-x+1} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2-x+1)^2} +$$

$$+ \frac{A_3x+B_3}{(x^2-x+1)^3}$$

κάνοντας τα κλάσματα ομώνυμα έχουμε, εξισώνοντας τους αριθμητές:

$$x^4+1 = (A_1x+B_1)(x^2-x+1)^2 + (A_2x+B_2)(x^2-x+1) + (A_3x+B_3)$$

και κάνοντας πράξεις:

$$x^4+1 = A_1x^5+(-2A_1+B_1)x^4+(3A_1+A_2-2B_1)x^3+(-2A_1-A_2+3B_1+B_2)x^2+$$
$$(A_1+A_2+A_3-2B_1-B_2)x+(B_1+B_2+B_3)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβαθμίων όρων παίρνουμε το σύστημα:

$$A_1 = 0$$
$$-2A_1 + B_1 = 1$$
$$3A_1 + A_2 - 2B_1 = 0$$
$$-2A_1 - A_2 + 3B_1 + B_2 = 0$$
$$A_1 + A_2 + A_3 - 2B_1 - B_2 = 0$$
$$B_1 + B_2 + B_3 = 1$$

Από όπου βρίσκουμε ότι:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 2, \quad A_3 = -1, \quad B_1 = 1, \quad B_2 = -1, \quad B_3 = 1$$

Και η ανάλυση είναι:

$$\frac{x^4+1}{(x^2-x+1)^3} = \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2} + \frac{-x+1}{(x^2-x+1)^3}$$

q.e.d.

7.4 Να αναλυθεί σε απλά κλάσματα η ρητή συνάρτηση:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x)}$$

Λύση: Παραγοντοποιούμε πλήρως τον παρανομαστή και έχουμε

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x)} = \frac{1}{(x^2+1)x(x+1)}$$

Για να αναλύσουμε σε απλά κλάσματα θα συνδυάσουμε όλες τις περιπτώσεις:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{Gx+D}{x^2+1}$$

Κάνοντας τα κλάσματα ομώνυμα και εξισώνοντας τους αριθμητές παίρνουμε:

$$1 = A(x+1)(x^2+1) + Bx(x^2+1) + (Gx+D)x(x+1) =$$

$$= (A + B + G)x^3 + (A + G + D)x^2 + (A + B + D)x + A$$

από όπου βρίσκουμε ότι:

$$A = 1, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad G = -\frac{1}{2}, \quad D = -\frac{1}{2}$$

και η ζητουμένη ανάλυση είναι:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x)} = \frac{1}{(x^2+1)(x^2+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)}$$

q.e.d.

7.5 Να αναλυθεί σε απλά κλάσματα το κλάσμα

$$\frac{x^3}{x^2 - 2x - 3}$$

Λύση: Αφού ο αριθμητής έχει βαθμό μεγαλύτερο απο τον του παρανομαστού, κάνουμε διαίρεση και έχουμε: $x^3 = (x+2)(x^2 - 2x - 3) + (7x+6)$ το κλάσμα θα γίνει:

$$\frac{x^3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(x+2)(x^2 - 2x - 3) + 7x + 6}{x^2 - 2x - 3} = (x+2) + \frac{7x+6}{x^2 - 2x - 3}$$

θα αναλύσουμε τώρα το κλάσμα $\frac{7x+6}{x^2-2x-3}$,

$$\frac{7x+6}{x^2 - 2x - 3} = \frac{7x+6}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} =$$

$$= \frac{A(x+1) + B(x-3)}{(x-3)(x+1)}$$

εξισώνοντας τους αριθμητές έχουμε : $7x+6 = A(x+1) + B(x-3)$, θέτοντας $x = -1$ και $x = 3$, βρίσκουμε $A = 27/4$, $B = 1/4$, και η ανάλυση τελικά γίνεται :

$$\frac{x^3}{x^2 - 2x - 3} = (x+2) + \frac{27/4}{x-3} + \frac{1/4}{x+1}$$

q.e.d.

7.6 Υπολογίσατε το άθροισμα

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

Λύση: Αναλύουμε το κλάσμα $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} =$$

$$= \frac{A(2n+1)+B(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}$$

και άρα

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1/2}{2n-1} + \frac{-1/2}{2n+1}$$

Διαδοχικά τώρα έχουμε:

$$n = 1 \Rightarrow \frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$$

$$n = 2 \Rightarrow \frac{1}{3\cdot 5} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$$

$$n = 3 \Rightarrow \frac{1}{5\cdot 7} = \frac{1}{10} - \frac{1}{14}$$

$$\cdots$$

$$n = n \Rightarrow \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1/2}{2n-1} + \frac{-1/2}{2n+1}$$

Αθροίζοντας κατά μέλη, βρίσκουμε:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$$

q.e.d.

7.7 Να αναλυθεί σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα

$$\frac{2x^2+3x-5}{(x-2)^3}$$

Λύση: Θα λύσουμε την άσκηση αυτή με μία άλλη μέθοδο. Διαιρώντας τον αριθμητή με το $(x-2)$ έχουμε $2x^2+3x-5 = (x-2)(2x+7)+9$ αλλά $2x+7 = 2(x-2)+11$ άρα $2x^2+3x-5 = 2(x-2)^2+11(x-2)+9$ και επομένως:

$$\frac{2x^2+3x-5}{(x-2)^3} = \frac{2(x-2)^2+11(x-2)+9}{(x-2)^3} =$$

$$= \frac{2}{x-2} + \frac{11}{(x-2)^2} + \frac{9}{(x-2)^3}$$

q.e.d.

7.8 Να αναλυθεί σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα

$$\frac{2x^3-3x^2+5x-3}{(x-1)^5}$$

Λύση: Θα γράψουμε τον αριθμητή ως άθροισμα δυνάμεων του $(x-1)$, χρησιμοποιώντας τον τύπο του $Taylor$. Γνωρίζουμε ότι το ανάπτυγμα $Taylor$ με κέντρο το 1 είναι:

$$f(x)=f(1)+f'(1)\frac{(x-1)}{1!}+f''(1)\frac{(x-1)^2}{2!}+\cdots$$

θέτοντας $f(x)=2x^3-3x^2+5x-3$, παίρνουμε:

$$2x^3-3x^2+5x-3=1+5(x-1)+3(x-1)^2+2(x-1)^3$$

και το κλάσμα γίνεται:

$$\frac{2x^3-3x^2+5x-3}{(x-1)^5}=\frac{1+5(x-1)+3(x-1)^2+2(x-1)^3}{(x-1)^5}=$$
$$=\frac{1}{(x-1)^5}+\frac{5}{(x-1)^4}+\frac{3}{(x-1)^3}+\frac{2}{(x-1)^2}$$

q.e.d.

7.9 Να αναλυθεί το κλάσμα $\frac{2x+1}{x^4+1}$

Λύση: Παραγοντοποιούμε τον παρανομαστή:

$$x^4+1=x^4+2x^2-2x^2+1=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=$$
$$=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

και το κλάσμα αναλύεται ως εξής:

$$\frac{2x+1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{Gx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}=$$
$$=\frac{(Ax+B)(x^2+\sqrt{2}x+1)+(Gx+D)(x^2-\sqrt{2}x+1)}{x^4+1}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβαθμίων όρων των αριθμητών, βρίσκουμε ότι :

$$A=-\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad B=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}),\quad G=\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad D=\frac{\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}}$$

και η ανάλυση τελικά γίνεται:

$$\frac{\frac{-1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})}{(x^2-\sqrt{2}x+1)}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}}}{(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$

q.e.d.

7.6 Ασκήσεις προς Επίλυση

Αναλύσατε σε απλά κλάσματα τις κάτωθι ρητές συναρτήσεις

7.10

$$\frac{2x+7}{(x^2-4)(x+1)}$$

Απ: $\frac{3}{4(x+2)} + \frac{11}{2(x-2)} - \frac{5}{3(x-1)}$

7.11

$$\frac{3x-1}{x^2-5x+6}$$

Απ: $\frac{8}{x-3} - \frac{5}{x-2}$

7.12

$$\frac{x^2+11x-2}{(x+2)(x-1)(x-4)}$$

Απ: $\frac{1}{9}\left(\frac{29}{x-4} - \frac{10}{x-1} - \frac{10}{x+2}\right)$

7.13

$$\frac{10x^2+32}{x^3(x-4)^2}$$

Απ: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x-4} + \frac{3}{(x-4)^2}$

7.14

$$\frac{x^5+2)}{(x^2+x+1)^3}$$

Απ: $\frac{(x-2)}{(x^2+x+1)} + \frac{x+3}{(x^2+x+1)^2} + \frac{x-1}{(x^2+x+1)^3}$

7.15

$$\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)(x-1)^2}$$

Απ: $\frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2(x-1)^2}$

7.16

$$\frac{x^2}{(x^2-2x+5)^2}$$

Απ: $\frac{1}{x^2-2x+5} + \frac{2x-5}{(x^2-2x+5)^2}$

7.17

$$\frac{5x^2-4}{x^4-5x^2+4}$$

Απ: $\frac{1}{3}\left(\frac{4}{x-2} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{4}{x+2}\right)$

7.18

$$\frac{x^3}{x^3-3x+2}$$

Απ: $1 + \frac{1}{3(x-1)^2} + \frac{8}{9(x-1)} - \frac{8}{9(x+2)}$

7.19

$$\frac{2x^3-2x-2}{2x^2+x-6}$$

Απ: $-\frac{1}{2} + x + \frac{2}{x+2} + \frac{1}{2(2x+3)}$

7.20

$$\frac{x+1}{x^4-5x^3+9x^2-7x+2}$$

Απ: $\frac{3}{x-2} - \frac{3}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x-1)^3}$

7.21

$$\frac{x^2-x+1}{(x-1)^3}$$

Απ: $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}$

7.22

$$\frac{8}{x^8-1}$$

Απ: $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1} - \frac{4}{x^4+1}$

7.23

$$\frac{x^3}{(x+1)^5}$$

Απ: $\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{3}{(x+1)^3} + \frac{3}{(x+1)^4} - \frac{1}{(x+1)^5}$

7.24

$$\frac{x^4-1}{(3x+1)^2}$$

Απ: $\frac{1}{27} - \frac{2x}{27} + \frac{x^2}{9} - \frac{80}{81(3x+1)^2} - \frac{4}{81(3x+1)}$

7.25

$$\frac{2x^2}{3x^4+2x+1}$$

Απ:

7.26 *Να βρεθεί το άθροισμα:*

$$\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Απ: $\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$

7.27 *Να βρεθεί το άθροισμα:*

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)}$$

Απ: $\frac{1}{2}[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$

7.28 *Να βρεθεί το άθροισμα:*

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

(Υπόδειξη: Αναλύσατε το κλάσμα $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ σε άθροισμα κλασμάτων με παρανομαστές $n(n+1)$ και $(n+1)(n+2)$).

7.29 *Δείξατε ότι:*

$$\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \cdots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{3n+2}\right)$$

Κεφάλαιο 8

Βασικά Ρητά Ολοκληρώματα

8.1 Γενικά

Τα ολοκληρώματα των κάτωθι ρητών συναρτήσεων χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό πολυπλοκοτέρων ρητών ολοκληρωμάτων, αλλά έχουν και αυτόνομη αξία.

$$\boxed{O_1 = \int \frac{dx}{(ax+b)}, \quad O_2 = \int \frac{dx}{(ax+b)^n}, \quad O_3 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}}$$

$$\boxed{O_4 = \int \frac{a_1x+b_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}dx, O_5 = \int \frac{dx}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^n}, O_6 = \int \frac{a_1x+b_1}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^n}dx}$$

Στα τρία τελευταία ολοκληρώματα η διακρίνουσα του παρανομαστού θεωρείται αρνητική. Θα αντιμετωπίσουμε το κάθε ένα ξεχωριστά.

8.2 Το ολοκλήρωμα O_1

Το ολοκλήρωμα αυτό υπολογίζεται βάσει του τύπου:

$$\boxed{\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C} \tag{8.1}$$

Προσοχή στην περίπτωση $a < 0$.

8.3 Το ολοκλήρωμα O_2

Το ολοκλήρωμα αυτό υπολογίζεται με αντικατάσταση, θέτοντας $w = ax + b$.

8.4 Το ολοκλήρωμα O_3

Υπολογίζουμε την διακρίνουσα Δ του παρανομαστού και μελετάμε τις εξής περιπτώσεις:

Περίπτωση 1η: $\Delta > 0$.
Παραγοντοποιούμε τον παρανομαστή $ax^2 + bx + c = a(x - p_1)(x - p_2)$ και αναλύουμε σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \int \frac{dx}{a(x - p_1)(x - p_2)} = \frac{1}{a} \int \frac{A}{(x - p_1)} dx + \frac{1}{a} \int \frac{B}{(x - p_2)} dx$$

Περίπτωση 2η: $\Delta = 0$.
Παραγοντοποιούμε τον παρανομαστή $ax^2 + bx + c = a(x - p)^2$ και μετά κάνουμε αντικατάσταση, σύμφωνα με την περίπτωση O_2.

Περίπτωση 3η: $\Delta < 0$.
Σε αυτήν την περίπτωση μετατρέπουμε τον παρανομαστή σε άθροισμα τετραγώνων: $ax^2 + bx + c = a[(x - l)^2 + d^2]$ και μετά χρησιμοποιούμε τον τύπο του *τοξεφ*, δηλαδή έχουμε:

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \int \frac{dx}{a[(x - l)^2 + d^2]} =$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{d(x - l)}{(x - l)^2 + d^2} = \frac{1}{ad} \tau o\xi\varepsilon\varphi \left(\frac{x - l}{d} \right) + C$$

8.5 Το ολοκλήρωμα O_4

Σχηματίζουμε στον αριθμητή την παράγωγο του παρανομαστού. Επειτα διασπάμε το κλάσμα σε δυο κλάσματα και επομένως το αρχικό ολοκλήρωμα σε δυο ολοκληρώματα. Το πρώτο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με αντικατάσταση, το δεύτερο ανήκει στην κατηγορία O_3.

8.6 Το ολοκλήρωμα O_5

Κατ΄ αρχάς μετατρέπουμε την ποσότητα $a_1 x^2 + b_1 x + c_1$ σε άθροισμα τετραγώνων: $a_1 x^2 + b_1 x + c_1 = a_1[(x - s)^2 + K^2]$ και μετά χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$I_n = \frac{1}{K^2} \left(\frac{x - s}{(2n - 2)[(x - s)^2 + K^2]^{n-1}} + \frac{2n - 3}{2n - 2} I_{n-1} \right), \quad n \neq 1$$

όπου $I_n = \int \frac{1}{[(x-s)^2+K^2]^n}dx$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Ο αριθμός a_1 θα βγεί έξω απο το ολοκλήρωμα.

8.7 Το ολοκλήρωμα O_6

Με κατάλληλες πράξεις δημιουργούμε στον αριθμητή την παράγωγο της ποσότητας $a_1x^2 + b_1x + c_1$. Μετά διασπάμε το κλάσμα σε δύο κλάσματα και επομένως το αρχικό ολοκλήρωμα σε δύο ολοκληρώματα. Το πρώτο υπολογίζεται με αντικατάσταση, το δεύτερο ανήκει στην κατηγορία O_5.

8.8 Λυμένες Ασκήσεις

8.1 Υπολογίσατε το $\int \frac{dx}{2x+6}$.

Λύση: Βάσει του τύπου (8.1), έχουμε $\int \frac{dx}{2x+6} = \frac{1}{2}\ln|2x+6| + C$.

q.e.d.

8.2 Υπολογίσατε το $\int \frac{dx}{5-x}$.

Λύση: Από τον τύπο (8.1) έχουμε, για $a = -1$, $\int \frac{dx}{5-x}dx = -\ln|5-x| + C$.

q.e.d.

8.3 Υπολογίσατε το $\int \frac{dx}{(2-x)^{100}}$.

Λύση: Θα δουλέψουμε με αντικατάσταση. Θέτουμε $w = 2 - x$ και άρα $dw = -dx \Rightarrow dx = -dw$. Το ολοκλήρωμα τώρα γίνεται:

$$\int \frac{dx}{(2-x)^{100}}dx = -\int \frac{dw}{w^{100}}dw = -\int w^{-100}dw =$$

$$= \frac{-w^{-100+1}}{(-100+1)} + C = -\frac{w^{-99}}{(-99)} + C = \frac{1}{99} \cdot \frac{1}{(2-x)^{99}} + C$$

q.e.d.

8.4 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{(7-13x)^{13}}$$

Λύση: Θέτουμε $w = 7 - 13x$, άρα $dw = -13dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{13}dw$. Το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{dx}{(7-13x)^{13}} = -\int \frac{dw}{13w^{13}}dw = -\frac{1}{13}\int w^{-13}dw =$$

$$= -\frac{1}{13}\cdot\left(\frac{w^{-13+1}}{-13+1}\right) + C = -\frac{1}{13}\cdot\left(\frac{w^{-12}}{-12}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{156}\cdot\frac{1}{(7-13x)^{12}} + C$$

q.e.d.

8.5 Αποδείξατε τον τύπο: $\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = -\frac{1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}} + C$**.**

Λύση: Με αντικατάσταση έχουμε $w = ax + b \Rightarrow dw = adx \Rightarrow dx = \frac{1}{a}dw$ και το ολοκλήρωμα γίνεται.

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = \int \frac{dw}{aw^n} = \frac{1}{a}\int w^{-n}dw =$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{w^{-n+1}}{-n+1}\right) + C = -\frac{1}{a(n-1)w^{n-1}} + C = -\frac{1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1})} + C$$

q.e.d.

8.6 Υπολογίσατε το

$$\int \frac{dx}{x^2 - 10x + 21}$$

Λύση: Βλέπουμε ότι $\Delta = 16 > 0$ και επομένως παραγοντοποιούμε τον παρανομαστή: $x^2 - 10x + 21 = (x-3)(x-7)$. Αναλύουμε τώρα το κλάσμα $\frac{1}{x^2-10x+21} = \frac{1}{(x-3)(x-7)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων. Ήτοι

$$\frac{1}{x^2 - 10x + 21} = \frac{-1/4}{x-3} + \frac{1/4}{x-7}$$

και το ολοκλήρωμα επομένως γίνεται:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 10x + 21} = \int \frac{dx}{(x-3)(x-7)} = -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-7} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x-3| + \frac{1}{4}\ln|x-7| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-7}{x-3}\right| + C$$

q.e.d.

8.7 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+1}$$

Λύση: Παρατηρούμε ότι $\Delta = 0$ και ο παρανομαστής γράφεται $4x^2+4x+1 = (2x+1)^2$, επομένως για το ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+1} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2} =$$

$$\int \frac{1}{2}\cdot\frac{dw}{w^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{w^{-2+1}}{-2+1}\right) + C = -\frac{1}{2}w^{-1} + C = -\frac{1}{2(2x+1)} + C$$

q.e.d.

8.8 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{7x^2+4x+3}$$

Λύση: Η διακρίνουσα του παρανομαστού είναι $-68 < 0$ και επομένως θα τον μετατρέψουμε σε άθροισμα τετραγώνων. Διαδοχικά έχουμε:

$$7x^2+4x+3 = 7\left(x^2+4\frac{x}{7}+\frac{3}{7}\right) =$$

$$= 7\left(x^2+2\cdot\frac{2}{7}\cdot x+\frac{4}{49}-\frac{4}{49}+\frac{3}{7}\right) = 7\left[\left(x+\frac{2}{7}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{17}}{7}\right)^2\right]$$

Το ολοκλήρωμα τώρα γίνεται:

$$\int \frac{dx}{7x^2+4x+3} = \int \frac{1/7}{\left[\left(x+\frac{2}{7}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{17}}{7}\right)^2\right]}dx =$$

$$\frac{1}{7}\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{17}}{7}}\right)\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{x+\frac{2}{7}}{\frac{\sqrt{17}}{7}}\right) + C = \frac{\sqrt{17}}{17}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{7x+2}{\sqrt{17}}\right) + C$$

q.e.d.

8.9 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{7x+9}{11x^2+x+1}dx$$

Λύση: Το ολοκλήρωμα ανήκει στην κατηγορία O_4. Σχηματίζουμε στον αριθμητή την παράγωγο του παρανομαστού $(11x^2+x+1)' = 22x+1$ και το ολοκλήρωμα μας γίνεται:

$$\int \frac{7x+9}{11x^2+x+1}dx = \frac{1}{\frac{22}{7}} \int \frac{\frac{22}{7}\cdot(7x+9)}{11x^2+x+1}dx =$$

$$= \frac{7}{22}\int \frac{22x+\frac{198}{7}+1-1}{11x^2+x+1}dx =$$

$$\frac{7}{22}\int \frac{22x+1}{11x^2+x+1}dx + \frac{7}{22}\cdot\frac{191}{7}\int\frac{1}{11x^2+x+1}dx \tag{8.2}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με αντικατάσταση, ενώ το δεύτερο ανήκει στην κατηγορία O_3. Διαδοχικά έχουμε

$$\int \frac{22x+1}{11x^2+x+1}dx = \int \frac{1}{w}dw = \ln|11x^2+x+1| + C \tag{8.3}$$

όπου $w = 11x^2+x+1, dw = (22x+1)dx$.

$$\int \frac{1}{11x^2+x+1}dx = \frac{1}{11}\int \frac{1}{x^2+\frac{1}{11}x+\frac{1}{11}}dx =$$

$$= \frac{1}{11}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{22}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{43}}{22}\right)^2}dx = \frac{1}{11}\frac{1}{\frac{\sqrt{43}}{22}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{x+\frac{1}{22}}{\frac{\sqrt{43}}{22}}\right)+C =$$

$$= 2\frac{\sqrt{43}}{43}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{22x+1}{\sqrt{43}}\right)+C \tag{8.4}$$

Αντικαθιστώντας τα (8.3) και (8.4) στο (8.2) έχουμε τελικά:

$$I = \frac{7}{22}\ln|11x^2+x+1| + \frac{191}{473}\sqrt{43}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{22x+1}{\sqrt{43}}\right)+C$$

q.e.d.

8.10 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{dx}{(11x^2+x+1)^3}$$

Λύση: Γράφουμε κατ' αρχάς το ολοκλήρωμα στην μορφή

$$I = \int \frac{dx}{11^3\left(x^2 + \frac{x}{11} + \frac{1}{11}\right)^3} = \frac{1}{11^3}\int \frac{dx}{\left(x^2 + \frac{x}{11} + \frac{1}{11}\right)^3}$$

Γράφουμε το $x^2 + \frac{x}{11} + \frac{1}{11}$ σε άθροισμα τετραγώνων $x^2 + \frac{x}{11} + \frac{1}{11} = \left(x + \frac{1}{22}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{43}}{22}\right)^2$ και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 + \frac{x}{11} + \frac{1}{11}\right)^3} = \int \frac{dx}{\left(\left(x + \frac{1}{22}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{43}}{22}\right)^2\right)^3} = \int \frac{dX}{(X^2 + K^2)^3}$$

όπου $X = x + 1/22$ και $K = \sqrt{13}/22$. Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τον αναδρομικό τύπο της περίπτωσης O_5. Το $n = 3$, άρα

$$\int \frac{dX}{(X^2 + K^2)^3} = I_3 = \frac{1}{K^2}\left(\frac{X}{4(X^2 + K^2)^2} + \frac{3}{4}I_2\right)$$

$$I_2 = \frac{1}{K^2}\left(\frac{X}{2(X^2 + K^2)^2} + \frac{1}{2}I_1\right)$$

$$I_1 = \frac{1}{K}\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{X}{K}$$

Αντικαθιστώντας όλα τα προηγούμενα αντίστροφα και λαμβάνοντας υπόψιν τις τιμές των X και K βρίσκουμε τελικά το I.

q.e.d.

8.11 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{x - 7}{(x^2 - x + 1)^2}dx$$

Λύση: Το ολοκλήρωμα αυτό ανήκει στην κατηγορία O_6. Θα σχηματίσουμε στον αριθμητή την παράγωγο του $x^2 - x + 1$, $(x^2 - x + 1)' = 2x - 1$. Το I γίνεται

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2(x-7)}{(x^2 - x + 1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x - 1 - 13}{(x^2 - x + 1)^2}dx =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x - 1}{(x^2 - x + 1)^2}dx - \frac{13}{2}\int \frac{1}{(x^2 - x + 1)^2}dx \tag{8.5}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με αντικατάσταση. Θέτουμε $w = x^2 - x + 1 \Rightarrow dw = (2x-1)dx$ και άρα

$$\int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}dx = \int \frac{1}{w^2}dw = \int w^{-2}dw = \frac{w^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x^2-x+1} + C \tag{8.6}$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα ανήκει στην κατηγορία O_5. Γράφουμε το $x^2 - x + 1$ σε άθροισμα τετραγώνων: $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$. Το δεύτερο ολοκλήρωμα τώρα γίνεται:

$$\int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}dx = \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx = \int \frac{1}{(X^2+K^2)^2}dX$$

όπου $X = x - \frac{1}{2}$, $K = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Χρησιμοποιώντας τώρα τον τύπο της O_5 έχουμε:

$$\int \frac{1}{(X^2+K^2)^2}dX = I_2 = \frac{1}{K^2}\frac{X}{2(X^2+K^2)} + \frac{1}{2}I_1$$

$$I_1 = \frac{1}{K}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{X}{K}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}dx &= \frac{4}{3}\left[\frac{x-1/2}{2[(x-1/2)^2+3/4]}\right] \\ &+\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C\end{aligned} \tag{8.7}$$

Αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα (8.6),(8.7), στο (8.5) και κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε τελικά :

$$I = \frac{-1}{2(x^2-x+1)} - 13\frac{(x-1/2)}{[(x-1/2)^2+(3/4)]} - \frac{26}{3\sqrt{3}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{(2x-1)}{\sqrt{3}} + C$$

q.e.d.

8.9 Ασκήσεις Προς Επίλυσην.

8.12 *Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα* $\int \frac{dx}{3x+7}$.

Απ: $\frac{1}{3}\ln|3x+7| + C$.

8.13 *Υπολογίσατε το* $\int \frac{dx}{12-8x}$.

Απ: $-\frac{1}{8}\ln|12-8x|+C.$

8.14 *Αποδείξατε τον τύπο της περίπτωσης* O_5.

8.15 *Υπολογίσατε το* $\int \frac{dx}{(2x-9)^{20}}$.

Απ: $-\frac{1}{38}\cdot\frac{1}{(2x-9)^{19}}+C.$

8.16 *Υπολογίσατε το* $\int \frac{dx}{(10-5x)^{123}}$.

Απ: $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{122}\cdot\frac{1}{(10-5x)^{122}}+C.$

8.17 *Υπολογίσατε το* $\int \frac{dx}{4x^2-8x}$.

Απ: $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+C.$

8.18 *Υπολογίσατε το* $\int \frac{dx}{x^2-9}$.

Απ: $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C.$

8.19 *Υπολογίσατε το* $\int \frac{dx}{a(x^2-A)}$.

Απ: $\frac{1}{a\sqrt{A}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{A}}{x+\sqrt{A}}\right|+C.$

8.20 *Υπολογίσατε το* $\int \frac{dx}{2x^2-6x-7}$.

Απ: $\frac{1}{2\sqrt{23}}\ln\left|\frac{2x-3-\sqrt{23}}{2x-3+\sqrt{23}}\right|+C.$

8.21 *Υπολογίσατε το* $\int \frac{dx}{x^2-6x+9}$.

Απ: $-\frac{1}{x-3}+C.$

8.22 *Υπολογίσατε το* $\int \frac{dx}{x^2-4x+4}$.

Απ: $-\frac{1}{x-2}+C.$

8.23 *Υπολογίσατε το* $\int \frac{dx}{x^2+2\sqrt{2}x+2}$.

Απ: $-\frac{1}{x+\sqrt{2}}+C.$

8.24 *Υπολογίσατε το* $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$.

Απ: $\frac{1}{2}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{x-3}{2}\right)+C.$

8.25 *Υπολογίσατε το* $\int \frac{dx}{2x^2+3x+4}.$

Απ: $\frac{2\sqrt{23}}{23}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{4x+3}{\sqrt{23}}\right)+C.$

8.26 *Υπολογίσατε το* $\int \frac{dx}{x^2-x+1}.$

Απ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$

8.27 *Υπολογίσατε το* $\int \frac{dx}{x^2-8x+17}.$

Απ: $\tau o\xi\varepsilon\varphi(x-4)+C.$

8.28 *Υπολογίσατε το* $\int \frac{7x+8}{4x^2-16x+52}dx.$

Απ: $\frac{7}{8}\ln|4x^2-16x+52|+\frac{11}{6}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{x-2}{3}\right)+$
$C.$

8.29 *Υπολογίσατε το* $\int \frac{2x-3}{4x^2+11}dx.$

Απ: $\frac{1}{4}\ln|4x^2+11|-\frac{3}{2\sqrt{11}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{2x}{\sqrt{11}}\right)+C.$

8.30 *Υπολογίσατε το* $\int \frac{dx}{(x^2+2)^3}.$

Απ: $\frac{x}{8(x^2+2)^2}+\frac{3x}{32(x^2+2)}+\frac{3}{32\sqrt{2}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C.$

8.31 *Υπολογίσατε το* $\int \frac{3x}{(x^2+7)^2}dx.$

Απ: $-\frac{3}{2(x^2+7)}$

Κεφάλαιο 9

Ολοκλήρωση Ρητών Συναρτήσεων

9.1 Γενικά

Θέλουμε να υπολογίσουμε ολοκληρώματα της μορφής:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \tag{9.1}$$

όπου $P(x)$ και $Q(x)$ πολυώνυμο του x. Αυτές οι συναρτήσεις λέγονται *ρητές* και τα αντίστοιχα ολοκληρώματα *ρητά*.

9.2 Η Μέθοδος

Για τον υπολογισμό του (9.1) ακολουθούμε την εξής μέθοδο:

ΒΗΜΑ 1ον: Εάν ο βαθμός του $P(x)$ είναι μεγαλύτερος του βαθμού του $Q(x)$, κάνουμε την διαίρεση και διασπάμε το αρχικό ολοκλήρωμα (9.1), σε ένα πολυωνυμικό ολοκλήρωμα και σε ένα ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης με βαθμό αριθμητού, μικρότερο του βαθμού του παρανομαστού.

ΒΗΜΑ 2ον: Εάν ο βαθμός του αριθμητού είναι μικρότερος του βαθμού του παρανομαστού, παραγοντοποιούμε πλήρως τον παρανομαστή.

ΒΗΜΑ 3ον: Αναλύουμε το κλάσμα $\frac{P(x)}{Q(x)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

ΒΗΜΑ 4ον: Διασπάμε το αρχικό ολοκλήρωμα (9.1) σε επιμέρους βασικά ρητά ολοκληρώματα, τα οποία υπολογίζονται κατα τα γνωστά.

9.3 Λυμένες Ασκήσεις

9.1 Υπολογίσατε το

$$\int \frac{dx}{x^3-1}$$

Λύση: Παραγοντοποιούμε κατ΄ αρχάς τον παρανομαστή: $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ και αναλύουμε το κλάσμα $\frac{1}{x^3-1}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+G}{x^2+x+1}$$

Με πράξεις βρίσκουμε οτι

$$A=\frac{1}{3},\quad B=-\frac{1}{3},\quad G=-\frac{2}{3}$$

και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{dx}{x^3-1}=\frac{1}{3}\cdot\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\cdot\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx$$

Υπολογίζουμε τα επιμέρους ολοκληρώματα. Το πρώτο είναι:

$$\int\frac{dx}{x-1}=\ln|x-1|+C$$

Το δεύτερο ανήκει στην κατηγορία O_4 και σχηματίζουμε στον αριθμητή την παράγωγο του παρανομαστού:

$$\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1+3}{x^2+x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{[(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})]^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|+\frac{3}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+C$$

Αντικαθιστώντας έχουμε τελικά:

$$\int\frac{dx}{x^3-1}=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|-\frac{\sqrt{3}}{3}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

q.e.d.

9.2 Υπολογίσατε το

$$\int \frac{dx}{x^3 - 19x + 30}$$

Λύση: Παραγοντοποιούμε κατ΄ αρχάς τον παρανομαστή: $x^3 - 19x + 30 = (x-2)(x-3)(x+5)$ και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{dx}{x^3 - 19x + 30} = \int \frac{dx}{(x-2)(x-3)(x+5)}$$

Αναλύουμε σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} + \frac{G}{x+5}$$

και υπολογίζουμε οτι:

$$A = -\frac{1}{7}, \quad B = \frac{1}{8}, \quad G = \frac{1}{56}$$

και το ολοκλήρωμα μετατρέπεται σε

$$\int \frac{dx}{x^3 - 19x + 30} = -\frac{1}{7}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{1}{56}\int \frac{dx}{x+5} =$$
$$= -\frac{1}{7}\ln|x-2| + \frac{1}{8}\ln|x-3| + \frac{1}{56}\ln|x+5| + C =$$
$$= \frac{1}{56}\ln\left|\frac{(x-3)^7(x+5)}{(x-2)^8}\right| + C$$

q.e.d.

9.3 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^2 + 6x - 1}{x^4 + x} dx$$

Λύση: Παραγοντοποιούμε πλήρως τον παρανομαστή: $x^4 + x = x(x^3 + 1) = x(x+1)(x^2 - x + 1)$. Αναλύουμε τώρα το κλάσμα $\frac{x^2+6x-1}{x^4+x}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$\frac{x^2 + 6x - 1}{x^4 + x} = \frac{x^2 + 6x - 1}{x(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Gx + D}{x^2 - x + 1}$$

Με εξίσωση των συντελεστών των ομοιοβαθμίων όρων βρίσκουμε

$$A = -1, \quad B = 2, \quad G = -1, \quad D = 4$$

και το αρχικό κλάσμα γίνεται:

$$\frac{x^2+6x-1}{x^4+x} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{-x+4}{x^2-x+1}$$

Το αρχικό ολοκλήρωμα τώρα γίνεται:

$$\int \frac{x^2+6x-1}{x^4+x}dx = -\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{-x+4}{x^2-x+1}dx$$

Τα επιμέρους ολοκληρώματα είναι:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C_1$$

$$\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + C_2$$

$$\int \frac{-x+4}{x^2-x+1}dx = -\int \frac{x-4}{x^2-x+1}dx =$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\right)\int \frac{2x-8}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x-1-7}{x^2-x+1}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{(x-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| + \frac{7}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{x-1/2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C_3$$

Με αντικατάσταση και εκτέλεση πράξεων βρίσκουμε το τελικό αποτέλεσμα:

$$\int \frac{x^2+6x-1}{x^4+x}dx = -\ln|x| + 2\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| +$$

$$+\frac{7}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{x-1/2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C$$

q.e.d.

9.4 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^3}{x^2+1}dx$$

Λύση: Επειδή ο αριθμητής έχει βαθμό μεγαλύτερο του παρανομαστού, θα κάνουμε την διαίρεση: $x^3 : x^2+1$ και βρίσκουμε πηλίκο x και υπόλοιπο $-x$, επομένως $x^3 = (x^2+1)x - x$. Αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση στον αριθμητή, το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{x^3}{x^2+1}dx = \int \frac{(x^2+1)x-x}{x^2+1}dx = \int xdx - \int \frac{x}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$$

q.e.d.

9.5 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^2+2x-1}{x^2+1}dx$$

Λύση: Επειδή ο αριθμητής έχει τον ίδιο βαθμό με τον βαθμό του παρανομαστού, θα κάνουμε την διαίρεση. Βρίσκουμε πηλίκο ίσον με 1 και υπόλοιπο ίσο με $2x-2$, επομένως $x^2+2x-1 = (x^2+1)1 + (2x-2)$ και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{x^2+2x-1}{x^2+1}dx = \int \frac{(x^2+1)\cdot 1 + (2x-2)}{x^2+1}dx =$$

$$= \int 1dx + \int \frac{2x-1}{x^2+1}dx = x + \int \frac{2x}{x^2+1}dx - 2\int \frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$= x + \ln|x^2+1| - 2\tau o\xi\varepsilon\varphi x + C$$

q.e.d.

9.4 Ασκήσεις προς Επίλυσην.

Υπολογίσατε τα κάτωθι ολοκληρώματα:

9.6 $\int \frac{2-x}{5x^2+4x-7}dx$

Απ: $\frac{17}{70}\ln|10x-3| - \frac{31}{70}\ln|10x+11| + C$

9.7 $\int \frac{x^2-7}{x+2}dx.$

Απ: $-3\ln|x+2| + \frac{x^2}{2} - 2x + C$

9.8 $\int \frac{2x^4}{(x^2+1)^2} dx.$

Απ: $2x + \frac{x}{x^2+1} - 3\tau o\xi\varepsilon\varphi x + C$

9.9 $\int \frac{dx}{x^3+1}.$

Απ: $\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$

9.10 $\int \frac{dx}{x^3-1}.$

Απ: $\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

9.11 $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^2-x} dx.$

Απ: $\frac{x^3}{3} + \ln|x| - 2\ln|x-1| + C$

9.12 $\int \frac{dx}{x^4+q^4}.$

Απ: $\frac{1}{2\sqrt{2}q^3}\left[\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{2x-\sqrt{2}q}{\sqrt{2}q}\right) + \tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{2x+\sqrt{2}q}{\sqrt{2}q}\right)\right] + \frac{1}{4\sqrt{2}q^3}\ln\left|\frac{q^2+\sqrt{2}qx+x^2}{q^2-\sqrt{2}qx+x^2}\right| +$
C

9.13 $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}.$

Απ: $\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right] + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right| + C$

9.14 $\int \frac{x^5 dx}{x^3+x}$

Απ: $\frac{x^3}{x} - x\tau o\xi\varepsilon\varphi x + C$

9.15 $\int \frac{x^2+5x-6}{x^2-7x+9} dx.$

Απ:

9.16 $\int \frac{5x-6}{x+7} dx$

Απ: $5x - 41\ln|x+7| + C$

9.17 $\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} dx.$

Απ: $\frac{1-2x}{6(1+x)^2} + \frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+7}\right| + C$

9.18 $\int \frac{x^3-7x^2+11}{(x-2)^2(x+1)^2} dx$

Απ: $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{10}{9}\ln|x-2| + \frac{19}{9}\ln|x+1| + C$

9.19 $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)} dx$

Απ: $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2+1}{x^2+3}\right| + C$

Κεφάλαιο 10

Ολοκλήρωση Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

10.1 Γενικά

Παρότι υπάρχει γενικός τρόπος για την ολοκλήρωση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, τον οποίο και θα εξετάσουμε στο τέλος του κεφαλαίου, μερικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις ολοκληρώνονται ευκολότερα. Θα ξεκινήσουμε το κεφάλαιο με την παρουσιάση αυτών των ειδικών μορφών.

10.2 Τριγωνομετρικά Γινόμενα

Μετατρέπουμε τα γινόμενα σε αθροίσματα, βάσει των τύπων:

$$\boxed{\int \eta\mu(Ax)\sigma\upsilon\nu(Bx)dx = \frac{1}{2}\int \eta\mu(Ax+Bx)dx + \frac{1}{2}\int \eta\mu(Ax-Bx)dx}$$

$$\boxed{\int \sigma\upsilon\nu(Ax)\eta\mu(Bx)dx = \frac{1}{2}\int \eta\mu(Ax+Bx)dx - \frac{1}{2}\int \eta\mu(Ax-Bx)dx}$$

$$\boxed{\int \sigma\upsilon\nu(Ax)\sigma\upsilon\nu(Bx)dx = \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu(Ax+Bx)dx + \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu(Ax-Bx)dx}$$

$$\boxed{\int \eta\mu(Ax)\eta\mu(Bx)dx = \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu(Ax-Bx)dx - \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu(Ax+Bx)dx}$$

10.3 Ολοκλήρωση περιττών δυνάμεων, τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Ισχύουν οι κάτωθι εμπειρικοί κανόνες:

- Το ολοκλήρωμα $\boxed{\int \eta\mu^{2n+1} x dx}$ υπολογίζεται με την αντικατάσταση $w = \sigma\upsilon\nu x$.
- Το ολοκλήρωμα $\boxed{\int \sigma\upsilon\nu^{2n+1} x dx}$ υπολογίζεται με την αντικατάσταση $w = \eta\mu x$.
- Το ολοκλήρωμα $\boxed{\int \varepsilon\varphi^{2n+1} x dx}$ υπολογίζεται με την μετατροπή $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ και την αντικατάσταση $w = \sigma\upsilon\nu x$.
- Το ολοκλήρωμα $\boxed{\int \sigma\varphi^{2n+1} x dx}$ υπολογίζεται με την μετατροπή $\sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ και την αντικατάσταση $w = \eta\mu x$.

10.4 Ολοκλήρωση αρτίων δυνάμεων, τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Ισχύουν οι κάτωθι εμπειρικοί κανόνες :

- Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\boxed{\int \eta\mu^{2\nu} x dx}$ χρησιμοποιούμε τον τύπο: $\eta\mu^2 x = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$, για να πάρουμε ολοκληρώματα μικροτέρου βαθμού.
- Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\boxed{\int \sigma\upsilon\nu^{2\nu} x dx}$ χρησιμοποιούμε τον τύπο: $\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}$ για να πάρουμε ολοκληρώματα μικροτέρου βαθμού.
- Για να πάρουμε το ολοκλήρωμα $\boxed{\int \varepsilon\varphi^{2\nu} x dx}$ μετατρέπουμε το $\varepsilon\varphi^{2\nu} x$ σε γινόμενο $\varepsilon\varphi^{2\nu-2} x \cdot \varepsilon\varphi^2 x$ και χρησιμοποιούμε τον τύπο $\varepsilon\varphi^2 x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 1$. Προκύπτουν δύο ολοκληρώματα, το πρώτο υπολογίζεται με την αντικατάσταση $w = \varepsilon\varphi x$ και το δεύτερο είναι όμοιο με το αρχικό αλλά μικροτέρου βαθμού.

- Για να πάρουμε το ολοκλήρωμα $\boxed{\int \sigma\varphi^{2\nu} x dx}$ παραγοντοποιούμε $\sigma\varphi^{2\nu}x$ σύμφωνα με την σχέση $\sigma\varphi^{2\nu-2}x \cdot \sigma\varphi^2 x$ και χρησιμοποιούμε τον τύπο $\sigma\varphi^2 x = \frac{1}{\eta\mu^2 x} - 1$. Προκύπτουν δύο ολοκληρώματα, το πρώτο υπολογίζεται με την αντικατάσταση $w = \sigma\varphi x$ και το δεύτερο είναι όμοιο με το αρχικό αλλά μικροτέρου βαθμού.

10.5 Ολοκληρώματα γινομένων δυνάμεων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Ισχύουν οι κάτωθι εμπειρικοί κανόνες:

- Για να υπολογίσουμε ολοκληρώματα της μορφής $\boxed{\int \eta\mu^\theta x \sigma\upsilon\nu^{2k+1} x dx}$, θ, k ακέραιοι, εκφράζουμε το ολοκλήρωμα συναρτήσει του $\eta\mu x$ και χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $w = \eta\mu x$

- Για να υπολογίσουμε ολοκληρώματα της μορφής $\boxed{\int \eta\mu^\theta x \sigma\upsilon\nu^{2k} x dx}$, θ, k ακέραιοι, εκφράζουμε το ολοκλήρωμα συναρτήσει του $\sigma\upsilon\nu x$ και χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $w = \sigma\upsilon\nu x$.

10.6 Ολοκληρώματα πηλίκων δυνάμεων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

- Για να υπολογίσουμε ολοκληρώματα της μορφής $\boxed{\int \frac{\eta\mu^\theta x}{\sigma\upsilon\nu^\rho x} dx}$ ρ, θ - θετικοί ακέραιοι, τα μετατρέπουμε, χρησιμοποιώντας τον τύπο $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, σε ολοκλήρωμα ενός μόνο τριγωνομετρικού αριθμού και διασπάμε το κλάσμα.

- Για να υπολογίσουμε ολοκληρώματα της μορφής $\boxed{\int \frac{1}{\eta\mu^\rho x \sigma\upsilon\nu^\theta x} dx}$ ρ, θ - θετικοί ακέραιοι, αντικαθιστούμε την μονάδα του αριθμητού με την ποσότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ και διασπάμε το κλάσμα.

10.7 Γενικός τρόπος ολοκλήρωσης τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Ένα οποιοδήποτε τριγωνομετρικό ολοκλήρωμα της μορφής $\boxed{\int f(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x, \varepsilon\varphi x)dx}$ μετατρέπεται σε ρητό, με την βοήθεια των μετασχηματισμών:

$$\boxed{dx = \frac{2dt}{t^2+1}, \quad \eta\mu x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \sigma\upsilon\nu x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \varepsilon\varphi x = \frac{2t}{1-t^2}}$$

Οι μετασχηματισμοί αυτοί προκύπτουν απο την σχέση $t = \varepsilon\varphi\frac{x}{2}$. Η μέθοδος αυτή, παρότι αντιμετωπίζει οποιοδήποτε τριγωνομετρικό ολοκλήρωμα, οδηγεί συνήθως σε περίπλοκα ρητά ολοκληρώματα και για αυτό καλό είναι να αποφεύγεται.

10.8 Λυμένες Ασκήσεις

10.1 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα $\int \sigma\upsilon\nu(5x)\sigma\upsilon\nu(2x)dx$.

Λύση: Από τους γνωστούς τριγωνομετρικούς τύπους έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu(5x)\sigma\upsilon\nu(2x) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(5x+2x) + \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(5x-2x) =$$

$$= \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(7x) + \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(3x)$$

και άρα

$$\int \sigma\upsilon\nu(5x)\sigma\upsilon\nu(2x)dx = \frac{1}{2}\left[\int \sigma\upsilon\nu(7x)dx + \int \sigma\upsilon\nu(3x)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{14}\eta\mu(7x) + \frac{1}{6}\eta\mu(3x) + C$$

q.e.d.

10.2 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα $\int \sigma\upsilon\nu^3 x dx$.

Λύση: Θέτουμε $w = \eta\mu x$ και άρα $\frac{dw}{dx} = \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow dx = \frac{dw}{\sigma\upsilon\nu x}$. Διαδοχικά τώρα έχουμε:

$$\int \sigma\upsilon\nu^3 x dx = \int \sigma\upsilon\nu^3 x \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} dw =$$

$$= \int \sigma\upsilon\nu^2 x dw = \int (1-\eta\mu^2 x)dw = \int (1-w^2)dw =$$

$$\int (1)dw - \int w^2 dw = w - \frac{w^3}{3} + C = \eta\mu x - \frac{\eta\mu^3 x}{3} + C$$

q.e.d.

10.3 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα $\int \varepsilon\varphi^5 x dx$.

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε την αντικατάσταση $w = \sigma\upsilon\nu x$. Διαδοχικά έχουμε:

$$\int \varepsilon\varphi^5 x dx = \int \frac{\eta\mu^5 x}{\sigma\upsilon\nu^5 x} dx = \int \frac{\eta\mu^5 x}{w^5} \cdot \left(\frac{-1}{\eta\mu x}\right) dw =$$

$$= -\int \frac{\eta\mu^4 x}{w^5} dw = -\int \frac{(1-\sigma\upsilon\nu^2 x)^2}{w^5} dw = -\int \frac{(1-w^2)^2}{w^5} dw =$$

$$= -\int \frac{dw}{w^5} - 2\int \frac{dw}{w^3} + \int \frac{dw}{w} dw = \frac{1}{4w^4} - \frac{1}{w^2} + \ln w + C =$$

$$= \frac{1}{4\sigma\upsilon\nu^4 x} - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \ln|\sigma\upsilon\nu x| + C$$

q.e.d.

10.4 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα $\int \sigma\upsilon\nu^4 x dx$.

Λύση: Διαδοχικά έχουμε:

$$\int \sigma\upsilon\nu^4 x dx = \int (\sigma\upsilon\nu^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu(2x)}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int [1 + \sigma\upsilon\nu^2(2x) + 2\sigma\upsilon\nu(2x)] dx = \frac{1}{4}\int 1 dx + \frac{2}{4}\int \sigma\upsilon\nu(2x) dx +$$

$$+ \frac{1}{4}\int \sigma\upsilon\nu^2(2x) dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot \eta\mu(2x) + \frac{1}{4}\int \frac{1+\sigma\upsilon\nu(4x)}{2} dx =$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\eta\mu(4x) + \frac{1}{8}\int 1 dx + \frac{1}{8}\int \sigma\upsilon\nu(4x) dx =$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\eta\mu(4x) + \frac{x}{8} + \frac{1}{32}\eta\mu(4x) + C$$

q.e.d.

10.5 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα $\int \sigma\varphi^4 x dx$.

Λύση: Διαδοχικά έχουμε:

$$\int \sigma\varphi^4 x dx = \int \sigma\varphi^2 x \cdot \sigma\varphi^2 x dx = \int \sigma\varphi^2 x \left(\frac{1}{\eta\mu^2 x} - 1\right) dx =$$

$$= \int \frac{\sigma\varphi^2 x}{\eta\mu^2 x} dx - \int \sigma\varphi^2 x dx$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με αντικατάσταση $w = \sigma\varphi x \Rightarrow dw = -\frac{dx}{\eta\mu^2 x}$ και άρα:

$$\int \frac{\sigma\varphi^2 x}{\eta\mu^2 x} dx = \int (-w^2) dw = -\frac{w^3}{3} + C_1 = -\frac{\sigma\varphi^3 x}{3} + C_1$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\int \sigma\varphi^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\eta\mu^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{dx}{\eta\mu^2 x} - \int 1 dx = -\sigma\varphi x - x + C_2$$

και τελικά

$$\int \sigma\varphi^4 x dx = -\frac{\sigma\varphi^3 x}{3} - \sigma\varphi x - x + C$$

q.e.d.

10.6 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα $\int \eta\mu^3 x \sigma\upsilon\nu^2 x dx$.

Λύση: Χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $w = \sigma\upsilon\nu x$ και έχουμε $dx = -\frac{dw}{\eta\mu x}$ και άρα

$$\int \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \int \eta\mu^2 x \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x dx =$$

$$= \int (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \left(-\frac{1}{\eta\mu x}\right) dw =$$

$$-\int (1 - w^2) w^2 dw = \int (w^4 - w^2) dw = \frac{w^5}{5} - \frac{w^3}{3} + C =$$

$$= \frac{1}{5}\sigma\upsilon\nu^5 x - \frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu^3 x + C$$

q.e.d.

10.7 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\eta\mu^5 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$$

Λύση: Χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $w = \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow dx = -\frac{dw}{\eta\mu x}$ και άρα

$$\int \frac{\eta\mu^5 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \int \frac{\eta\mu^5 x}{w^2}\cdot\left(-\frac{1}{\eta\mu x}\right)dw =$$

$$= -\int \frac{\eta\mu^4 x}{w^2}dw = -\int \frac{(1-\sigma\upsilon\nu^2 x)^2}{w^2}dw =$$

$$= -\int \frac{(1-w^2)^2}{w^2}dw = -\int \left(\frac{1-2w^2+w^4}{w^2}\right)dw =$$

$$= -\int \frac{1}{w^2}dw + 2\int (1)dw - \int w^2 dw =$$

$$= \frac{1}{w} + 2w - \frac{w^3}{3} + C = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} + 2\sigma\upsilon\nu x - \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{3} + C$$

q.e.d.

10.8 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Λύση: Σχηματίζουμε στον αριθμητή την ποσότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ και έχουμε:

$$\int \frac{1}{\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \int \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x}dx =$$

$$= \int \frac{\eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x}dx + \int \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x}dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \int \frac{dx}{\eta\mu^2 x} = \varepsilon\varphi x - \sigma\varphi x + C$$

q.e.d.

10.9 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{1+\sigma\upsilon\nu x}$$

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της γενικής τριγωνομετρικής αντικατάστασης. Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, όπου $t = \varepsilon\varphi(\frac{x}{2})$ και έχουμε:

$$\int \frac{dx}{2+\sigma\upsilon\nu x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{5+\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt =$$

$$= \int \frac{2}{6+4t^2}dt = \int \frac{dt}{2t^2+3}$$

το τελευταίο ολοκλήρωμα θα γίνει:

$$\int \frac{dt}{2t^2+3}dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{2}}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{\frac{3}{2}})^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right)+C =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)+C$$

και με αντίστροφη αντικατάσταση έχουμε τελικά:

$$\int \frac{dx}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)+C$$

q.e.d.

10.10 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{2+3\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}$$

Λύση: Με αντικατάσταση έχουμε:

$$\int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{2+3\frac{2t}{t^2+1}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt =$$

$$= 2\int \frac{dt}{2t^2+2+6t+1-t^2} = \int \frac{dt}{t^2+6t+3}$$

Αναλύουμε το κλάσμα $\frac{1}{t^2+6t+3}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$\frac{1}{t^2+6t+3} = -\frac{1}{2\sqrt{6}(-3+\sqrt{6}-t)} - \frac{1}{2\sqrt{6}(t+3+\sqrt{6})}$$

και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$2\int \frac{dt}{t^2+6t+3} = -\frac{1}{\sqrt{6}}\int \frac{dt}{-3+\sqrt{6}-t} - \frac{1}{\sqrt{6}}\int \frac{dt}{t+3+\sqrt{6}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\ln|-3+\sqrt{6}-t| - \frac{1}{\sqrt{6}}\ln|t+3+\sqrt{6}|+C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{-3+\sqrt{6}-t}{t+3+\sqrt{6}} \right| + C$$

και με αντίστροφη αντικατάσταση έχουμε τελικά:

$$\int \frac{dx}{2+3\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{-3+\sqrt{6}-\varepsilon\varphi(\frac{x}{2})}{\varepsilon\varphi(\frac{x}{2})+3+\sqrt{6}} \right| + C$$

q.e.d.

10.9 Ασκήσεις προς Επίλυσην

Υπολογίσατε τα κάτωθι ολοκληρώματα:

10.11 $\int \eta\mu(\frac{x}{2})\sigma\upsilon\nu(\frac{x}{2})dx$

Απ: $-\frac{3}{5}\sigma\upsilon\nu(\frac{5}{6}x) - 3\sigma\upsilon\nu(\frac{x}{6}) + C$

10.12 $\int \sigma\upsilon\nu x\eta\mu(nx)dx$

Απ: $-\frac{1}{2(n+1)}\sigma\upsilon\nu((n+1)x) + \frac{1}{2(n+1)}\sigma\upsilon\nu((1-n)x) + C$

10.13 $\int \eta\mu(10x)\eta\mu(6x)dx$

Απ: $\frac{1}{8}\eta\mu(4x) + \frac{1}{32}\eta\mu(16x) + C$

10.14 $\int \sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu(nx)dx$

Απ: $\frac{1}{2(n+1)}\eta\mu((n+1)x) + \frac{1}{2(1-n)}\eta\mu((1-n)x) + C$

10.15 $\int \varepsilon\varphi^3 x dx$

Απ: $\ln|\sigma\upsilon\nu x| + \frac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x} + C$

10.16 $\int \varepsilon\varphi^4 x dx$

Απ: $\frac{1}{3}\varepsilon\varphi^3 x - \varepsilon\varphi x + x + C$

10.17 $\int \sigma\varphi^6 x dx$

Απ: $-\frac{1}{5}\sigma\varphi^5 x + \frac{1}{3}\sigma\varphi^3 x - \sigma\varphi x - x + C$

10.18 $\int \frac{dx}{\eta\mu^2\sigma\upsilon\nu^3 x}$

Aπ: $\frac{\varepsilon\varphi x}{2\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}+\varepsilon\varphi x\right|+\int\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^3 x}$

10.19 $\int\frac{dx}{5-4\sigma\upsilon\nu x}$

Aπ: $\frac{2}{3}\tau o\xi\varepsilon\varphi(3\varepsilon\varphi(\frac{x}{2}))+C$

10.20 $\int\frac{dx}{\eta\mu x}$

Aπ: $\ln\left|\frac{1}{\eta\mu x}-\sigma\varphi x\right|+C$

10.21 $\int\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu x}$

Aπ: $\ln\left|\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}+\varepsilon\varphi x\right|+C$

10.22 $\int\frac{dx}{\eta\mu^3 x}$

Aπ: $-\frac{\sigma\varphi x}{2\eta\mu x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{\eta\mu x}-\sigma\varphi x\right|+C$

10.23 $\int\frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^3 x}$

Aπ: $\frac{\varepsilon\varphi x}{2\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}+\varepsilon\varphi x\right|+C$

10.24 $\int\frac{\sigma\varphi^3 x}{\eta\mu^4(3x)}dx$

Aπ: $-\frac{1}{6}\sigma\varphi^2(3x)-\frac{1}{12}\sigma\varphi^4(3x)+C$

10.25 $\int\frac{dx}{1-\eta\mu(\frac{x}{2})}$

Aπ: $2\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{\eta\mu(\frac{x}{2})}\right)+C$

10.26 $\int\frac{dx}{1+\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}$

Aπ: $\ln\left|\frac{\varepsilon\varphi(\frac{x}{2})}{1+\varepsilon\varphi(\frac{x}{2})}\right|+C$

10.27 $\int\frac{dx}{1+\sigma\upsilon\nu(3x)}$

Aπ: $\frac{1-\sigma\upsilon\nu(3x)}{3\eta\mu(3x)}+C$

10.28 $\int\frac{dx}{1-2\eta\mu x}$

Απ: $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{\varepsilon\varphi(\frac{x}{2})-2-\sqrt{3}}{\varepsilon\varphi(\frac{x}{2})-2+\sqrt{3}}\right|+C$

10.29 $\int\frac{\eta\mu x}{1+\eta\mu^2 x}dx$

Απ: $\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\varepsilon\varphi^2(\frac{x}{2})+3-2\sqrt{2})}{\varepsilon\varphi^2(\frac{x}{2})+3+2\sqrt{2}}\right|+C$

10.30 $\int\frac{dx}{2+\eta\mu x}dx$

Απ: $\frac{2}{\sqrt{3}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{2\varepsilon\varphi(\frac{x}{2}+1)}{\sqrt{3}}\right)+C$

Κεφάλαιο 11

Ολοκλήρωση Αρρήτων Συναρτήσεων Ι

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την ολοκλήρωση αρρήτων συναρτήσεων με πρωτοβάθμιο υπόρριζο.

11.1 Ολοκληρώματα της μορφής:

$$\boxed{\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx \quad , \quad \frac{\alpha}{\gamma} \neq \frac{\beta}{\delta}}$$

Τα ολοκληρώματα αυτά υπολογίζονταaι με την αντικατάσταση $\omega = \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$, μετατρεπόμενα σε ρητά.

11.2 Ολοκληρώματα της μορφής:

$$\boxed{\int f\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \sqrt[n_2]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx \quad , \quad \frac{\alpha}{\gamma} \neq \frac{\beta}{\delta}}$$

Για να υπολογίσουμε αυτά τα ολοκληρώματα, μετατρέπουμε τις ετεροβάθμιες ρίζες ομοιοβάθμιες, με την βοήθεια του ελαχίστου κοινού πολλαπλασίου n των n_1, n_2 και μετά χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $\omega = \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$. Η αντικατάσταση αυτή μετασχηματίζει το αρχικό ολοκλήρωμα σε ρητό.

11.3 Ολοκληρώματα της μορφής:

$$\boxed{\int f\left(x,\ \sqrt[n_1]{x^{m_1}},\ \sqrt[n_2]{x^{m_2}},\ldots,\ \sqrt[n_k]{x^{m_k}}\right)dx}$$

Για να υπολογίσουμε αυτά τα ολοκληρώματα μετατρέπουμε τις ετερώνυμες ρίζες σε ομώνυμες, με την βοήθεια του ελαχίστου κοινού πολλαπλασίου n των τάξεων των ριζών $n_1, n_2, \ldots, n_k$ και μετά χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $\sqrt[n]{x} = \omega$, για να μετατρέψουμε το ολοκλήρωμα σε ρητό.

11.4 Λυμένες Ασκήσεις

11.1 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x-7}}$$

Λύση: Χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση: $\sqrt{x-7} = \omega$ και έχουμε διαδοχικά: $x = \omega^2 + 7 \Rightarrow dx = 2\omega d\omega$, και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x-7}} = \int \frac{2\omega d\omega}{(\omega^2+7+2)\omega} =$$

$$= 2\int \frac{d\omega}{\omega^2+9} = 2\int \frac{d\omega}{\omega^2+3^2} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{3}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\omega}{3}\right) + C = \frac{2}{3}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\sqrt{x-7}}{3}\right) + C$$

q.e.d.

11.2 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{2x-3}{\sqrt[3]{x-2}}dx$$

Λύση: Θέτουμε $\sqrt[3]{x-2} = \omega$ και έχουμε: $x = \omega^3 + 2$ και $dx = 3\omega^2 d\omega$. Το ολοκλήρωμα τώρα διαδοχικά γίνεται:

$$\int \frac{2x-3}{\sqrt[3]{x-2}}dx = \int \frac{2(\omega^3+2)-3}{\omega}\cdot 3\omega^2 d\omega = \int 3\omega(2\omega^3+1)d\omega =$$

$$= \int (6\omega^4+3\omega)d\omega = \frac{6}{5}\omega^5 + \frac{3}{2}\omega^2 + C = \frac{6}{5}\sqrt[3]{(x-2)^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-2)^2} + C$$

q.e.d.

11.3 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{x(x-1)}\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}dx$$

Λύση: Θα χρησιμοποιήσουμε την αντικατάσταση: $\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}} = \omega$ απ' όπου έχουμε $x = \frac{\omega^3}{\omega^3-1}$ και με παραγώγιση παίρνουμε $\frac{dx}{d\omega} = \frac{-3\omega^2}{(\omega^3-1)^2} \Rightarrow dx = \frac{-3\omega^2}{(\omega^3-1)^2}d\omega$. Το ολοκλήρωμα τώρα διαδοχικά γίνεται:

$$\int \frac{1}{x(x-1)}\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}dx = \int \frac{1}{\frac{\omega^3}{\omega^3-1}\left(\frac{\omega^3}{\omega^3-1}-1\right)} \cdot \omega \cdot \frac{-3\omega^2}{(\omega^3-1)^2}d\omega =$$

$$= \int \frac{-3\omega^3}{\omega^3}d\omega = -3\int d\omega = -3\omega + C = -3\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}} + C$$

q.e.d.

11.4 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int \frac{1-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$$

Λύση: Μετατρέπουμε τα ετεροβάθμια ριζικά σε ομοιοβάθμια και το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I = \int \frac{1-\sqrt[6]{(x+1)^2}}{\sqrt[6]{(x+1)^6}+\sqrt[6]{(x+1)^2}}dx$$

Χρησιμοποιούμε τώρα την αντικατάσταση $\omega = \sqrt[6]{x+1}$, από όπου $x = \omega^6 - 1$ και $dx = 6\omega^5 d\omega$. Έχουμε τώρα διαδοχικά:

$$I = \int \frac{1-\omega^2}{\omega^3+\omega^2} \cdot 6\omega^5 d\omega =$$

$$= -\int \frac{(\omega-1)(\omega+1)}{\omega^2(\omega+1)} \cdot 6\omega^5 d\omega = -6\int (\omega-1)\omega^2 d\omega =$$

$$= -6\int (\omega^4 - \omega^3)d\omega = -\frac{6}{5}\omega^5 + \frac{6}{4}\omega^4 + C =$$

$$= -\frac{6}{5}(\sqrt[6]{x+1})^5 + \frac{3}{2}(\sqrt[6]{x+1})^4 + C$$

q.e.d.

11.5 Υπολογίσατε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1} dx$$

Λύση: Μετατρέπουμε τα ετεροβάθμια ριζικά σε ομοιοβάθμια και έχουμε:

$$I = \int \frac{\sqrt[4]{x^2}}{\sqrt[4]{x^3}+1} dx$$

Θέτουμε τώρα $\omega = \sqrt[4]{x}$, $\Rightarrow dx = 4\omega^3 d\omega$ και το ολοκλήρωμα διαδοχικά γίνεται:

$$I = \int \frac{\omega^2}{\omega^3+1} \cdot 4\omega^3 d\omega = 4\int \frac{\omega^5}{\omega^3+1} d\omega =$$

$$= 4\int \left(\omega - frac\omega^2\omega^3+1\right) d\omega = 4\int \omega d\omega - 4\int frac\omega^2\omega^3+1 d\omega =$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{4}{3}\ln|\sqrt[4]{x^3}+1| + C$$

q.e.d.

11.5 Ασκήσεις προς Επίλυση

Υπολογίσατε τα κάτωθι ολοκληρώματα:

11.6 $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-5}}$

Απ: $\frac{2}{3}\sqrt{3x-5} + C.$

11.7 $\int \frac{1-\sqrt{3x+2}}{1+\sqrt{3x+2}} dx$

Απ: $-\frac{1}{3}(3x+2) + \frac{4}{3}\sqrt{3x+2} - \frac{4}{3}\ln|\sqrt{3x+2} + 1| + C.$

11.8 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$

Απ: $2\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + \ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right| + C.$

11.9 $\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}} dx$

Απ: $\frac{4}{5}x^{15/12} - \frac{24}{17}x^{17/12} + C.$

11.10 $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$

Aπ: $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right| + C.$

11.11 $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+2}}$

Aπ: $2\sqrt{x+2} - 6\ln(3+\sqrt{x+2}) + C.$

11.12 $\int \sqrt{\frac{3x+2}{x-3}}$

Aπ:

11.13 $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

Aπ: $-\frac{1}{x} - \ln(x+x^2)^2 + C.$

11.14 $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$

Aπ:

11.15 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}$

Aπ: $2\sqrt{1+x} - 3\sqrt[3]{1+x} + C.$

11.16 $\int \frac{x+\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}}dx$

Aπ: