ΣΕΙΡΕΣ TAYLOR.

Στην Ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με την προσέγγιση συναρτήσεων μέσω πολυωνύμων. ***Πολυώνυμο*** είναι κάθε συνάρτηση της μορφής:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n ,$$

όπου οι συντελεστές α_i θα θεωρούνται εδώ πραγματικοί αριθμοί. Κάποιες από τις βασικότερες ιδιότητες των πολυωνύμων:

- Το πολυώνυμο p(x) λέμε ότι είναι ***n-βαθμού*** αν n είναι η μεγαλύτερη δύναμη της μεταβλητής x που εμφανίζεται σε αυτό. Με το συμβολισμό που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω, αυτό εξασφαλίζεται αν $a_n \neq 0$.

- Κάθε πολυώνυμο είναι απεριόριστες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με παραγώγους που υπολογίζονται εύκολα:

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ... + na_n x^{n-1} ,$$
$$p''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + ... + n(n-1)a_n x^{n-2} , \quad \kappa\lambda\pi$$

- Τα πολυώνυμα είναι επίσης απεριόριστες φορές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με ολοκληρώματα που υπολογίζονται χωρίς δυσκολίες:

$$\int p(x)dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + ... + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Όπως γίνεται φανερό, πρόκειται για συναρτήσεις με "ευκολίες" που δεν συναντά κανείς σε όλες τις συναρτήσεις. Αποκτά έτσι ιδιαίτερη αξία στην Μαθηματική Ανάλυση η δυνατότητα προσέγγισης μιας συνάρτησης μέσω πολυωνύμων.

4.1. Πολυωνυμική προσέγγιση μέσω του αναπτύγματος Taylor.

Θα ξεκινήσουμε μελετώντας την πολυωνυμική προσέγγιση συναρτήσεων μέσω του αναπτύγματος Taylor.

Θεωρούμε μια πραγματική συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη στο διάστημα [a,b] (το οποίο μπορεί να είναι και ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών αριθμών), για την οποία υποθέτουμε ότι έχει παραγώγους μέχρι και n+1 τάξεως. Ζητάμε να προσδιορίσουμε το πολυώνυμο εκείνο *p(x)* που αποτελεί την καλύτερη προσέγγιση της *f(x)* βάσει του εξής κριτηρίου:

Οι τιμές των f(x) και p(x) καθώς και των παραγώγων τους μέχρι n-τάξης συμπίπτουν στο σημείο a:

$$p(a) = f(a),\ p'(a) = f'(a),\ \ p''(a) = f''(a),\ ...,\ p^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Εύκολα μπορεί κανείς να ελέγξει ότι οι προηγούμενες σχέσεις ικανοποιούνται από το πολυώνυμο

$$p(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n.$$

Το “σφάλμα” της προσέγγισης αυτής στο σημείο x είναι ίσο με

$$R(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1},\ \ ,$$

όπου ξ σημείο του διαστήματος (α,x).

Σημειώνουμε ότι το σφάλμα σε αυτήν την μορφή ονομάζεται ***υπόλοιπο Lagrange***. Ισοδύναμη έκφραση του σφάλματος της πολυωνυμικής προσέγγισης είναι το ***υπόλοιπο Cauchy***:

$$R^C(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\cdot(1-\delta)^n\cdot f^{(n+1)}(a+\delta\cdot(x-a)),\ \ \delta\in(0,1).$$

Μια τυπική **απόδειξη** των προηγούμενων ισχυρισμών η οποία βασίζεται στο Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού είναι η εξής :

Θεωρούμε την υπό μελέτη συνάρτηση f(t) ορισμένη στο διάστημα [α,x]. Έστω $k\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε στο άκρο x του διαστήματος να ισχύει ότι:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n + k\cdot(x-a)^{n+1}.$$

Θεωρούμε επίσης τη συνεχή και παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$g(t) = f(t) - f(a) - f'(a)\cdot(t-a) - \frac{f''(a)}{2!}\cdot(t-a)^2 - ... - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(t-a)^n - k\cdot(t-a)^{n+1},\ \ t\in[a,x],$$

για την οποία παρατηρούμε ότι :

$$g(a) = 0,$$
$$g(x) = 0,$$
$$g'(a) = g''(a) = ... = g^{(n)}(a) = 0.$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής, έχουμε :

$$\begin{aligned}
&g(a) = g(x) = 0 \Rightarrow \exists\ \xi_1 \in (a,x) : g'(\xi_1) = 0, \\
&g'(a) = g'(\xi_1) = 0 \Rightarrow \exists\ \xi_2 \in (a,\xi_1) : g''(\xi_2) = 0, \\
&\ldots \\
&g^{(n)}(a) = g^{(n)}(\xi_{n-1}) = 0 \Rightarrow \exists\ \xi \in (a,\xi_{n-1}) : g^{(n+1)}(\xi) = 0.
\end{aligned}$$

Όμως, $g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - k \cdot (n+1)!$. Επομένως,

$$g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - k \cdot (n+1)! = 0 \Rightarrow k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Άρα,

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = p(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$R(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

Αξίζει επίσης να τονισθεί ιδιαίτερα ότι στην περίπτωση που η συνάρτηση f(x) είναι απεριόριστες φορές παραγωγίσιμη και το αντίστοιχο σφάλμα προσέγγισης τείνει στο μηδέν, τότε ο βαθμός του προσεγγιστικού πολυωνύμου μπορεί να θεωρηθεί ότι τείνει στο άπειρο. Έτσι επιτυγχάνεται η ισότητα (και όχι προσέγγιση πια):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n . \qquad (4.1.1)$$

Το προηγούμενο ανάπτυγμα της συνάρτησης f σε σειρά δυνάμεων ονομάζεται ***ανάπτυγμα Taylor*** (***Maclaurin*** αν ως κέντρο της σειράς επιλεγεί το σημείο α=0) και συγκλίνει, σύμφωνα με το κριτήριο της ρίζας, όταν:

$$\lim\left(\sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n\right|}\right) < 1 \Leftrightarrow \lim\left(\sqrt[n]{\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|}{n!}}\right)\cdot|x-a| < 1 \Leftrightarrow |x-a| < \frac{1}{\lim\left(\sqrt[n]{\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|}{n!}}\right)}$$

Ο αριθμός $r := \dfrac{1}{\lim\left(\sqrt[n]{\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|}{n!}}\right)}$ ονομάζεται ***ακτίνα σύγκλισης*** της σειράς Taylor. Έτσι, η σειρά συγκλίνει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x που ανήκουν στο διάστημα (a-r,a+r) το οποίο και ονομάζεται ***διάστημα σύγκλισης***.

4.2. Αναπτύγματα Taylor βασικών (στοιχειωδών) συναρτήσεων.

Στην παράγραφο αυτή δίνουμε τα αναπτύγματα σε σειρές Taylor των βασικότερων στοιχειωδών συναρτήσεων. Βασιζόμενοι σε αυτά, καθώς και σε τεχνικές που θα αναπτύξουμε στην επόμενη Ενότητα, μπορούμε να επιτύχουμε την ανάπτυξη σε σειρά Taylor μεγάλης κατηγορίας συναρτήσεων.

4.2.1. Η εκθετική συνάρτηση.

Για την συνάρτηση **f(x)=e^{x}**, **x∈R**, η οποία, όπως είναι γνωστό, είναι απεριόριστες φορές παραγωγίσιμη, ισχύει ότι:

$$f(x)=e^{x}\Rightarrow f(0)=e^{0}=1$$

$$f'(x)=\left(e^{x}\right)'=e^{x}\Rightarrow f'(0)=e^{0}=1$$

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(e^{x}\right)'=e^{x}\Rightarrow f''(0)=e^{0}=1$$

$$\dots$$

$$f^{(n)}(x)=e^{x}\Rightarrow f^{(n)}(0)=e^{0}=1$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στον τύπο (4.1.1), με κέντρο το σημείο α=0, παίρνουμε το ανάπτυγμα Maclaurin της εκθετικής συνάρτησης:

$$e^{x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot(x-0)^{n}\Rightarrow$$

$$e^{x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot x^{n}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\dots$$

4.2.2. Η λογαριθμική συνάρτηση lnx.

Για την συνάρτηση **f(x)=lnx** η οποία είναι, επίσης, απεριόριστες φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της $(0,+\infty)$, επιλέγουμε ως κέντρο το σημείο $a=1$ και έχουμε:

$$f(x)=\ln x\Rightarrow f(0)=\ln 1=0$$

$$f'(x)=\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{1}=1$$

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^{2}}\Rightarrow f''(1)=-1$$

$$f'''(x)=\left(f''(x)\right)'=\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)'=\frac{2}{x^{3}}\Rightarrow f'''(1)=2$$

$$f^{(4)}(x)=\left(f'''(x)\right)'=\left(\frac{2}{x^{3}}\right)'=-\frac{2\cdot 3}{x^{4}}\Rightarrow f^{(4)}(1)=-2\cdot 3$$

$$\dots$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^{n}}\Rightarrow f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$$

Η τελευταία σχέση αποδεικνύεται επαγωγικά ως εξής :

Για n=1, προφανώς ισχύει αφού $f'(x) = \left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x} = (-1)^{1-1} \cdot \dfrac{(1-1)!}{x}$.

Αν υποθέσουμε ότι ισχύει για n=k, δηλαδή ότι $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{x^k}$, τότε

$$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)}(x))' = \left((-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k}\right)' = (-1)^{k-1}\cdot(k-1)!\cdot(x^{-k})' =$$

$$= (-1)^{k-1}\cdot(k-1)!\cdot(-k)\cdot x^{-k-1} = (-1)^k\cdot\frac{k!}{x^{k+1}}$$

και η επαγωγική απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στον τύπο (4.1.1), με κέντρο το σημείο α=1, έχουμε:

$$\ln x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}\cdot(x-1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{n!}\cdot(x-1)^n \Rightarrow$$

$$\ln x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot(x-1)^n, \quad |x-1|<1.$$

Ισοδύναμα ο προηγούμενος τύπος μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot x^n$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \quad |x|<1.$$

Η ακτίνα σύγκλισης της υπό μελέτης δυναμοσειράς είναι πράγματι 1 αφού:

$$r := \frac{1}{\lim\left(\sqrt[n]{\dfrac{\left|(-1)^{n-1}(n-1)!\right|}{n!}}\right)} = \lim\sqrt[n]{n} = 1.$$

4.2.3. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Οι συναρτήσεις του ημιτόνου f(x)=sinx και του συνημιτόνου g(x)=cosx είναι παραγωγίσιμες σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών και αναπτύσσονται σε σειρές *Taylor* με *κέντρο μηδέν* ως εξής:

$$f(x)=\sin x \Rightarrow f(0)=\sin 0=0,$$
$$f'(x)=(\sin x)'=\cos x \Rightarrow f'(0)=\cos 0=1,$$
$$f''(x)=(\cos x)'=-\sin x \Rightarrow f''(0)=-\sin 0=0,$$
$$f'''(x)=(-\sin x)'=-\cos x \Rightarrow f'''(0)=-\cos 0=-1,$$
$$\ldots$$
$$f^{(n)}(0)=\begin{cases} 0, & n=2k \\ (-1)^k, & n=2k+1 \end{cases}$$

$$g(x)=\cos x \Rightarrow g(0)=\cos 0=1,$$
$$g'(x)=(\cos x)'=-\sin x \Rightarrow g'(0)=-\sin 0=0$$
$$g''(x)=(-\sin x)'=-\cos x \Rightarrow g''(0)=-\cos 0=-1$$
$$g'''(x)=(-\cos x)'=\sin x \Rightarrow g'''(0)=\sin 0=0$$
$$g^{(n)}(0)=\begin{cases} (-1)^k, & n=2k \\ 0, & n=2k+1 \end{cases}$$

Έτσι, αντικαθιστώντας στον γενικό τύπο (4.1.1), έχουμε:

$$\sin x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1} = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots,\quad x\in\mathbb{R},$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot x^{2k} = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots,\quad x\in\mathbb{R}.$$

4.2.4. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

Το ανάπτυγμα Maclaurin της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$, $|x|<1$, μας δίνει την εναλλάσσουσα γεωμετρική σειρά δυνάμεων του x:

$$f(x)=\frac{1}{1+x}\Rightarrow f(0)=1$$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{1+x}\right)'=\frac{-1}{(1+x)^2}\Rightarrow f'(0)=-1$$

$$f''(x)=\left(\frac{-1}{(1+x)^2}\right)'=\frac{2}{(1+x)^3}\Rightarrow f''(0)=2$$

$$f'''(x)=\left(\frac{2}{(1+x)^3}\right)'=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4}\Rightarrow f'''(0)=-2\cdot 3$$

$$f^{(4)}(x)=\left(\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4}\right)'=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5}\Rightarrow f^{(4)}(0)=2\cdot 3\cdot 4$$

$$\ldots$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}\Rightarrow f^{(n)}(0)=(-1)^n n!$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot(x-0)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot n!}{n!}\cdot x^n \Rightarrow$$
$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot x^n=1-x+x^2-x^3+\ldots,\quad |x|<1.$$

4.2.5. Η διωνυμική σειρά.

Γενίκευση της προηγούμενης περίπτωσης αποτελεί το ανάπτυγμα της συνάρτησης $f(x)=(1+x)^a,\ a\in\mathbb{R}$:

$$f(x)=(1+x)^a \Rightarrow f(0)=1,$$
$$f'(x)=\left((1+x)^a\right)'=a\cdot(1+x)^{a-1}\Rightarrow f'(0)=a,$$
$$f''(x)=\left(a\cdot(1+x)^{a-1}\right)'=a\cdot(a-1)\cdot(1+x)^{a-2}\Rightarrow f''(0)=a\cdot(a-1),$$
$$\ldots$$
$$f^{(n)}(x)=a\cdot(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)\cdot(1+x)^{a-n}\Rightarrow f^{(n)}(0)=a\cdot(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1).$$

Επομένως,

$$(1+x)^a=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a\cdot(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-n+1)}{n!}\cdot x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{a}{n}\cdot x^n,\quad |x|<1.$$

Πρέπει βέβαια εδώ να σημειωθεί ότι τυπικά απαιτείται η απόδειξη της γενικής σχέσης για την $f^{(n)}(x)$ επαγωγικά σε κάθε περίπτωση, όπως έγινε στην 4.2.2, πέρα από την «υπολογιστική» διαπίστωσή της.

4.3. Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor τυχούσας συνάρτησης.

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της προηγούμενης Ενότητας θα δώσουμε εδώ δύο παραδείγματα τεχνικών υπολογισμού αναπτυγμάτων Taylor πιο σύνθετων συναρτήσεων. Οι περιπτώσεις αυτές είναι χαρακτηριστικές του τρόπου που εργαζόμαστε για να αναπτύξουμε σε σειρά Taylor οποιαδήποτε συνάρτηση: Προσπαθούμε να τη γράψουμε ως συνδυασμό ή σύνθεση των στοιχειωδών συναρτήσεων που είδαμε παραπάνω ώστε να χρησιμοποιήσουμε τα αναπτύγματά τους. Πολλά ανάλογα επεξεργασμένα παραδείγματα ακολουθούν στο τέλος της παραγράφου.

4.3.1. **Υπολογισμός σειράς Taylor με συνδυασμό ή σύνθεση των αναπτυγμάτων των στοιχειωδών συναρτήσεων**.

❖ ***Οι συναρτήσεις υπερβολικού ημιτόνου και συνημιτόνου***.

Με την βοήθεια του αναπτύγματος της εκθετικής συνάρτησης (4.2.1) αναπτύσσουμε άμεσα σε σειρές Taylor και τις υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\cdot e^x - \frac{1}{2}\cdot e^{-x} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot x^n - \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot(-x)^n \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1-(-1)^n)}{2n!}\cdot x^n \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1} = x + \frac{1}{3!}\cdot x^3 + \frac{1}{5!}\cdot x^5 + \ldots\end{aligned}$$

κι αυτό γιατί $\frac{(1-(-1)^n)}{2n!} = \begin{cases} \frac{2}{2n!} = \frac{1}{n!} = \frac{1}{(2k+1)!},\ \alpha\nu\ n = 2k+1 \\ \frac{0}{2n!} = 0,\ \alpha\nu\ n = 2k \end{cases}$

Ανάλογα υπολογίζεται και το ανάπτυγμα του υπερβολικού συνημιτόνου:

$$\begin{aligned}\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\cdot e^x + \frac{1}{2}\cdot e^{-x} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot x^n + \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot(-x)^n \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+(-1)^n)}{2n!}\cdot x^n = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k)!}\cdot x^{2k} = 1 + \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{4!}\cdot x^4 + \ldots\end{aligned}$$

Τα αναπτύγματα αυτά ισχύουν για κάθε x πραγματικό αριθμό.

❖ ***Η συνάρτηση*** $\frac{1}{1-x}$.

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα (4.2.4) έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= \frac{1}{1+(-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot(-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{2n}\cdot x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots,\quad |x| < 1.\end{aligned}$$

4.4. Εφαρμογές.

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε κάποιες από τις βασικότερες εφαρμογές/δυνατότητες που αποκτάμε με την χρήση των αναπτυγμάτων Taylor.

4.4.1. Υπολογισμός απροσδιόριστων μορφών ορίων.

Οι σειρές Taylor χρησιμοποιούνται συχνά για τον υπολογισμό ορίων απροσδιορίστων μορφών. Πιο συγκεκριμένα, εάν $P(x)$, $Q(x)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις και $\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}$, μπορούμε να αναλύσουμε τον αριθμητή και παρανομαστή σε σειρές Taylor κέντρου x_0 και να υπολογίσουμε τα ζητούμενα όρια ***μετά από απλοποιήσεις των κοινών παραγόντων* που θα εμφανιστούν** οι οποίες θα άρουν την απροσδιοριστία.

Παράδειγμα. *Να υπολογιστεί το όριο* $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}$.

Το ανάπτυγμα Taylor (κέντρου 0) του αριθμητή είναι:

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots$$

και άρα το όριο γίνεται

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \ldots\right) \;=\; \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^8}{5!} - \ldots\right) \;=\; 1.$$

4.4.2. Προσεγγιστικοί υπολογισμοί.

Η προσέγγιση συναρτήσεων από πολυώνυμα Taylor μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως βάση για τον προσεγγιστικό υπολογισμό παραστάσεων που προκύπτουν από μη πολυωνυμικές συναρτήσεις.

Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι θέλουμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά την τιμή του **e**. Είναι προφανές ότι αυτή προκύπτει ως η τιμή της (μη πολυωνυμικής) συνάρτησης $f(x)=e^x$ στην θέση $x=1$. Χρησιμοποιώντας έτσι το ανάπτυγμα Taylor της εκθετικής συνάρτησεις (βλ. και 4.2.1)

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot x^n = 1 + x + \frac{1}{2!}\cdot x^2 + \frac{1}{3!}\cdot x^3 + \frac{1}{4!}\cdot x^4 + \ldots$$

έχουμε, αντικαθιστώντας όπου $x=1$:

Προσέγγιση με πολυώνυμο 1ης τάξης: $1 + x \to 1 + 1 = 2$

Προσέγγιση με πολυώνυμο 2ης τάξης: $1 + x + \frac{1}{2!}\cdot x^2 \to 1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot 1^2 = 2{,}5$

Προσέγγιση με πολυώνυμο 3ης τάξης: $1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot 1^2 + \frac{1}{3!}\cdot 1^3 = 2.666666$

Προσέγγιση με πολυώνυμο 4ης τάξης: $1+1+\frac{1}{2!}\cdot 1^2+\frac{1}{3!}\cdot 1^3+\frac{1}{4!}\cdot 1^4=2.70833$

Προσέγγιση με πολυώνυμο 5ης τάξης: $1+1+\frac{1}{2!}\cdot 1^2+\frac{1}{3!}\cdot 1^3+\frac{1}{4!}\cdot 1^4+\frac{1}{5!}\cdot 1^5=2.716666$

Προσέγγιση με πολυώνυμο 6ης τάξης: $1+1+\frac{1}{2!}\cdot 1^2+\frac{1}{3!}\cdot 1^3+\frac{1}{4!}\cdot 1^4+\frac{1}{5!}\cdot 1^5+\frac{1}{6!}\cdot 1^6=2.718055$

κλπ.

Αν θέλαμε λοιπόν στον προηγούμενο προσεγγιστικό υπολογισμό μας ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων θα μπορούσαμε να σταματήσουμε στο πολυώνυμο 5^{ης} τάξης αφού αυτό και το επόμενο (6^{ης} τάξης) δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα στα πρώτα 2 δεκαδικά ψηφία.

4.4.3. Υπολογισμός Ολοκληρωμάτων.

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

Αν $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ *είναι δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης r, τότε*

για κάθε α, β $\in (x_0-r,\, x_0+r)$ *ισχύει* $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta a_n(x-x_0)^n dx\right)$,

μπορούμε να υπολογίζουμε ορισμένα ολοκληρώματα μη πολυωνυμικών συναρτήσεων χρησιμοποιώντας τα αντίστοιχα αναπτύγματα Taylor.

Παράδειγμα. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα* $\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x}dx$*, χρησιμοποιώντας την κατάλληλη δυναμοσειρά για το cosx με κέντρο* $x_0=0$*. Μέχρι ποιας τάξης όρους πρέπει να κρατήσουμε για να μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι βρήκαμε το αποτέλεσμα με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων;*

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του συνημιτόνου $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-...$, υπολογίζουμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα:

$$I=\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x}dx=\int_0^1 \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\frac{x^8}{8!}...\right)dx=\int_0^1\left(\frac{x}{2!}-\frac{x^3}{4!}+\frac{x^5}{6!}-\frac{x^7}{8!}...\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}\right)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}\int_0^1 x^{2n-1}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n)!}=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{96}+\frac{1}{4320}-\frac{1}{322560}+....$$

Το αποτέλεσμα, κρατώντας στο ανάπτυγμα του συνημιτόνου όρους μέχρι και 8^{ης} τάξης, είναι:

$I_8 = 0.239811714$

Αν σταματούσαμε όμως σε όρους 6ης τάξης θα παίρναμε την εκτίμηση $I_6 = 0.2398148$, η οποία είναι ακριβής όσον αφορά στα 5 πρώτα δεκαδικά ψηφία αφού ο όρος 8ης τάξης αφαιρεί ποσότητα που είναι περίπου .000003.

<u>Άλλα Παραδείγματα – Λυμένες Ασκήσεις.</u>

1. *Δώστε το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor για την συνάρτηση* $\frac{1}{1-x^2}$ *γύρω από το 0.*

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} \ , \ |x| < 1.$$

1. *Να υπολογίσετε προσεγγιστικά την ποσότητα* $\sqrt{1.01}$ *με ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων.*

Η ζητούμενη ποσότητα είναι ίση με την τιμή της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x+1}$ στο σημείο x=0.01. Αναπτύσσουμε, επομένως, πρώτα την f(x) σε σειρά Taylor με κέντρο το σημείο x_0=0:

$$f(x) = \sqrt{x+1} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \qquad f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x+1}^3} \qquad f''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x+1}^5} \qquad f'''(0) = \frac{3}{8}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16\sqrt{x+1}^7} \qquad f^{(4)}(0) = -\frac{15}{16}$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ... =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2!} + \frac{3}{8}\cdot\frac{x^3}{3!} - \frac{15}{16}\cdot\frac{x^4}{4!} + ...$$

Αντικαθιστώντας x=0.01 στην προηγούμενη σχέση βρίσκουμε τις εξής προσεγγίσεις για την τετραγωνική ρίζα του 1.01:

Προσέγγιση με πολυώνυμο 1ης τάξης: $1 + \frac{x}{2} = 1 + \frac{0,01}{2} = 1,005$

Προσέγγιση με πολυώνυμο 2ης τάξης: $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} = 1 + \frac{0,01}{2} - \frac{0,01^2}{8} = 1,0049875$

Προσέγγιση με πολυώνυμο 3ης τάξης: $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{3x^3}{48} = 1 + \frac{0,01}{2} - \frac{(0,01)^2}{8} + \frac{3(0,01)^3}{48} = 1,004987562$

κλπ.

Είναι φανερό επίσης ότι ακρίβεια 6 δεκαδικών ψηφίων επιτυγχάνουμε αν σταματήσουμε στο πολυώνυμο $2^{ης}$ τάξης αφού αυτό και το επόμενο ($3^{ης}$ τάξης) δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα στα πρώτα 6 δεκαδικά ψηφία.

3. *(α) Αναπτύξτε σε σειρά Taylor την συνάρτηση $f(x)=\sin(x)$ με κέντρο το 0, μέχρι και τον όρο x^5. Στη συνέχεια, μετατρέψτε τις 46^o σε ακτίνια και υπολογίστε την ποσότητα $\sin(46^0)$, χρησιμοποιώντας $\pi = 3.14159$.*

(β) Επαναλάβετε τα παραπάνω, αναπτύσσοντας την ίδια συνάρτηση σε σειρά με κέντρο το $\frac{\pi}{4}$, μέχρι και τον όρο $(x-\frac{\pi}{4})^2$. Ποιός από τους δύο τρόπους υπολογισμού είναι ακριβέστερος και ταχύτερος, αν συγκριθεί με την «ακριβή» τιμή που σας δίνει ένας απλός υπολογιστής «τσέπης»;

(α) Σύμφωνα με όσα αναφέραμε στην παράγραφο 4.2.3, το ανάπτυγμα Taylor της f(x)=sinx με κέντρο το μηδέν είναι $\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$. Έτσι, αν κρατήσουμε όρους μέχρι και τάξεως 5, έχουμε την προσέγγιση:

$$\sin x = x - \tfrac{1}{6} x^3 + \tfrac{1}{120} x^5 .$$

Αντικαθιστώντας τώρα, όπου x την ποσότητα $46^o = \frac{46\pi}{180} \cong 0{,}80285$, και χρησιμοποιώντας την τιμή του π, που μας δίνει η άσκηση βρίσκουμε:

$$\sin 46^o = 0.719382 .$$

(β) Ο τύπος της σειράς με κέντρο το $x_0 = \pi/4$ είναι $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\pi/4)}{n!}(x-\frac{\pi}{4})^n$. Υπολογίζουμε τις επιμέρους ποσότητες:

$f(\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f'(\frac{\pi}{4}) = (\sin x)'_{x=\frac{\pi}{4}} = (\cos x)_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f''(\frac{\pi}{4}) = (\cos x)'_{x=\frac{\pi}{4}} = -(\sin x)_{x=\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Επομένως, η σειρά γίνεται

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + ...$$

Αντικαθιστώντας τώρα, όπου x την ποσότητα $46^o = \frac{46\pi}{180}$ και χρησιμοποιώντας την τιμή του π, που μας δίνει η άσκηση βρίσκουμε: $\sin 46^o = 0.71934$. Η ακριβής τιμή, που δίνει ένας υπολογιστής τσέπης είναι: $\sin 46^o = 0.71934$, συνεπώς η δεύτερη μέθοδος είναι ακριβέστερη και γρηγορότερη.

4. *Χρησιμοποιώντας τα αναπτύγματα των εμπλεκόμενων συναρτήσεων σε σειρές Maclaurin, υπολογίστε το όριο* $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

Το ανάπτυγμα Maclaurin του αριθμητή και του παρονομαστή είναι:

$$e^x - e^{-x} = 2x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{60} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots$$

και το όριο γίνεται

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{60} + \cdots}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots} = \lim_{x\to 0}\frac{2 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{60} + \cdots}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots} = \frac{2+0+0+\cdots}{1-0+0+\cdots} = 2$$

5. *Αναλύστε την συνάρτηση* $y(x) = e^{-x}$ *σε σειρά Taylor με κέντρο* $x_0 = 1$*, μέχρι και τον* $(x-1)^3$ *όρο και υπολογίστε προσεγγιστικά το ορισμένο ολοκλήρωμα* $\int_1^2 \frac{e^{-x}}{x}dx$*. Πόσο διαφορετικό θα ήταν το αποτέλεσμα αν είχατε κρατήσει και όρους 4ου βαθμού; Θεωρείτε επιτυχή τη προσέγγιση μέχρι τον όρο* $(x-1)^3$*;*

Το ζητούμενο ανάπτυγμα γράφεται:

$$e^{-x} = e^{-1} - e^{-1}(x-1) + \frac{1}{2!}e^{-1}(x-1)^2 - \frac{1}{3!}e^{-1}(x-1)^3 + \frac{1}{4!}e^{-1}(x-1)^4 \ldots$$

Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα και κάνοντας τις πράξεις έχουμε:

$$I = \int_1^2 \frac{e^{-x}}{x}dx = \int_1^2 \frac{e^{-1}}{x}\left(1-(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2!}-\frac{(x-1)^3}{3!}+\frac{(x-1)^4}{4!}\right)dx$$

$$= \int_1^2 dx\, e^{-1}\left(\frac{-5}{2}+\frac{8}{3x}+x-\frac{x^2}{6}+\left[\frac{x^3}{24}-\frac{4x^2}{24}+\frac{6x}{24}-\frac{4}{24}+\frac{1}{24x}\right]\right),$$

όπου σε τετράγωνες παρενθέσεις έχουμε συμπεριλάβει τους όρους 4ης τάξης του αναπτύγματος.

Υπολογίζοντας τα επί μέρους ολοκληρώματα μέχρι όρους 3ης τάξης βρίσκουμε το αποτέλεσμα:

$$\mathrm{I}_3 = e^{-1}\left(\frac{-5}{2}+\frac{8}{3}\ln 2+\frac{3}{2}-\frac{7}{18}\right) = .4595\, e^{-1} \cong 0.16904$$

Αν συμπεριλαμβάναμε και τους όρους 4ης τάξης θα βρίσκαμε:

$$\mathrm{I}_4 = e^{-1}\left(\frac{-16}{6}+\frac{65}{24}\ln 2+\frac{15}{8}-\frac{7}{9}+\frac{15}{96}\right) = .4641\, e^{-1} \cong 0.17073$$

Από το γεγονός ότι τα 2 αυτά αποτελέσματα έχουν μικρή διαφορά, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι βρίσκονται κοντά στη σωστή απάντηση.

6. *Έστω ότι για μία συνάρτηση* $y = f(x)$ *δίνεται ότι:*

$$f(1)=1\,,\quad f'(1)=\frac{1}{2}\,,\quad f''(1)=\frac{1}{2}\quad ,\; f'''(1)=\frac{3}{4},\;\; .....,\; f^{(n)}(1)=\frac{n!}{2^n}\;.$$

Να γραφεί η σειρά Taylor της συνάρτησης αυτής γύρω από το x = 1. Για ποιές τιμές του x συγκλίνει αυτή η σειρά; Ποιά είναι η τιμή της f στο μηδέν;

Χρησιμοποιώντας τον γενικό τύπο $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n$ στην θέση *a=1*, έχουμε:

$$f(x)=\frac{f(1)}{0!}\cdot(x-1)^0+\frac{f'(1)}{1!}\cdot(x-1)^1+\frac{f''(1)}{2!}\cdot(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}\cdot(x-1)^3+...+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}\cdot(x-1)^n+...=$$

$$=\frac{1}{1}\cdot(x-1)^0+\frac{1/2}{1!}\cdot(x-1)^1+\frac{1/2}{2!}\cdot(x-1)^2+\frac{3/4}{3!}\cdot(x-1)^3+...+\frac{n!/2^n}{n!}\cdot(x-1)^n+...=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!/2^n}{n!}\cdot(x-1)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\cdot(x-1)^n.$$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο της ρίζας μπορούμε να προσδιορίσουμε το διάστημα σύγκλισης της σειράς αυτής. Συγκεκριμένα, για να συγκλίνει η σειρά αρκεί να ισχύει ότι:

$$\lim\left(\sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n}\cdot(x-1)^n\right|}\right)<1\Leftrightarrow\lim\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}\right)\cdot|x-1|<1\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot|x-1|<1\Leftrightarrow|x-1|<2$$
$$\Leftrightarrow -2<x-1<2\Leftrightarrow -1<x<3.$$

Εκτός του διαστήματος (-1,3) η σειρά δεν συγκλίνει, αφού τότε $\lim\left(\sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n}\cdot(x-1)^n\right|}\right)>1$, όπως δεν συγκλίνει και στα άκρα του διαστήματος αφού :

Για x=3 η σειρά γίνεται $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\cdot(3-1)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}1=+\infty$

ενώ για x=-1 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\cdot(-1-1)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$ η οποία κυμαίνεται.

Τέλος, δεδομένου ότι το σημείο x=0 περιλαμβάνεται στο διάστημα σύγκλισης της σειράς, η ζητούμενη τιμή f(0) υπολογίζεται ως εξής:

$$f(0)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\cdot(0-1)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}.$$

<u>Ασκήσεις.</u>

1. Αναπτύξτε σε σειρά Taylor με κέντρο μηδέν την συνάρτηση $f(x)=(x^2+x)e^x$ και αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}=2e$.

2. Υπολογίστε προσεγγιστικά τις τιμές:

i. 1/e με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων (Απάντηση: 0.36788)

ii. $\sin 62^{o}$ με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων (Απάντηση: 0.88295)

iii. ln(0.97) με ακρίβεια 7 δεκαδικών ψηφίων (Απάντηση: -0.0304592)

iv. $\tan 31^{o}$ με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων (Απάντηση: 0.6009)

3. Πόσους όρους από το ανάπτυγμα Taylor, κέντρου 0, του ln(1+x) πρέπει να κρατήσουμε ώστε να υπολογίσουμε το ln(1.02) με σφάλμα μικρότερο του 0.00000005;

4. Χρησιμοποιώντας δυναμοσειρές δείξτε ότι:

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{\sin x}}{x^{3}}=\dfrac{1}{6}$ **(ii)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cosh x-\cos x}{\sinh x-\sin x}=+\infty$

5. Δείξτε ότι:

i. $\int_{0}^{1}\cos(\sqrt{x})dx\cong 0.76355$

ii. $\int_{0}^{1/2}\dfrac{1}{1+x^{4}}dx\cong 0.4940$

iii. $\int_{0}^{1}\dfrac{\sin x}{x}dx\cong 0.946083$