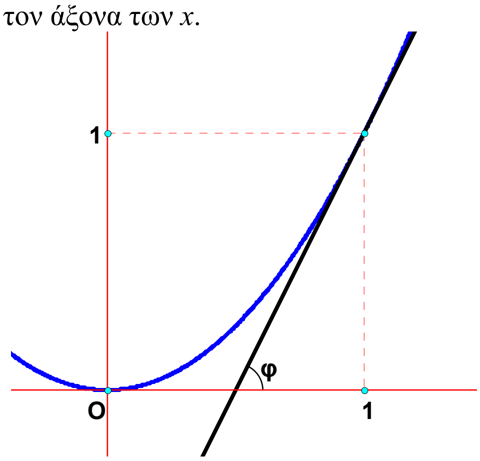
Κεφάλαιο 5

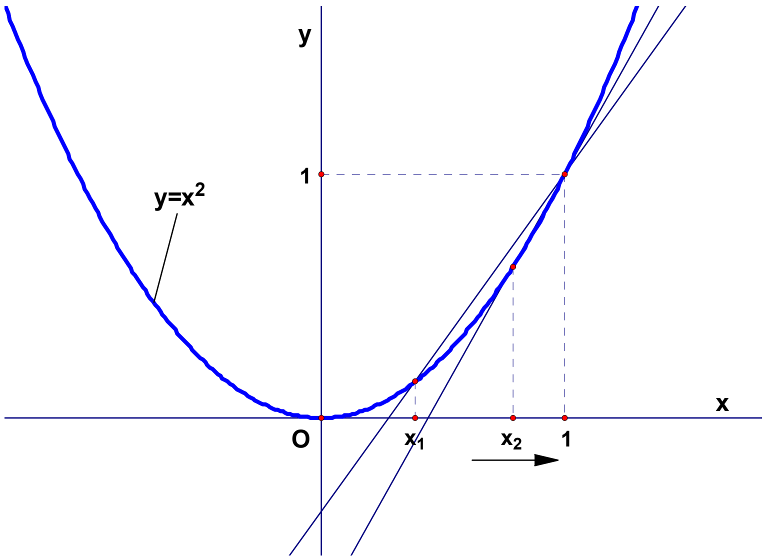
Όριο και συνέχεια συνάρτησης

5.1 Όριο συνάρτησης για $x \to x_0 \in \mathbb{R}$

Θεωρούμε την παραβολή $y = x^2$. Θέλουμε να προσδιορίσουμε την κλίση της εφαπτομένης της στο σημείο (1, 1). Δηλαδή, θέλουμε να βρούμε την εφαπτομένη της γωνίας φ που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τον άξονα των x.



Δυστυχώς γνωρίζουμε ένα μόνο σημείο της ευθείας αυτής, το (1, 1). Η δυσκολία αυτή παρακάμπτεται με το να θεωρήσουμε, αντί της εφαπτομένης, ευθείες που τέμνουν την καμπύλη και σ' ένα άλλο σημείο (x, x^2), κοντά στο (1, 1).



Η κλίση τώρα μιας τέμνουσας που περνάει από τα σημεία (1, 1) και (x, x^2) είναι ίση με $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$. **Παρατηρούμε ότι $x \neq 1$.**

Δίνοντας στο x διαδοχικές τιμές $x_1, x_2, \ldots$, ολοένα πιο κοντά στο 1, παρατηρούμε ότι η τέμνουσα ευθεία πλησιάζει όλο και περισσότερο τη θέση της εφαπτομένης και η τιμή του κλάσματος πλησιάζει στην τιμή $1+1=2$. Επομένως η κλίση της εφαπτομένης ευθείας πρέπει να είναι ίση με 2. Γράφουμε

$$\tan\varphi = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2 .$$

Τώρα είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας (εφόσον γνωρίζουμε ότι περνά από το σημείο (1, 1) και ότι η κλίση της είναι 2). Η εξίσωση είναι:

$$y-1 = 2\cdot(x-1) \Leftrightarrow y = 2x-1$$

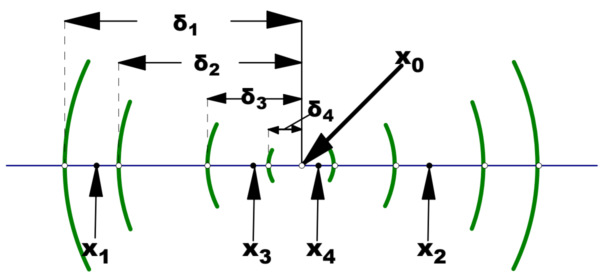
Προβλήματα όπως το προηγούμενο μας οδηγούν στην έννοια **του ορίου μιας συνάρτησης**. Αλλά, ας ξεκαθαρίσουμε πρώτα ένα λεπτό σημείο: Το σημείο στο οποίο τείνει η μεταβλητή x πρέπει να «γειτονεύει», όσο κοντά θέλουμε, με σημεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης. Έτσι, αποκτά έννοια ο συμβολισμός $x \to x_0$.

Συνήθως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης περιέχει ένα σύνολο της μορφής $(x_0-\delta, x_0)$ ή $(x_0, x_0+\delta)$ ή $(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$, όπου $\delta>0$, οπότε το x_0 βρίσκεται όσο κοντά θέλουμε σε σημεία του πεδίου ορισμού.

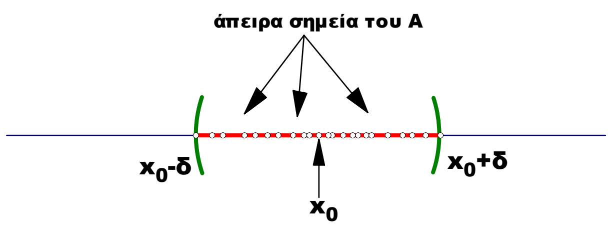
Απαιτούμε δηλαδή, για οποιαδήποτε $\delta>0$, να υπάρχει κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού A που ανήκει στο σύνολο $(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$, δηλαδή «κοντά» στο x_0 (και που δεν είναι το x_0).

5.1.1 Ορισμός

*Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$. Ένας αριθμός x_0 λέγεται **σημείο συσσωρεύσεως του A** αν, για κάθε $\delta>0$, το σύνολο $((x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta))\cap A$ είναι μη κενό.*



*[Η ιδιότητα αυτή του σημείου συσσωρεύσεως έχει ως αποτέλεσμα να συσσωρεύονται σε κάθε περιοχή $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ του σημείου x_0 **άπειρα** σημεία του A.



Η εισαγωγή του παραπάνω, μάλλον γενικού ορισμού, έγινε για να αντιμετωπιστούν όλες οι επιμέρους περιπτώσεις κατά ενιαίο τρόπο.]

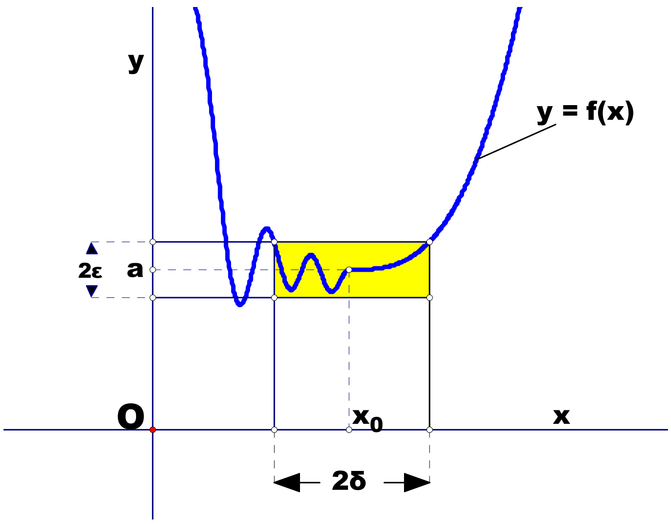
Σε αντιστοιχία με τον εψιλοντικό ορισμό του ορίου για τις ακολουθίες έχουμε:

5.1.2 Ορισμός

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. *Αν* x_0 *είναι σημείο συσσωρεύσεως του A, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f* ***συγκλίνει*** *για* $x \to x_0$ *στον πραγματικό αριθμό a αν, για κάθε* $\varepsilon > 0$ *(οσοδήποτε μικρό) υπάρχει* $\delta > 0$ *με την ιδιότητα:*

$$\text{Αν } x \in A \text{ και } x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \text{ τότε } |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Ο αριθμός a λέγεται ***όριο της f*** *για* $x \to x_0$.



5.1.3 Παρατήρηση

(i) Η σχέση $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ είναι ισοδύναμη με την αλγεβρική σχέση $0 < |x - x_0| < \delta$.

(ii) Το x στον ορισμό του ορίου **δεν είναι ποτέ ίσο** με x_0, γιατί σε μια τέτοια περίπτωση θα μπορούσε να μην έχει έννοια η ποσότητα $f(x)$. (Δείτε το προηγούμενο παράδειγμα, όπου $x \neq 1$). Γι' αυτό και απαιτούμε $0 < |x - x_0|$. Όπως μάλιστα θα δούμε στη συνέχεια, η συνάρτηση με τύπο $y = \dfrac{\sin x}{x}$ συγκλίνει στο 1, για $x \to 0$ και φυσικά, το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

Όπως και στις ακολουθίες, έτσι και δω, το όριο μιας συνάρτησης για $x \to x_0$, είναι μοναδικό.

5.1.4 Πρόταση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Έστω x_0 σημείο συσσωρεύσεως του Α. Αν η f συγκλίνει (για $x \to x_0$) ταυτόχρονα στους αριθμούς a_1 και a_2, τότε $a_1 = a_2$.

***Απόδειξη:** Έστω ότι $a_1 \neq a_2$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_1 < a_2$. Τότε, για $\varepsilon = \dfrac{a_2 - a_1}{2} > 0$, υπάρχουν θετικοί αριθμοί δ_1 και δ_2, τέτοιοι ώστε για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta_1$ και $0 < |x - x_0| < \delta_2$, να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις $|f(x) - a_1| < \varepsilon$ και $|f(x) - a_2| < \varepsilon$. Άρα, αν $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, θα έχουμε:

$$x \in A \text{ και } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a_1| < \varepsilon \text{ και } |f(x) - a_2| < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\varepsilon = |a_1 - a_2| \leq |f(x) - a_1| + |f(x) - a_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

δηλαδή $2\varepsilon < 2\varepsilon$, άτοπο. ■

Το μοναδικό αυτό όριο της συνάρτησης f (για $x \to x_0$) συμβολίζεται με $\boldsymbol{\lim_{x \to x_0} f(x)}$.

Η επόμενη πρόταση αναφέρεται στη διάταξη των ορίων.

5.1.5 Πρόταση

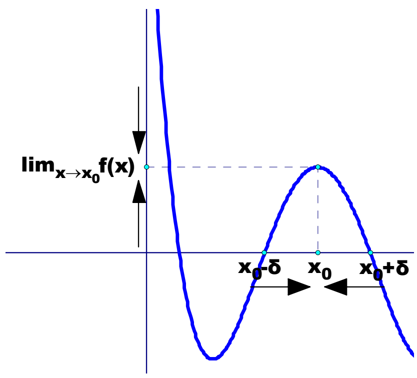
Θεωρούμε συναρτήσεις f και g με κοινό πεδίο ορισμού Α. Έστω x_0 σημείο συσσώρευσης του Α.

***(i)** Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε σημείο x του Α που ανήκει σε μια γειτονιά $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ του x_0, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) \geq 0$.*

***(ii)** Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε σημείο x του Α που ανήκει σε μια γειτονιά $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ του x_0, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) \geq \lim_{x \to x_0} g(x)$.*

***Απόδειξη:** Αποδεικνύουμε αρχικά το (i).

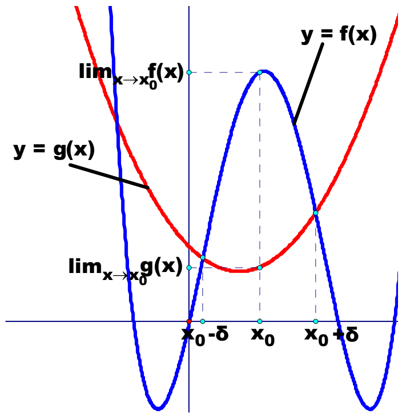
Θέτουμε $a = \lim_{x \to x_0} f(x)$. Υποθέτουμε ότι $a < 0$. Τότε, για $\varepsilon = -a > 0$, θα υπάρχει $\delta' > 0$ με την ιδιότητα: Για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta'$ ισχύει $|f(x) - a| < -a$.



Επομένως, αν $x \in A$ και $0 < |x - x_0| < \delta''$, όπου

$\delta'' = \min\{\delta, \delta'\} > 0$, τότε θα ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις: $f(x) \geq 0$ και $|f(x) - a| < -a \Rightarrow f(x) - a < -a$ $\Leftrightarrow f(x) < 0$, πράγμα άτοπο.

Παρατηρούμε ότι το (ii) προκύπτει από το (i) σε συνδυασμό με το (v) του επόμενου θεωρήματος, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f - g$. ■



Το επόμενο θεώρημα μας παρέχει τα (αλγεβρικά) εργαλεία για τον υπολογισμό ορίων διαφόρων συναρτήσεων. Ο αναγνώστης που δεν είναι εξοικειωμένος με την εψιλοντική διαδικασία μπορεί, σε μια πρώτη ανάγνωση, να παραλήψει την απόδειξη.

5.1.6 Θεώρημα

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f και g έχουν κοινό πεδίο ορισμού A. Τότε ισχύουν τα εξής:

i) $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$, *όπου* $c \in \mathbb{R}$.

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

iii) *Αν* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ *τότε* $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |a|$.

iv) *Αν* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}$, *τότε* $\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f(x)) = \lambda a$.

v) *Αν* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ *και* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, *τότε* $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$.

vi) *Αν* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ *και* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, *τότε* $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) g(x)) = a \cdot b$.

vii) *Αν* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, $g(x) \neq 0$ *για κάθε* $x \in A$ *και* $b \neq 0$, *τότε*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}.$$

viii) *Αν* $f(x) \geq 0$ *για κάθε* $x \in A$ *και* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, *τότε* $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{a}$.

Απόδειξη: Τα (i) και (ii) προκύπτουν άμεσα. Για το (iii) εφαρμόζουμε την ανισότητα $||f(x)| - |a|| \leq |f(x) - a|$.

Για το (iv) εξετάζουμε μόνον την περίπτωση $\lambda \neq 0$ καθώς, η περίπτωση $\lambda = 0$ είναι τετριμένη. Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$. Τότε και $\varepsilon' = \varepsilon / |\lambda| > 0$. Από τον ορισμό του ορίου προκύπτει ότι υπάρχει $\delta > 0$ με την ιδιότητα: Για κάθε $x \in A$, με $0 < |x - x_0| < \delta$, ισχύει $|f(x) - a| < \varepsilon' = \varepsilon / |\lambda|$, απ' όπου, $|\lambda f(x) - \lambda a| < \varepsilon$.

Για το (v) εφαρμόζουμε το (γνωστό από τις ακολουθίες) τέχνασμα του $\varepsilon/2$. Για $\varepsilon > 0$, υπάρχουν $\delta_1 > 0$ και $\delta_2 > 0$ με τις ιδιότητες: Για κάθε $x \in A$, με $0 < |x - x_0| < \delta_1$, και

$0<|x-x_0|<\delta_2$ (συνοπτικότερα, $x\in A$, με $0<|x-x_0|<\delta$, όπου $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$) ισχύουν οι σχέσεις:

$$|f(x)-a|<\varepsilon/2 \text{ και } |g(x)-b|<\varepsilon/2.$$

Από την τριγωνική ανισότητα προκύπτει: $|f(x)+g(x)-(a+b)|=|(f(x)-a)+(g(x)-b)|\leq |f(x)-a|+|g(x)-b|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$.

Για το $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))$ παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+(-g(x)))=$ $=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}(-g(x))$ και, από (iv), $\lim\limits_{x\to x_0}(-g(x))=-\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

*[Για το (vi) παρατηρούμε ότι $|f(x)g(x)-ab|=|f(x)g(x)-f(x)b+f(x)b-ab|\leq|f(x)|\,|g(x)-b|+|b|\,|f(x)-a|$.

Έστω $\varepsilon>0$. Θεωρούμε έναν άλλο θετικό αριθμό ε', που εξαρτάται από τον ε και τον οποίο θα προσδιορίσουμε στη συνέχεια.

Εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$, υπάρχει $\delta>0$ με την ιδιότητα: Για κάθε $x\in A$, με $0<|x-x_0|<\delta$, ισχύουν οι σχέσεις $|f(x)-a|<\varepsilon'$ και $|g(x)-b|<\varepsilon'$.

Επομένως, $|f(x)|-|a|\leq||f(x)|-|a||\leq|f(x)-a|<\varepsilon'$ και άρα, $|f(x)|<\varepsilon'+|a|$. Επομένως, $|f(x)g(x)-ab|\leq|f(x)|\,|g(x)-b|+|b|\,|f(x)-a|<(\varepsilon'+|a|)\varepsilon'+|b|\varepsilon'=(\varepsilon'+|a|+|b|)\varepsilon'$.

Αν λοιπόν $\varepsilon'=\min\{1,\frac{\varepsilon}{1+|a|+|b|}\}>0$, τότε $|f(x)g(x)-ab|<(\varepsilon'+|a|+|b|)\varepsilon'\underset{\varepsilon'\leq 1}{\leq}$ $(1+|a|+|b|)\varepsilon'\underset{\varepsilon'\leq\frac{\varepsilon}{1+|a|+|b|}}{\leq}(1+|a|+|b|)\frac{\varepsilon}{1+|a|+|b|}=\varepsilon$.

Για το (vii) παρατηρούμε ότι $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{a}{b}\right|=\frac{|bf(x)-ag(x)|}{|g(x)|\,|b|}$. Σύμφωνα με τα (iv) και (v), $\lim\limits_{x\to x_0}(bf(x)-ag(x))=0$. Έστω $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχει $\delta>0$ με την ιδιότητα: Για κάθε $x\in A$, με $0<|x-x_0|<\delta$, ισχύουν οι σχέσεις $|bf(x)-ag(x)|<\varepsilon|b|^2/2$ και $|g(x)-b|<|b|/2$. (Σημειώνουμε ότι ο αριθμός $|b|/2$ είναι θετικός).

Άρα $|b|-|g(x)|\leq||b|-|g(x)||\leq|b-g(x)|=|g(x)-b|<|b|/2$ και επομένως, $\frac{|b|}{2}<|g(x)|$, ήτοι $\frac{1}{|g(x)|}<\frac{2}{|b|}$. Άρα, $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{a}{b}\right|=\frac{|bf(x)-ag(x)|}{|g(x)|\,|b|}<\frac{2\varepsilon|b|^2}{2|b|^2}=\varepsilon$.

Για το (viii) αρχικά παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με το (i) της πρότασης 5.1.5, θα έχουμε $a\geq 0$ και επομένως ορίζεται η ρίζα $\sqrt[k]{a}$. Έστω $\varepsilon>0$.

Αν $a=0$, τότε, για $\varepsilon'=\varepsilon^k>0$, υπάρχει $\delta>0$ με την ιδιότητα: $0\leq f(x)<\varepsilon'=\varepsilon^k$ για κάθε $x\in A$, με $0<|x-x_0|<\delta$. Επομένως $\sqrt[k]{f(x)}<\varepsilon$.

Υποθέτουμε ότι $a>0$. Όπως στην απόδειξη του (vii) για την g, υπάρχει $\delta>0$ με $\frac{a}{2}<f(x)$ για κάθε $x\in A$, με $0<|x-x_0|<\delta$.

Επομένως, $\sum_{s=0}^{k-1}\sqrt[k]{(f(x))^s a^{k-1-s}} > \sum_{s=0}^{k-1}\sqrt[k]{2^{-s}a^{k-1}} > \sum_{s=0}^{k-1}\sqrt[k]{2^{-k}a^{k-1}} = \frac{k}{2}\sqrt[k]{a^{k-1}}$. Εφόσον $\frac{\varepsilon k\sqrt[k]{a^{k-1}}}{2}>0$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το δ είναι τέτοιο ώστε να ισχύει η επιπλέον σχέση $|f(x)-a|<\frac{\varepsilon k\sqrt[k]{a^{k-1}}}{2}$, για κάθε $x\in A$, με $0<|x-x_0|<\delta$.

Επομένως $|\sqrt[k]{f(x)}-\sqrt[k]{a}|=\frac{|f(x)-a|}{\sum_{s=0}^{k-1}\sqrt[k]{(f(x))^s a^{k-1-s}}}<\frac{\varepsilon k\sqrt[k]{a^{k-1}}}{2}\frac{1}{k\sqrt[k]{a^{k-1}}/2}=\varepsilon$ **]**. ■

Ας δούμε κάποιες εφαρμογές του παραπάνω θεωρήματος:

5.1.7 Παραδείγματα

1. Να υπολογιστούν τα όρια:

(i) $\lim_{x\to-1}(x^3-2x+1)$, **(ii)** $\lim_{x\to 2}\left(x-\sqrt{x^2-2x+4}\right)$

(iii) $\lim_{x\to-1}\left(|x^2+2x-2|-\sqrt{x^2+8}\right)$, **(iv)** $\lim_{x\to 0}\frac{|x^3-1|+\sqrt{x^2+x+1}}{2x-2}$

Λύση: (i) $\lim_{x\to-1}(x^3-2x+1)=\lim_{x\to-1}x^3-2\lim_{x\to-1}x+1=(-1)^3-2(-1)+1=2$.

(ii) $\lim_{x\to 2}\left(x-\sqrt{x^2-2x+4}\right)=\lim_{x\to 2}x-\sqrt{\lim_{x\to 2}(x^2-2x+4)}=2-\sqrt{2^2-2\cdot 2+4}=0$.

(iii) $\lim_{x\to-1}\left(|x^2+2x-2|-\sqrt{x^2+8}\right)=\lim_{x\to-1}|x^2+2x-2|-\lim_{x\to-1}\sqrt{x^2+8}=$

$=|\lim_{x\to-1}(x^2+2x-2)|-\sqrt{\lim_{x\to-1}(x^2+8)}=|(-1)^2+2(-1)-2|-\sqrt{(-1)^2+8}=3-3=0.$

(iv) $\lim_{x\to 0}\frac{|x^3-1|+\sqrt{x^2+x+1}}{2x-2}=\frac{\lim_{x\to 0}\left(|x^3-1|+\sqrt{x^2+x+1}\right)}{\lim_{x\to 0}(2x-2)}=\frac{|0^3-1|+\sqrt{0^2+0+1}}{2\cdot 0-2}=-1$.

Στο προηγούμενο παράδειγμα ο υπολογισμός των ορίων έγινε ουσιαστικά με απλή αντικατάσταση στη θέση του x της οριακής του τιμής x_0. Αυτό δεν είναι πάντοτε εφικτό, όπως στην περίπτωση κατά την οποία έχουμε ένα κλάσμα του οποίου ο παρονομαστής μηδενίζεται απ’ αυτή την οριακή τιμή. Εφαρμόζουμε τότε άλλες τεχνικές:

2. Να υπολογιστούν τα όρια:

(i) $\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x^3+8}$, **(ii)** $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$, **(iii)** $\lim_{x\to 1}\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{x-1}$,

(iv) $\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{x^2+x+10}-4}{x+3}$, **(v)** $\lim_{x\to 2}\frac{2x-1-\sqrt{x^2-3x+11}}{\sqrt{x^2+5}-3}$.

Λύση: (i) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x^3+8}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x-1}{x^2-2x+4}=$

$\dfrac{-2-1}{(-2)^2-2(-2)+4}=-\dfrac{3}{4}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3x-x+1}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x(x-1)-(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(3x-1)}{(x-1)(x-2)}=$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-1}{x-2}=\dfrac{3-1}{1-2}=-2$.

(iii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-x-nx+n}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x^n-1)-n(x-1)}{x-1}=$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x^n-1)}{x-1}-n=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}{x-1}-n=$

$\lim\limits_{x\to 1}(x(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1))-n=1\cdot\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{n\text{ φορές}}-n=n-n=0$.

(iv) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x^2+x+10}-4}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x+10}\right)^2-4^2}{(x+3)\left(\sqrt{x^2+x+10}+4\right)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x+10-16}{(x+3)\left(\sqrt{x^2+x+10}+4\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{(x+3)\left(\sqrt{x^2+x+10}+4\right)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+3)\left(\sqrt{x^2+x+10}+4\right)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+x+10}+4}=$

$=\dfrac{-3-2}{\sqrt{(-3)^2-3+10}+4}=\dfrac{-5}{4+4}=-\dfrac{5}{8}$.

(v) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2-3x+11}}{\sqrt{x^2+5}-3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)\left((2x-1)^2-\left(\sqrt{x^2-3x+11}\right)^2\right)}{\left(\left(\sqrt{x^2+5}\right)^2-9\right)\left(2x-1+\sqrt{x^2-3x+11}\right)}=$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)\left(4x^2-4x+1-x^2+3x-11\right)}{\left(x^2+5-9\right)\left(2x-1+\sqrt{x^2-3x+11}\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)\left(3x^2-x-10\right)}{\left(x^2-4\right)\left(2x-1+\sqrt{x^2-3x+11}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)(3x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)\left(2x-1+\sqrt{x^2-3x+11}\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)(3x+5)}{(x+2)\left(2x-1+\sqrt{x^2-3x+11}\right)}=$

$=\dfrac{\left(\sqrt{2^2+5}+3\right)(3\cdot 2+5)}{(2+2)\left(2\cdot 2-1+\sqrt{2^2-3\cdot 2+11}\right)}=\dfrac{11}{4}$.

3. Να υπολογιστούν τα $a,b\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2-ax+1}-bx}{x+1}=3$.

Λύση: Εφόσον $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2-ax+1}-bx}{x+1}=3$, τότε $\lim\limits_{x\to -1}\left(\sqrt{x^2-ax+1}-bx\right)=$

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2-ax+1}-bx}{x+1}\lim\limits_{x\to -1}(x+1)=3\cdot 0=0$. Άρα $\sqrt{(-1)^2+a+1}+b=0$, δηλαδή $b=-\sqrt{a+2}$.

Επομένως, $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2-ax+1}-bx}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2-ax+1}+x\sqrt{a+2}}{x+1}=$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{x^2 - ax + 1 - x^2(a+2)}{(x+1)\left(\sqrt{x^2 - ax + 1} - x\sqrt{a+2}\right)} = \lim_{x\to -1} \frac{-ax(x+1) - (x-1)(x+1)}{(x+1)\left(\sqrt{x^2 - ax + 1} - x\sqrt{a+2}\right)} =$$

$$= -\lim_{x\to -1} \frac{((a+1)x - 1)(x+1)}{(x+1)\left(\sqrt{x^2 - ax + 1} - x\sqrt{a+2}\right)} = -\lim_{x\to -1} \frac{(a+1)x - 1}{\sqrt{x^2 - ax + 1} - x\sqrt{a+2}} =$$

$$= -\frac{-a-1-1}{\sqrt{1+a+1} + \sqrt{a+2}} = \frac{a+2}{2\sqrt{a+2}} = \frac{\sqrt{a+2}}{2}.$$

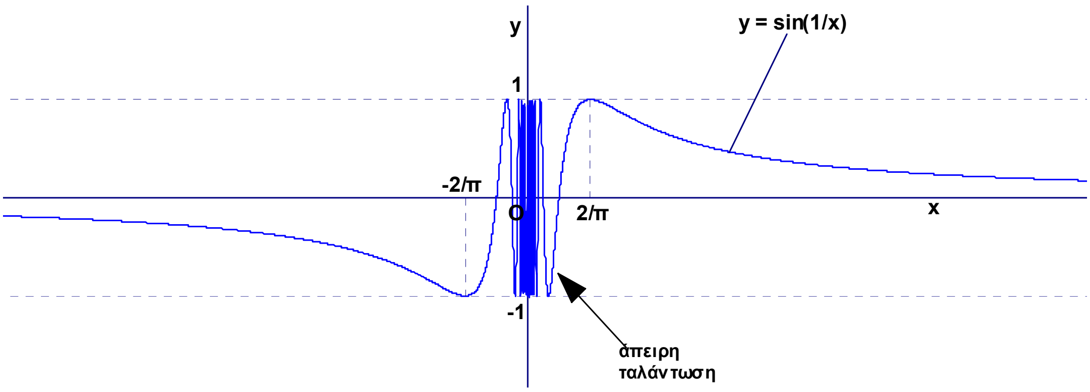
Θα πρέπει λοιπόν να έχουμε $\frac{\sqrt{a+2}}{2} = 3$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει $a = 34$ και επομένως, $b = -\sqrt{34+2} = -6$.

4. Δείξτε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

***Απόδειξη:** Αν υπήρχε το $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, έστω αυτό *a*, τότε για $\varepsilon = 1$, θα υπήρχε $\delta > 0$ με την ιδιότητα: $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right) - a\right| < 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $0 < |x| < \delta$.

Θεωρούμε τις ακολουθίες $a_n = \frac{2}{(4n-1)\pi}, n = 1,2,\ldots$ και $b_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$, $n = 1,2,\ldots$ Έχουμε, $\sin\left(\frac{1}{a_n}\right) = \sin\left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -1$ και $\sin\left(\frac{1}{b_n}\right) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Προφανώς $\lim a_n = \lim b_n = 0$. Επομένως υπάρχει n_0 με $|a_n| < \delta$ και $|b_n| < \delta$, για κάθε $n \geq n_0$.



Τότε θα είχαμε: $|-1-a| = \left|\sin\left(\frac{1}{a_n}\right) - a\right| < 1$ και $|1-a| = \left|\sin\left(\frac{1}{b_n}\right) - a\right| < 1$, για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $2 = |-1-1| = \left|-1-a-(1-a)\right| \leq |-1-a| + |1-a| < 1+1 = 2$, δηλαδή $2 < 2$, άτοπο.

Άλυτες ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα όρια: **(i)** $\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$, **(ii)** $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^4 - 4x + 3}$, **(iii)** $\lim_{x\to 0} \frac{(x+2)^3 - 8}{x}$,

(iv) $\lim_{x\to a} \frac{x^3 - a^3}{x^4 - a^4}$, $a > 0$.

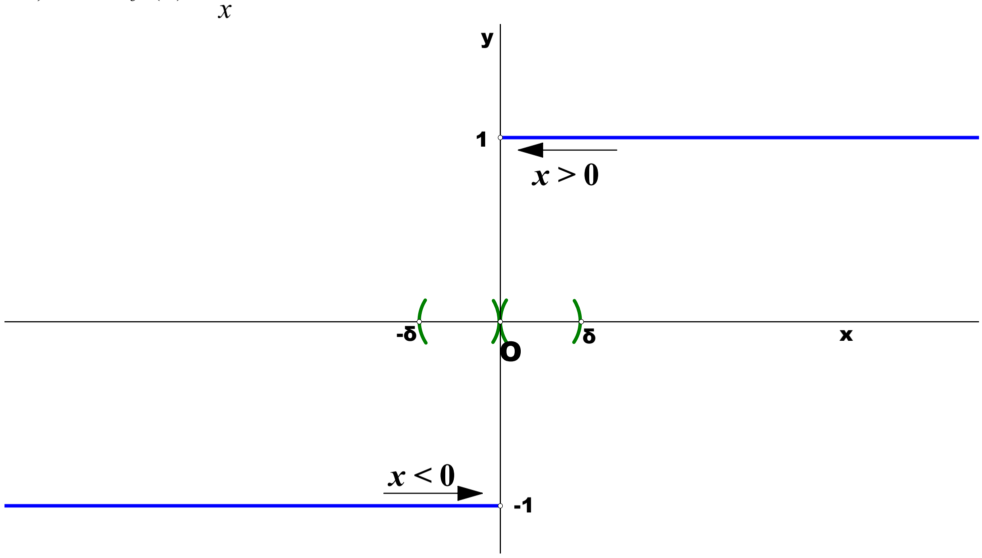
2. Να υπολογιστούν τα όρια: **(i)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x^2+7}-4}$, **(ii)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$, **(iii)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-3}-\sqrt{x^2-4x+3}}{\sqrt{x^2-9}}$.

3. Αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-x}{x^2-4}=3$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

4. Να υπολογιστούν τα $a,b\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{bx-1+\sqrt{ax^2-x-1}}{x+1}=0$.

Στη συνέχεια ασχολούμαστε με τα λεγόμενα **πλευρικά όρια**. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$. Η συνάρτηση αυτή δεν έχει όριο στο 0. Πράγματι, αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}=a\in\mathbb{R}$, τότε για $\varepsilon=1>0$, θα υπήρχε $\delta>0$ με την ιδιότητα $\left|\dfrac{|x|}{x}-a\right|<1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $0<|x|<\delta$.

Προφανώς $-\frac{1}{2}\delta\in(-\delta,0)$ και $\frac{1}{2}\delta\in(0,\delta)$. Αλλά, αν $x\in(-\delta,0)$ τότε $f(x)=\dfrac{-x}{x}=-1$ ενώ, αν $x\in(0,\delta)$, τότε $f(x)=\dfrac{x}{x}=1$.



Επομένως, $2=|-1-1|=|f(-\frac{1}{2}\delta)-f(\frac{1}{2}\delta)|=|(f(-\frac{1}{2}\delta)-a)+(f(\frac{1}{2}\delta)-a)|\le|f(-\frac{1}{2}\delta)-a|+|(f(\frac{1}{2}\delta)\ -f(\frac{1}{2}\delta)|<1+1=2$, δηλαδή 2<2, άτοπο.

Οι περιορισμοί $f_1:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$ και $f_2:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f_1(x)=\dfrac{|x|}{x}=-1$ και $f_2(x)=\dfrac{|x|}{x}=1$ έχουν όριο στο 0. Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x)=-1$ και $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)=1$.

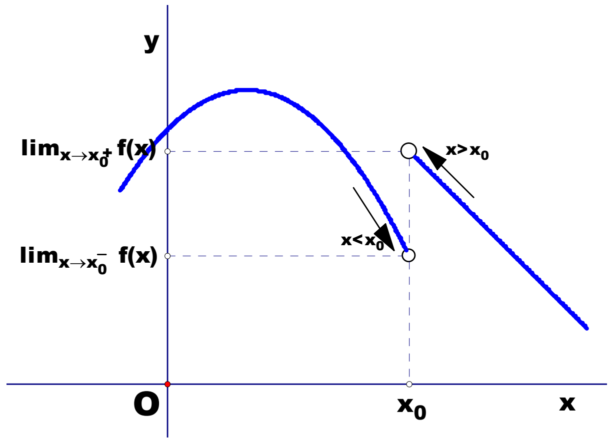
Το προηγούμενο παράδειγμα μας οδηγεί στον επόμενο ορισμό:

5.1.8 Ορισμός

Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ *μια συνάρτηση και* $x_0\in\mathbb{R}$.

i) *Υποθέτουμε ότι το* x_0 *είναι σημείο συσσωρεύσεως του συνόλου* $(-\infty, x_0) \cap A$. *Θα λέμε ότι η* f *συγκλίνει σ' έναν αριθμό* $a \in \mathbb{R}$ *για* $x \to x_0^-$ *(ή με τιμές μικρότερες του* x_0*) αν* $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = a$, *όπου* f_1 *ο περιορισμός της* f *στο σύνολο* $(-\infty, x_0) \cap A$. *Ισοδύναμα, για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *με την ιδιότητα:* $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$.

Συμβολίζουμε με $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ *τον αριθμό α.*



ii) *Υποθέτουμε ότι το* x_0 *είναι σημείο συσσωρεύσεως του συνόλου* $A \cap (x_0, +\infty)$. *Θα λέμε ότι η* f *συγκλίνει σ' έναν αριθμό* $a \in \mathbb{R}$ *για* $x \to x_0^+$ *(ή με τιμές μεγαλύτερες του* x_0*) αν* $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = a$, *όπου* f_2 *ο περιορισμός της* f *στο σύνολο* $A \cap (x_0, +\infty)$. *Ισοδύναμα, για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *με την ιδιότητα:* $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$.

Συμβολίζουμε με $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ *τον αριθμό α.*

5.1.9 Πρόταση

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ *μια συνάρτηση και* $x_0 \in \mathbb{R}$ *σημείο συσσωρεύσεως του A. Υποθέτουμε ότι τα πλευρικά όρια* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ *και* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ *υπάρχουν στο* $\mathbb{R}$.

Τότε το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *υπάρχει αν και μόνον αν* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$. *Στην περίπτωση αυτή, η κοινή τιμή των πλευρικών ορίων ισούται με το* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Απόδειξη: Προφανώς, αν το $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ υπάρχει, τότε $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$.

Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ και συμβολίζουμε με *a* την κοινή τιμή των πλευρικών ορίων.

Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a$, υπάρχει $\delta_1 > 0$ με την ιδιότητα: $|f(x) - a| < \varepsilon$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0)$. Ομοίως, υπάρχει $\delta_2 > 0$ με την ιδιότητα: $|f(x) - a| < \varepsilon$, για κάθε $x \in A \cap (x_0, x_0 + \delta)$. Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Τότε, για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ θα έχουμε $|f(x) - a| < \varepsilon$. ■

5.1.10 Παραδείγματα

1. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια: **i)** $\lim_{x\to -1} f(x)$ και **ii)** $\lim_{x\to 0} f(x)$, όπου $f(x)=\dfrac{|x^2-x-2|}{x^2-3x+2}$.

Λύση: Παρατηρούμε ότι $f(x)=\dfrac{|(x+1)(x-2)|}{(x-1)(x-2)}$. Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$. Επίσης, $(x+1)(x-2)\geq 0$ αν και μόνον αν $x\leq -1$ ή $x\geq 2$ και $(x+1)(x-2)<0$ αν και μόνον αν $-1<x<2$.

Συνεπώς, $f(x)=\dfrac{|(x+1)(x-2)|}{(x-1)(x-2)}=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1}, & \text{αν } x\leq -1 \text{ ή } x>2\\ -\dfrac{x+1}{x-1}, & \text{αν } -1<x<1 \text{ ή } 1<x<2\end{cases}$

Επομένως, $\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x-1}=0$ και $\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1}\left(-\dfrac{x+1}{x-1}\right)=0$. Άρα υπάρχει το $\lim_{x\to -1} f(x)$ και ισούται με μηδέν.

Ακόμη, $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2}\left(-\dfrac{x+1}{x-1}\right)=-3$ και $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x-1}=3$. Συνεπώς, δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 2} f(x)$.

2. Να βρεθεί (αν υπάρχει) το $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}-x+1}{2x^2-x-1}$.

Λύση: Παρατηρούμε ότι $x^2-2x+1=(x-1)^2$ και επομένως $\sqrt{x^2-2x+1}=|x-1|$. Η παράσταση λοιπόν $\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}-x+1}{2x^2-x-1}$ ισούται με $\dfrac{|x-1|-x+1}{2x^2-x-1}=\dfrac{|x-1|-x+1}{(x-1)(2x+1)}$.

Τώρα, αν $x<1$ τότε $\dfrac{|x-1|-x+1}{(x-1)(2x+1)}=\dfrac{-x+1-x+1}{(x-1)(2x+1)}=-\dfrac{2}{2x+1}$ ενώ, αν $x>1$ τότε $\dfrac{|x-1|-x+1}{(x-1)(2x+1)}=\dfrac{x-1-x+1}{(x-1)(2x+1)}=0$.

Συνεπώς, $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}-x+1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\left(-\dfrac{2}{2x+1}\right)=-\dfrac{2}{3}$ και $\lim_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}-x+1}{2x^2-x-1}=0$.

Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}-x+1}{2x^2-x-1}$.

3. Να προσδιοριστεί το $a\in\mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 1} f(x)$, όπου

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-\sqrt{x^2+3}}{x-1}+a^2x-1, & \text{αν } x<1\\ 2x^2-\dfrac{a}{2}, & \text{αν } x\geq 1\end{cases}$$

Λύση: Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{2x-\sqrt{x^2+3}}{x-1} + a^2x - 1\right) = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-\sqrt{x^2+3}}{x-1} +$
$+a^2-1$.

Αλλά, $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-\sqrt{x^2+3}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{4x^2-x^2-3}{(x-1)\left(2x+\sqrt{x^2+3}\right)} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3(x-1)(x+1)}{(x-1)\left(2x+\sqrt{x^2+3}\right)} =$
$= \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3(x+1)}{2x+\sqrt{x^2+3}} = \dfrac{6}{2+\sqrt{4}} = \dfrac{3}{2}$. Επομένως $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = a^2 + \dfrac{1}{2}$.

Ακόμη, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(2x^2 - \dfrac{a}{2}\right) = 2 - \dfrac{a}{2}$. Για να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ θα πρέπει $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, δηλαδή, $a^2 + \dfrac{1}{2} = 2 - \dfrac{a}{2} \Leftrightarrow 2a^2 + a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{-1\pm\sqrt{25}}{4} = \dfrac{-1\pm 5}{4} =$
$-\dfrac{3}{2}$ ή 1. Επομένως $a = -\dfrac{3}{2}$ ή $a = 1$.

Άλυτες ασκήσεις

1. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα όρια: **i)** $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ και **ii)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, όπου $f(x) = \dfrac{|x^2+x-6|}{x^2-4x+3}$.

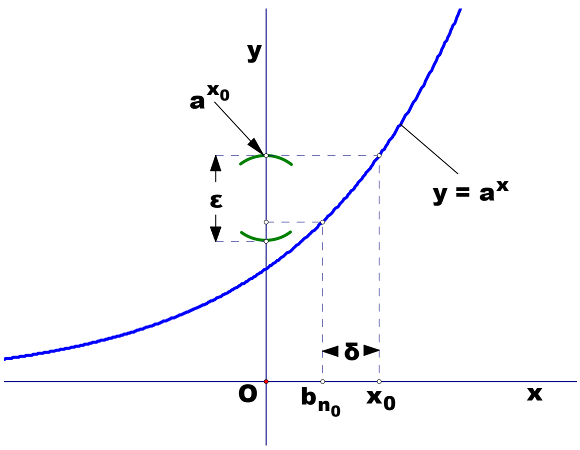
2. Να υπολογιστούν τα όρια: **(i)** $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x^2+x-2}$ και **(ii)** $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x^2+x-2}$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3}{x-5}, & \text{αν } x<3 \\ ax^2+5x, & \text{αν } x\geq 3 \end{cases}$.

Να βρεθεί η τιμή του a, ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

5.1.11 Πρόταση

Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$ *, όπου* $a>0$.

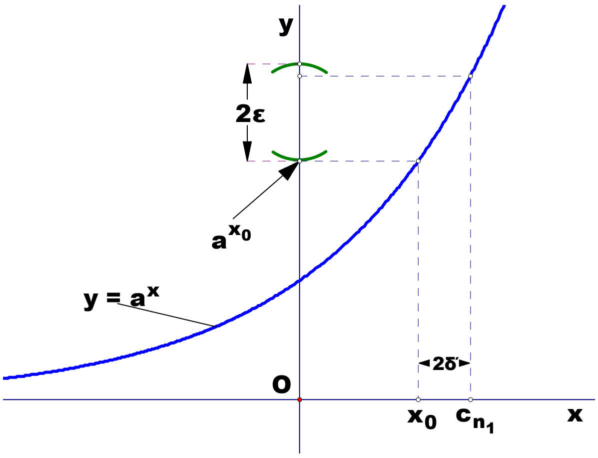


***Απόδειξη:** Η περίπτωση $a=1$ είναι τετριμένη. Υποθέτουμε $a>1$. Θεωρούμε την ακολουθία $b_n = x_0 - \dfrac{1}{n}$, $n=1,2,\ldots$ Από την πρόταση 2.12.6 προκύπτει ότι $a^{b_n} < a^{x_0}$ και από το λήμμα 2.12.9 ότι $\lim a^{b_n} = a^{x_0}$.

Έστω $\varepsilon>0$. Εφόσον $\lim a^{b_n} = a^{x_0}$, υπάρχει δείκτης n_0 με $a^{x_0} - \varepsilon < a^{b_n} < a^{x_0}$, για κάθε $n\geq n_0$. Έστω $\delta = x_0 - b_{n_0} = \dfrac{1}{n_0}$.

Αν $b_0 = x_0 - \delta < x < x_0$ τότε από την πρόταση 2.12.6, προκύπτει ότι $a^{b_{n_0}} < a^x < a^{x_0}$ και λόγω της σχέσης $a^{x_0} - \varepsilon < a^{b_{n_0}}$, παίρνουμε $a^{x_0} - \varepsilon < a^x < a^{x_0}$.

Δηλαδή, $|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0} - a^x < \varepsilon$. Σύμφωνα με τον ορισμό του πλευρικού ορίου, $\lim\limits_{x\to x_0^-} a^x = a^{x_0}$.



Με παρόμοιο τρόπο (θεωρώντας την ακολουθία $c_n = x_0 + \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$) προκύπτει ότι υπάρχει δείκτης n_1 με $a^{c_{n_1}} < a^{x_0} + \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_1$. Έστω $\delta' = x_0 - c_{n_1} = \dfrac{1}{n_1}$. Αν $x_0 < x < x_0 + \delta'$ τότε, $x_0 < x < c_{n_1} \Rightarrow a^{x_0} < a^x < a^{c_{n_1}}$ και λόγω της σχέσης $a^{c_{n_1}} < a^{x_0} + \varepsilon$, παίρνουμε $a^{x_0} < a^x < a^{x_0} + \varepsilon \Rightarrow |a^x - a^{x_0}| < \varepsilon$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to x_0^+} a^x = a^{x_0}$. Εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0^-} a^x = \lim\limits_{x\to x_0^+} a^x = a^{x_0}$, έπεται ότι $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$. Η περίπτωση $0 < a < 1$ ανάγεται στην προηγούμενη, αφού $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}(a^{-1})^x} = \dfrac{1}{(a^{-1})^{x_0}} = a^{x_0}$. ■

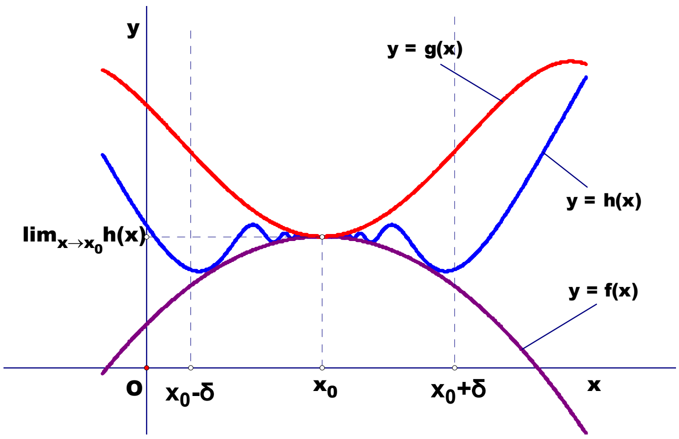
Αρκετές φορές δεν είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε άμεσα το όριο μιας συνάρτησης. Σε τέτοιες περιπτώσεις «εγκλωβίζουμε» τη συνάρτησή μας ανάμεσα σε δύο ισοσυγκλίνουσες συναρτήσεις.

5.1.12 Πρόταση (Κριτήριο παρεμβολής)

Έστω ότι $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in ((x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)) \cap A$, όπου $\delta > 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$.

Τότε το $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με a.

Απόδειξη:



Έστω $\varepsilon > 0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$, υπάρχει $\delta' > 0$, τέτοιο ώστε $\delta' < \delta$ και $|f(x) - a| < \varepsilon$ και $|g(x) - a| < \varepsilon$, για κάθε $x \in A$, με $0 < |x - x_0| < \delta'$.

Από τη σχέση $|f(x) - a| < \varepsilon$ προκύπτει ότι $-\varepsilon < f(x) - a$ και από τη σχέση

$|g(x)-a|<\varepsilon$ προκύπτει ότι $g(x)-a<\varepsilon$.Εφόσον $f(x)-a\le h(x)-a\le g(x)-a$, οι δύο αυτές σχέσεις μας δίνουν:

$-\varepsilon<h(x)-a<\varepsilon \Leftrightarrow |h(x)-a|<\varepsilon$, για κάθε $x\in A$, με $0<|x-x_0|<\delta'$. ■

5.1.13 Παραδείγματα

1. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin(1/x)}{x+1}=0$.

Απόδειξη: Εφόσον $x\to 0$, μπορούμε να περιοριστούμε στο διάστημα $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

Αν $x\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ τότε $x+1>0$ και επομένως $|x+1|=x+1$.

Παρατηρούμε ότι $0\le\left|\dfrac{x^2\sin(1/x)}{x+1}\right|=\dfrac{x^2|\sin(1/x)|}{x+1}\le\dfrac{x^2}{x+1}$ και επιπλέον $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{0^2}{0+1}=0$.

Από το κριτήριο της παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{x^2\sin(1/x)}{x+1}\right|=0$ που είναι ισοδύναμο με το ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin(1/x)}{x+1}=0$.

2. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι $e^x\ge 1+x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (πόρισμα 2.12.11). Θέτοντας $-x$ αντί x, παίρνουμε $e^{-x}\ge 1-x$. Αν $x<1$, τότε η τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι $e^x\le\dfrac{1}{1-x}$.

Επομένως, $1+x\le e^x\le\dfrac{1}{1-x}$, για κάθε $x<1$.

Αν $x\in(0,1)$, τότε $1\le\dfrac{e^x-1}{x}\le\dfrac{1}{1-x}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-x}=1$, έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

Αν $x<0$, τότε $1\ge\dfrac{e^x-1}{x}\ge\dfrac{1}{1-x}$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-x}=1$, έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

Εφόσον τα δύο πλευρικά όρια είναι ίσα, προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

Η επόμενη πρόταση μας επιτρέπει να αλλάζουμε τη μεταβλητή όταν υπολογίζουμε όρια.

5.1.14 Πρόταση

Δίνονται οι συναρτήσεις $g:A\to B\subseteq\mathbb{R}$ και $f:B\to\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι:

(i) $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=a$ *και* $g(x)\ne a$ *για κάθε x που ανήκει σε μια περιοχή* $((x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta))\cap A$ *του x_0 (χωρίς το x_0).*

(ii) $\lim\limits_{u\to a}f(u)=b$.

Τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = b$.

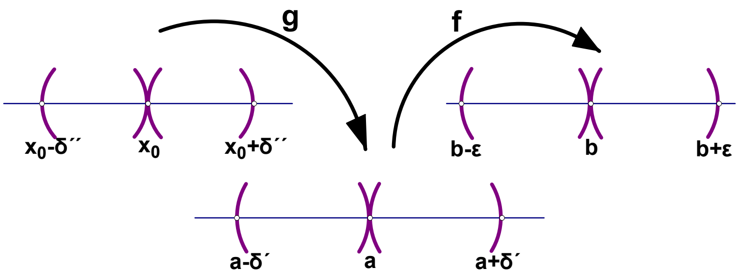
***Απόδειξη:** Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $\lim\limits_{u \to a} f(u) = b$, υπάρχει $\delta' > 0$ με την ιδιότητα

$$(u \in B \text{ και } 0 < |u - a| < \delta') \Rightarrow |f(u) - b| < \varepsilon . \quad (1)$$

Εφόσον $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$, υπάρχει $\delta'' > 0$ με την ιδιότητα

$$(x \in A \text{ και } 0 < |x - x_0| < \delta'') \Rightarrow |g(x) - a| < \delta' . \quad (2)$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\delta'' < \delta$, οπότε ισχύουν ταυτόχρονα η (2) και η σχέση $g(x) \neq a$. Επομένως $0 < |g(x) - a| < \delta'$, για κάθε $x \in ((x_0 - \delta'', x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta'')) \cap A$.



Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2), παίρνουμε

$$(x \in A \text{ και } 0 < |x - x_0| < \delta'') \Rightarrow |f(g(x)) - b| < \varepsilon . \qquad \blacksquare$$

5.1.15 Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x \to 1} e^{2x^2 - x + 1}$.

Λύση: Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x \to 1}(2x^2 - x + 1) = 2$. Ακόμη, η παράσταση $u = 2x^2 - x + 1$ είναι διάφορη του 2, για κάθε $x \in (-1/2, 1) \cup (1, +\infty)$. (Μελέτη τριωνύμου).

Εδώ έχουμε τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ με $f(u) = e^u$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = 2x^2 - x + 1$.

Ακόμη, $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$. Άρα $\lim\limits_{x \to 1} e^{2x^2 - x + 1} = \lim\limits_{u \to 2} e^u = e^2$.

Άλυτες ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(-1)^{[1/x]}}{x^2 + 1}$, όπου $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του x.

2. Να υπολογιστούν τα όρια: **(i)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^x - e}{x - 1}$ και **(ii)** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{e^{x^2 - 2x - 1} - e^2}{x^2 - 2x - 3}$

5.1.16 Πρόταση (Όρια τριγωνομετρικών συναρτήσεων)

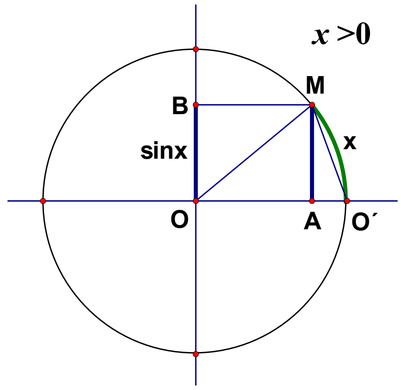
Ισχύουν τα εξής:

i) $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$, ***ii)*** $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$ *και*

iii) $\lim\limits_{x \to x_0} \tan x = \tan x_0$, *όπου* $x_0 \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$.

Απόδειξη: Το (iii) προκύπτει από τα (i) και (ii) του θεωρήματος 5.1.6. Θα αποδείξουμε λοιπόν τα (i) και (ii).

Αρχικά δείχνουμε ότι $\lim_{x\to 0}\sin x = 0$ και $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$. Εφαρμόζουμε ένα γεωμετρικό επιχείρημα. Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο.



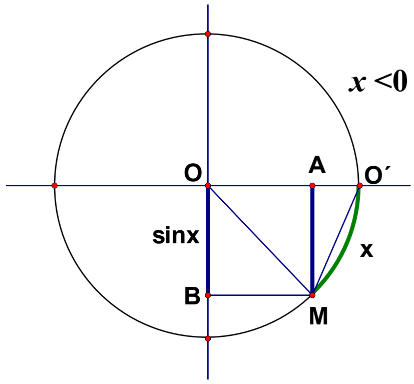
Έχουμε

$|\sin x| = \text{OB} = \text{AM} < \text{O΄M} < \text{μήκος τόξου } \overset{\frown}{\text{O΄M}} = |x|$.

Επειδή $\lim_{x\to 0}|x| = 0$, τότε, με βάση το κριτήριο παρεμβολής, $\lim_{x\to 0}\sin x = 0$.

Αν $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$.

Επομένως, $\lim_{x\to 0}\cos x = \sqrt{1-\lim_{x\to 0}\sin^2 x} = \sqrt{1-0} = 1$.



Ας εξετάσουμε τώρα τη γενική περίπτωση: Από την τριγωνομετρία ξέρουμε ότι

$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$ και

$\cos A - \cos B = 2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}$. Οι σχέσεις αυτές για $A = x$ και $B = x_0$, δίνουν $\sin x - \sin x_0 = 2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}$ και $\cos x - \cos x_0 =$ $= 2\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x_0-x}{2}$.

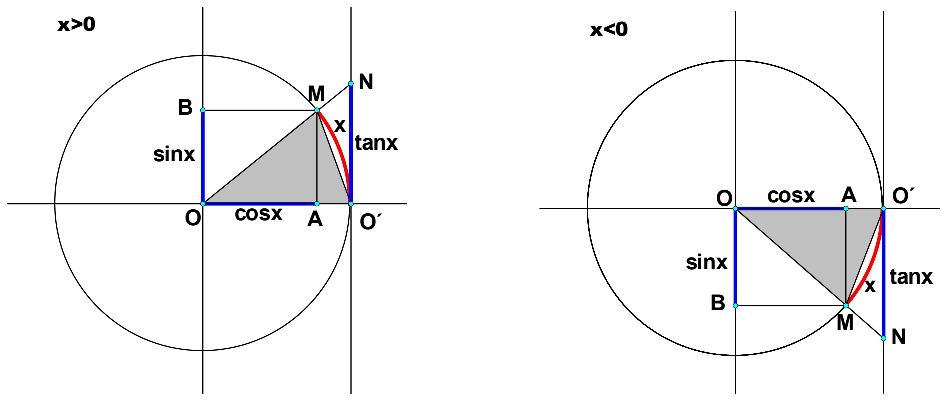
Επομένως, $|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le \left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|$. Κάνοντας τον μετασχηματισμό $u = \frac{x-x_0}{2}$, βρίσκουμε (με βάση την πρόταση 5.1.14) ότι $\lim_{x\to x_0}\sin\frac{x-x_0}{2} = \lim_{u\to 0}\sin u = 0$ Από το κριτήριο της παρεμβολής παίρνουμε $\lim_{x\to x_0}\left(\sin x - \sin x_0\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\sin x = \sin x_0$. Για το συνημίτονο σκεπτόμαστε παρόμοια. ■

Η επόμενη πρόταση μας παρέχει δύο πολύ χρήσιμα (για τον υπολογισμό των παραγώγων τριγωνομετρικών συναρτήσεων) όρια.

5.1.13 Πρόταση

Ισχύουν τα εξής: ***(i)*** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ *και* ***(ii)*** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0$.

Απόδειξη: **(i)** Και εδώ εφαρμόζουμε ένα γεωμετρικό επιχείρημα. Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο.



Από τα παραπάνω σχήματα έχουμε:

Εμβαδόν Τριγώνου Ο΄ΜΟ = $\frac{1}{2}\mathrm{OO}'\cdot\mathrm{AM}$.

Εμβαδόν Κυκλικού Τομέα $\mathbf{O\overset{\frown}{O'M}}$ $=\frac{1}{2}\mathrm{OO}'\cdot$ μήκος τόξου Ο΄Μ

Εμβαδόν Τριγώνου ΟΟ΄Ν = $\frac{1}{2}\mathrm{OO}'\cdot\mathrm{O'N}$.

Επειδή (Ο΄ΜΟ)< $(\mathrm{O\overset{\frown}{O'M}})<$ (ΟΟ΄Ν), παίρνουμε ΑΜ < μήκος τόξου Ο΄Μ< Ο΄Ν .

Περίπτωση 1: $x>0$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε $\mathrm{AM}=\sin x$, μήκος τόξου Ο΄Μ $=x$ και $\mathrm{O'N}=\tan x$. Άρα $\sin x<x<\tan x \underset{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{\sin x}{x}<1<\frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{x} \underset{\cos x>0}{\Leftrightarrow} \cos x<\frac{\sin x}{x}<1$.

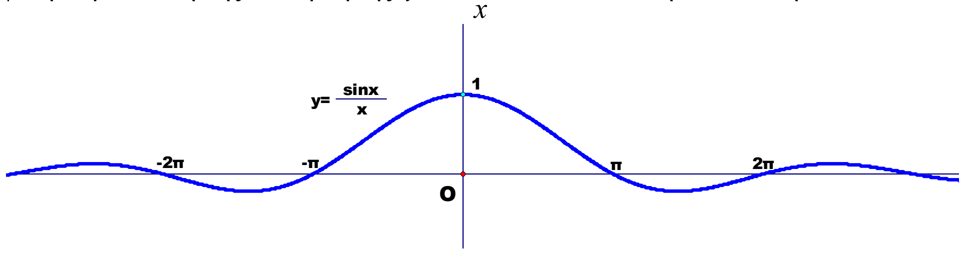
Περίπτωση 2: $x<0$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε $\mathrm{AM}=-\sin x$, μήκος τόξου Ο΄Μ $=-x$ και $\mathrm{O'N}=-\tan x$.

Άρα $-\sin x<-x<-\tan x \underset{-x>0}{\Leftrightarrow} \frac{\sin x}{x}<1<\frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{x} \underset{\cos x>0}{\Leftrightarrow} \cos x<\frac{\sin x}{x}<1$.

Σε κάθε περίπτωση έχουμε $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$. Αλλά $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$. Από το κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=\frac{\sin x}{x}$, $x\neq 0$ είναι η ακόλουθη:



Είναι μια συνεχής καμπύλη, χωρίς το σημείο (0, 1).

(ii) Για την απόδειξη του τύπου $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0$ χρησιμοποιούμε την τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$. Έχουμε λοιπόν: $\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{x} = -\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \sin \frac{x}{2}$. Θέτοντας $u = \frac{x}{2} \to 0$, παίρνουμε (με βάση την πρόταση 5.1.14) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = -\lim\limits_{u\to 0}\left(\frac{\sin u}{u} \sin u \right) =$ $= -\lim\limits_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} \cdot \lim\limits_{u\to 0} \sin u = -1 \cdot 0 = 0$. ■

5.1.18 Παραδείγματα

1. Να υπολογιστούν τα όρια: **i)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{x}$, **ii)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$, όπου $ab \neq 0$, **iii)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x \sin x}$.

Λύση: i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{\cos x} \frac{\sin x}{x} \right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{\cos x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\tan 0}{\cos 0} \cdot 1 = \frac{0}{1} \cdot 1 = 0$.

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b} \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{ax} \frac{bx}{\sin bx} \right) = \frac{a}{b} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax} \lim\limits_{x\to 0} \frac{bx}{\sin bx}$. Για το $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax}$, θέτουμε $u = ax \to 0$. Επομένως, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax} = \lim\limits_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$. Όμοια, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{bx}{\sin bx} = \lim\limits_{u\to 0} \frac{u}{\sin u} =$ $= \frac{1}{\lim\limits_{u\to 0} \frac{\sin u}{u}} = 1$. Άρα $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$.

iii) Εδώ χρησιμοποιούμε την τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\cos a - \cos b = 2\sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{b-a}{2}.$$

Έχουμε λοιπόν : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x \sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin \frac{2x+4x}{2} \sin \frac{4x-2x}{2}}{x \sin x} = 2\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x \sin x}{x \sin x} =$ $= 6 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 6 \cdot 1 = 6$.

2. Να υπολογιστούν τα όρια: **i)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x^2+1)\sin x}{x^2 - x}$, **ii)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3\sin x}{1 - \sqrt{x+1}}$, **iii)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x}$, **iv)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{2\cos 2x - 1}{4\sin x - 2}$ και **v)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$.

Λύση: i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x^2+1)\sin x}{x^2 - x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2+1}{x-1} \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{0^2+1}{0-1} \cdot 1 = -1$,

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3\sin x}{1-\sqrt{x+1}} = 3 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{x+1}} = 3 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{x+1}} = 3 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(1+\sqrt{x+1})}{1-x-1} =$ $-3 \cdot \lim\limits_{x\to 0}(1+\sqrt{x+1}) = -3 \cdot 2 = -6$.

iii) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$. Θέτουμε $u = \frac{\pi}{2} - x \to 0$. Επομένως,

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x} = \lim\limits_{u\to 0} \frac{\cos u - 1}{\sin u} = \lim\limits_{u\to 0} \frac{\cos u - 1}{u} \lim\limits_{u\to 0} \frac{u}{\sin u} = 0 \cdot 1 = 0$.

iv) Θέτουμε $u = x - \frac{\pi}{6} \to 0$. Επομένως, $x = u + \frac{\pi}{6}$.

Άρα, $2\cos 2x - 1 = 2\cos\left(2(u+\frac{\pi}{6})\right) - 1 = 2\cos(2u+\frac{\pi}{3}) - 1 = 2\cos 2u \cos\frac{\pi}{3} - 2\sin 2u \sin\frac{\pi}{3} - 1 =$

$= \cos 2u - \sqrt{3}\sin 2u - 1 = 1 - 2\sin^2 u - 2\sqrt{3}\sin u \cos u - 1 = -2\sin u(\sin u + \sqrt{3}\cos u)$.

Ακόμη, $4\sin x - 2 = 4\sin(u+\frac{\pi}{6}) - 2 = 4\sin u \cos\frac{\pi}{6} + 4\cos u \sin\frac{\pi}{6} - 2 =$

$= 4\sin u \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4\cos u \cdot \frac{1}{2} - 2 = 2(\sqrt{3}\sin u + \cos u - 1)$.

Επομένως, $\frac{2\cos 2x - 1}{4\sin x - 2} = \frac{-2\sin u(\sin u + \sqrt{3}\cos u)}{2(\sqrt{3}\sin u + \cos u - 1)} = -(\sin u + \sqrt{3}\cos u)\frac{\sin u}{u}$

$\frac{1}{\frac{\sqrt{3}\sin u + \cos u - 1}{u}} = -(\sin u + \sqrt{3}\cos u)\frac{\sin u}{u}\frac{1}{\sqrt{3}\frac{\sin u}{u} + \frac{\cos u - 1}{u}}$.

Έχουμε λοιπόν: $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos 2x - 1}{4\sin x - 2} = -(\sin 0 + \sqrt{3}\cos 0)\cdot\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} + \lim_{u\to 0}\frac{\cos u - 1}{u}}$

$= -\sqrt{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+0} = -1$.

v) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - 2\sin^2\frac{x}{2} - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}\cdot 1 = -\frac{1}{2}$.

Άλυτες ασκήσεις

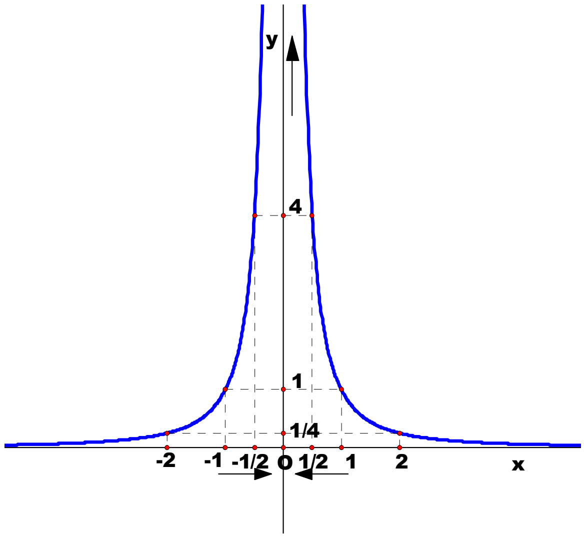
1. Να υπολογιστούν τα όρια: **(i)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x^2+x}$, **(ii)** $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x} - 1}{x}$, **(iii)** $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$, **(iv)** $\lim_{x\to 0}\frac{x - \tan x}{x}$, **(v)** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sqrt{5x+4}-2}$.

2. Να υπολογιστούν τα όρια: **(i)** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}\right)$ και **(ii)** $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan\left(\frac{2x-\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$.

3. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2}$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την ανισότητα $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ της απόδειξης της πρότασης 5.1.13 για να καταλήξετε στη σχέση $\frac{\cos x - 1}{x} < \frac{\sin x - x}{x^2} < 0$. Στη συνέχεια χρησιμοποιήστε το (ii) της πρότασης 5.1.3).

Στα προηγούμενα αναφερθήκαμε σε όρια συναρτήσεων που είναι πραγματικοί αριθμοί και όχι $-\infty$ ή $+\infty$. Όπως καταλαβαίνει κανείς, αυτό δεν είναι ο κανόνας. Ας δούμε το ακόλουθο παράδειγμα:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$. Η γραφική της παράσταση είναι η ακόλουθη:



Παρατηρούμε ότι συνάρτηση παίρνει ολοένα πιο μεγάλες τιμές, καθώς το x πλησιάζει στο μηδέν. Λέμε ότι η συνάρτηση τείνει στο $+\infty$ για $x\to 0$ και γράφουμε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$. Ας διατυπώσουμε τώρα τον σχετικό ορισμό:

5.1.19 Ορισμός

Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση και $x_0\in\mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της Α.

i) *Θα λέμε ότι η συνάρτηση f συγκλίνει για $x\to x_0$ στο $+\infty$ αν, για κάθε $\varepsilon>0$ (οσοδήποτε μεγάλο) υπάρχει $\delta>0$ με την ιδιότητα:*

$$\text{Αν } x\in A \text{ και } 0<|x-x_0|<\delta, \text{ τότε } f(x)>\varepsilon.$$

Γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$.

ii) *Θα λέμε ότι η συνάρτηση f συγκλίνει για $x\to x_0$ στο $-\infty$ αν, για κάθε $\varepsilon>0$ (οσοδήποτε μεγάλο) υπάρχει $\delta>0$ με την ιδιότητα:*

$$\text{Αν } x\in A \text{ και } 0<|x-x_0|<\delta, \text{ τότε } f(x)<-\varepsilon.$$

Γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

Επίσης, αν f_1 είναι ο περιορισμός της f στο σύνολο $A\cap(x_0,+\infty)$ και f_2 ο περιορισμός της στο $A\cap(-\infty,x_0)$, τότε θέτουμε:

α) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$ *αν* $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)=+\infty$,

β) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$ *αν* $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)=-\infty$,

γ) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$ *αν* $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)=+\infty$ *και*

δ) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$ *αν* $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)=-\infty$.

Για τον υπολογισμό απειριζόμενων ορίων είναι χρήσιμη η ακόλουθη πρόταση:

5.1.20 Πρόταση

Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις και $x_0 \in \mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης του κοινού πεδίου ορισμού

Α. Ισχύουν τα εξής:

i) *Αν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in A$ και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.*

ii) *Αν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in A$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.*

iii) *Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$ ή $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$,*

τότε $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$.

iv) *Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$ ή $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$,*

τότε $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = -\infty$.

v) *Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$ με $a > 0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = +\infty$.*

Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$ με $a > 0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = -\infty$.

vi) *Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$ με $a < 0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = -\infty$.*

Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$ με $a < 0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = +\infty$.

vii) *Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ ή $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = +\infty$.*

viii) *Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.*

ix) *Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.*

Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x \in A$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

x) *Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in A$ και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$,*

όπου k θετικός ακέραιος.

***Απόδειξη:** Οι (i) και (ii) προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό.
Για το (iii) θεωρούμε ένα $\varepsilon > 0$. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ τότε υπάρχει $\delta_1 > 0$ με την ιδιότητα:

$\left(x \in A \text{ και } 0 < |x - x_0| < \delta_1\right) \Rightarrow |f(x) - a| < |a| + 1$.

Η σχέση $|f(x) - a| < |a| + 1$ συνεπάγεται τη σχέση $f(x) > a - |a| - 1$. Παρατηρούμε ότι $a \leq |a| < |a| + 1$ και συνεπώς $a - |a| - 1 < 0$ (άρα $-a + |a| + 1 > 0$). Ακόμη, επειδή $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, υπάρχει $\delta_2 > 0$ με την ιδιότητα: $\left(x \in A \text{ και } 0 < |x - x_0| < \delta_2\right) \Rightarrow$ $g(x) > \varepsilon - a + |a| + 1 > 0$. Αν $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, τότε για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$, θα συναληθεύουν οι σχέσεις $f(x) > a - |a| - 1$ και $g(x) > \varepsilon - a + |a| + 1 > 0$. Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει η επιθυμητή ανισότητα. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, τότε επιλέγουμε τα $\delta_1, \delta_2 > 0$ ώστε να ισχύουν οι ανισότητες $f(x) > \varepsilon / 2$ και $g(x) > \varepsilon / 2$.

Η (iv) προκύπτει με ανάλογο τρόπο.

Για την (v) υποθέτουμε αρχικά ότι $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$. Θεωρούμε ένα $\varepsilon > 0$. Τότε και $2\varepsilon / a > 0$. Εφόσον $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, υπάρχει $\delta_1 > 0$ με την ιδιότητα: $(x \in A$ και $0 < |x - x_0| < \delta_1) \Rightarrow$ $|f(x) - a| < a/2$. Η σχέση $|f(x) - a| < a/2$ συνεπάγεται τη σχέση $f(x) > a/2$. Ακόμη, επειδή $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, υπάρχει $\delta_2 > 0$ με την ιδιότητα: $\left(x \in A \text{ και } 0 < |x - x_0| < \delta_2\right) \Rightarrow$ $g(x) > 2\varepsilon / a$. Αν $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, τότε για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$, θα συναληθεύουν οι σχέσεις $f(x) > a/2$ και $g(x) > 2\varepsilon / a$. Επομένως και η σχέση $f(x)g(x) > \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{2\varepsilon}{a} = \varepsilon$. Αν $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, το $\delta_2 > 0$ επιλέγεται έτσι ώστε $g(x) < -2\varepsilon / a$, για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta_2$.

Η απόδειξη της (vi) είναι παρόμοια.

Για την (vii) αρκεί να βρούμε $\delta > 0$ με $f(x) > 1$ και $g(x) > \varepsilon$, στην περίπτωση $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ και $f(x) < -1$ και $g(x) < -\varepsilon$, στην περίπτωση $\lim_{x\to x_0} f(x) =$ $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$.

Για την (viii) υποθέτουμε αρχικά ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ με την ιδιότητα $f(x) > 1/\varepsilon \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{f(x)} < \varepsilon$, για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ με την ιδιότητα $f(x) < -1/\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \dfrac{1}{f(x)} < 0$, για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$.

Για την (ix) θεωρούμε $\delta > 0$ με την ιδιότητα $0 < f(x) < 1/\varepsilon$ (στην περίπτωση που $f(x) > 0$), για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$. Τότε $f(x) > \varepsilon$. Η δεύτερη περίπτωση εξετάζεται παρόμοια.

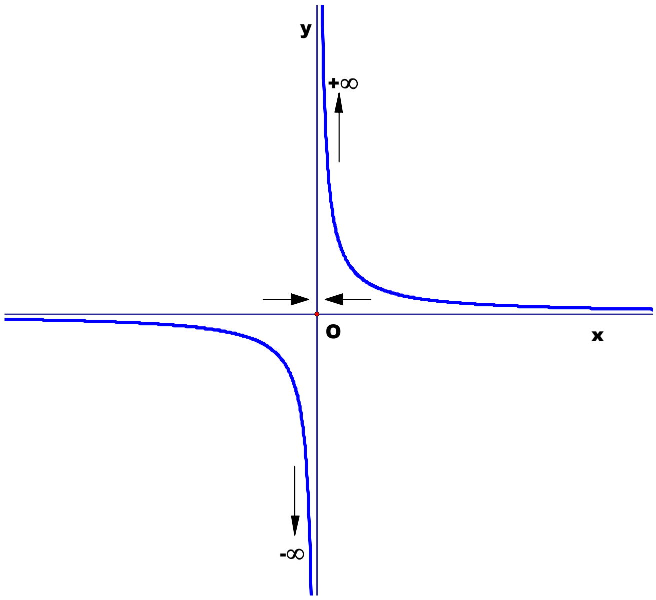
Για το (x) θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Τότε και $\varepsilon^k > 0$. Εφόσον $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, υπάρχει $\delta > 0$ με την ιδιότητα: $\left(x \in A \text{ και } 0 < |x - x_0| < \delta\right) \Rightarrow f(x) > \varepsilon^k \Rightarrow \sqrt[k]{f(x)} > \varepsilon$ και τελειώσαμε. ■

5.1.21 Παραδείγματα

1. Έστω k θετικός ακέραιος. Παρατηρούμε ότι αν ο k είναι άρτιος τότε $x^k > 0$, για κάθε $x \neq 0$. Εφόσον $\lim_{x\to 0} x^k = 0$, από (ix) της προηγούμενης πρότασης προκύπτει ότι $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^k} = +\infty$.

Αν ο k είναι περιττός τότε $x^k > 0$, για $x > 0$ ενώ, $x^k < 0$, για $x < 0$. Άρα $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^k} = +\infty$ και $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^k} = -\infty$.

Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{x^k}$, για $k = 1$.



2. Να υπολογιστούν τα όρια: **i)** $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+3}{|x|x}$, **ii)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-6}{|x^2-4|}$, **iii)** $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{|x^2-x-2|}{-x^3+3x+2}$.

Λύση: i) Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+3)=3>0$, $\lim\limits_{x\to 0^-}(|x|x)=0$ και για κάθε $x<0$ έχουμε $|x|x<0$. Συνδυάζοντας το (v) και το (ix) της προηγούμενης πρότασης, συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+3}{|x|x}=-\infty$.

ii) Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-x-6)=-4<0$, $\lim\limits_{x\to 2^-}|x^2-4|=0$ και για κάθε $x\neq\pm 2$ έχουμε $|x^2-4|>0$. (Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x\neq -2$, γιατί $x\to 2$).

Επομένως, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-6}{|x^2-4|}=-\infty$.

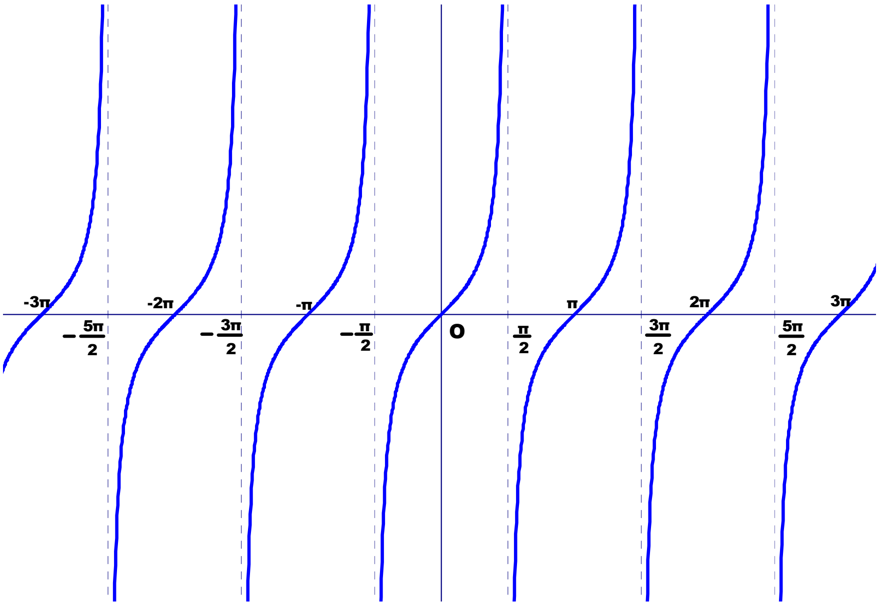
iii) Παρατηρούμε ότι $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ και $-x^3+3x+2=-(x+1)^2(x-2)$.

Επομένως, $\dfrac{|x^2-x-2|}{-x^3+3x+2}=-\dfrac{|x+1||x-2|}{(x+1)^2(x-2)}=-\dfrac{|x-2|}{|x+1|(x-2)}$. Εφόσον $x\to -1<2$, $x-2<0$ και άρα $|x-2|=-(x-2)$.

Συνεπώς, $\dfrac{|x^2-x-2|}{x^3-3x-2}=\dfrac{1}{|x+1|}$, για κάθε $-1<x<2$. Ακόμη, $\lim\limits_{x\to -1^+}|x+1|=0$ και $|x+1|>0$ για κάθε $x\neq -1$. Επομένως, $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{|x^2-x-2|}{-x^3+3x+2}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{|x+1|}=+\infty$.

2. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-}\tan x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to(-\pi/2)^+}\tan x=-\infty$. Γενικότερα, $\lim\limits_{x\to\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)^-}\tan x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)^+}\tan x=-\infty$.

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to(\pi/2)^-}\sin x=\sin\frac{\pi}{2}=1>0$, $\lim_{x\to(\pi/2)^-}\cos x=\cos\frac{\pi}{2}=0$ και $\cos x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, $\lim_{x\to(\pi/2)^-}\tan x=$ $=\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\sin x}{\cos x}=+\infty$. Η απόδειξη της ισότητας $\lim_{x\to(-\pi/2)^+}\tan x=-\infty$ είναι παρόμοια.



Για τη γενική περίπτωση, αρκεί να θυμηθούμε ότι η συνάρτηση $y=\tan x$ είναι περιοδική με περίοδο π. (Επιπροσθέτως, $k\pi+\frac{\pi}{2}=(k+1)\pi-\frac{\pi}{2}$). ■

Άλυτες ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα όρια: **(i)** $\lim_{x\to1}\frac{3x+4}{x^3-2x^2+x}$, **(ii)** $\lim_{x\to-2^-}\frac{x+7}{x^2-4}$, **(iii)** $\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2-2x+2}{|x|-1}$,

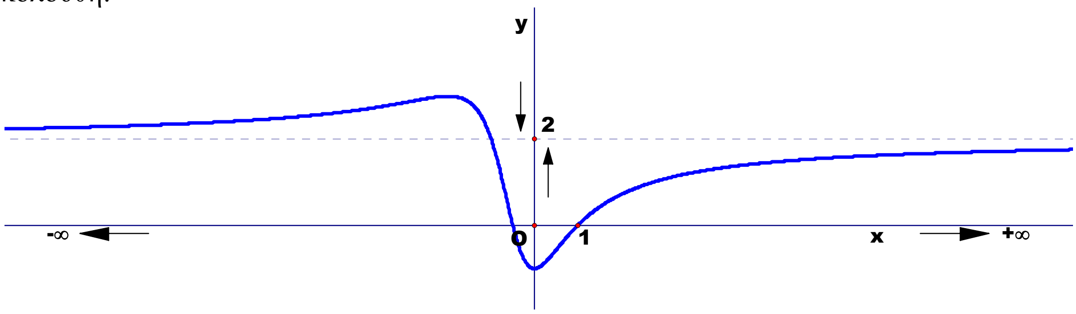
(iv) $\lim_{x\to1^-}\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2-3x+2}$, **(v)** $\lim_{x\to(-\pi/2)^+}\frac{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\tan x}{\sin(2x+\pi)}$.

2. Να υπολογιστούν τα όρια: **(i)** $\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{x^2+x+1}{\tan x}$, **(ii)** $\lim_{x\to4^+}\frac{x^2-4x-5}{\sqrt{x^2+9}-5}$, **(iii)** $\lim_{x\to5^-}\frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x^2-4x-5}$.

3. Να βρείτε το $\lim_{x\to1}f(x)$, όταν: **(i)** $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-2}=-\infty$ και **(ii)** $\lim_{x\to1}\left(f(x)(3x^2-2)\right)=+\infty$.

5.2 Όριο συνάρτησης για x→+∞ ή x→−∞

Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1}$. Η γραφική της παράσταση είναι η ακόλουθη:



Παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνει και τείνει στο $+\infty$ η τιμή της συνάρτησης τείνει προς τον αριθμό 2. Αντίστοιχη εικόνα παρουσιάζει η συνάρτηση καθώς το x τείνει στο $-\infty$.

Ο ακριβής εψιλον-τικός ορισμός αυτής της ιδιότητας είναι ο εξής:

5.2.1 Ορισμός

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$.

i) *Υποθέτουμε ότι, για κάθε* $\delta > 0$, *το* A *περιέχει ένα τουλάχιστον στοιχείο του διαστήματος* $(\delta, +\infty)$. *Θα λέμε ότι η συνάρτηση συγκλίνει στο* $a \in \mathbb{R}$ *για* $x \to +\infty$, *αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$, *τέτοιο ώστε:* $|f(x) - a| < \varepsilon$, *για κάθε* $x \in A \cap (\delta, +\infty)$.

ii) *Υποθέτουμε ότι, για κάθε* $\delta > 0$, *το* A *περιέχει ένα τουλάχιστον στοιχείο του διαστήματος* $(-\infty, -\delta)$. *Θα λέμε ότι η συνάρτηση συγκλίνει στο* $a \in \mathbb{R}$ *για* $x \to -\infty$, *αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$, *τέτοιο ώστε:* $|f(x) - a| < \varepsilon$, *για κάθε* $x \in A \cap (-\infty, -\delta)$.

5.2.2 Παρατήρηση

Γνωρίζουμε ότι οι ακολουθίες πραγματικών αριθμών είναι συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$ ή το σύνολο $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1,2,3,\ldots\}$. Επίσης, για κάθε $\delta > 0$, το σύνολο $\mathbb{N} \cap (\delta, +\infty)$ είναι μη κενό. Κατά συνέπεια, οι συγκλίνουσες ακολουθίες αποτελούν ειδική περίπτωση των συγκλινουσών (για $x \to +\infty$) συναρτήσεων. Ορθότερο λοιπόν θα ήταν να γράφουμε $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ για το όριο μιας ακολουθίας (a_n), αντί του $\lim a_n$.

Είναι θέμα ρουτίνας για τον εξοικειωμένο με την εψιλοντική διαδικασία αναγνώστη να αποδείξει ότι ισχύουν και εδώ αντίστοιχα αποτελέσματα με αυτά των 5.1.4 και 5.1.6. Η μόνη διαφορά είναι ότι, αντί να παίρνουμε το ελάχιστο από τα εμπλεκόμενα *δ*, παίρνουμε το μέγιστο από αυτά.

5.2.3 Πρόταση (μοναδικότητα του ορίου)

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f τείνει, για $x \to +\infty$ *(ή για* $x \to -\infty$*), προς τους αριθμούς* a_1 *και* a_2. *Τότε* $a_1 = a_2$. ■

Η παραπάνω πρόταση μας επιτρέπει να συμβολίζουμε το μοναδικό όριο μιας συνάρτησης *f*, για $x \to +\infty$ (αντίστοιχα για $x \to -\infty$), με το σύμβολο $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (αντίστοιχα με το $\lim_{x\to-\infty} f(x)$).

5.2.4 Θεώρημα

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f και g έχουν κοινό πεδίο ορισμού A. Τότε ισχύουν τα εξής:

i) $\lim_{x\to+\infty} c = \lim_{x\to-\infty} c = c$, *όπου* $c \in \mathbb{R}$.

ii) *Αν* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ *τότε* $\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = |a|$. *Αντίστοιχα, αν* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$, *τότε* $\lim_{x\to-\infty} |f(x)| = |a|$.

iii) *Αν* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}$, *τότε* $\lim_{x\to+\infty} (\lambda f(x)) = \lambda a$. *Αντίστοιχα, αν* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}$, *τότε* $\lim_{x\to-\infty} (\lambda f(x)) = \lambda a$.

iv) *Αν* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ *και* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = b$, *τότε* $\lim_{x\to+\infty} (f(x) + g(x)) = a + b$. *Αντίστοιχα, αν* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$ *και* $\lim_{x\to-\infty} g(x) = b$, *τότε* $\lim_{x\to-\infty} (f(x) + g(x)) = a + b$.

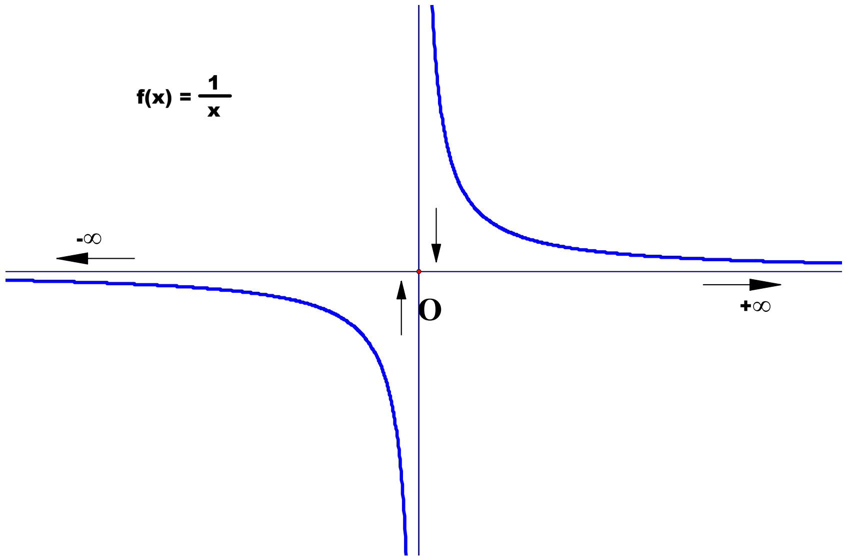
v) *Αν* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ *και* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = b$, *τότε* $\lim_{x\to+\infty} (f(x)g(x)) = a \cdot b$. *Αντίστοιχα, αν* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$ *και* $\lim_{x\to-\infty} g(x) = b$, *τότε* $\lim_{x\to-\infty} (f(x)g(x)) = a \cdot b$.

vi) *Αν* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = b$, $g(x) \neq 0$ *για κάθε* $x \in A$ *και* $b \neq 0$, *τότε* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$. *Αντίστοιχα, αν* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = b$, $g(x) \neq 0$ *για κάθε* $x \in A$ *και* $b \neq 0$, *τότε* $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

vii) *Αν* $f(x) \geq 0$ *για κάθε* $x \in A$ *και* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$, *τότε* $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{a}$. *Αντίστοιχα, αν* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$, $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{a}$. ■

5.2.5 Παράδειγμα

Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x)=\frac{1}{x}$. Τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$. Πράγματι, αν $\varepsilon>0$, τότε η σχέση $0<\frac{1}{x}<\varepsilon$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση $x>\frac{1}{\varepsilon}$. Αν θέσουμε $\delta=\frac{1}{\varepsilon}$, τότε για κάθε $x\in(\delta,+\infty)$ έχουμε $0<\frac{1}{x}<\varepsilon$. Άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.



Η σχέση πάλι $-\varepsilon<\frac{1}{x}<0$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση $x<-\frac{1}{\varepsilon}$. Και εδώ θέτουμε $\delta=\frac{1}{\varepsilon}$ και παίρνουμε $-\varepsilon<\frac{1}{x}<0$, για κάθε $x\in(-\infty,-\delta)$.

5.2.6 Πρόταση

Θεωρούμε μια ρητή συνάρτηση με τύπο $f(x)=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}$, *όπου* $b_n\neq 0$.

Δηλαδή, υποθέτουμε ότι ο παρονομαστής έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του βαθμού του αριθμητή.

Τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{a_n}{b_n}$.

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x\neq 0$, έχουμε

$$f(x)=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\frac{x^n(a_n+a_{n-1}\frac{1}{x}+\cdots+a_1\frac{1}{x^{n-1}}+a_0\frac{1}{x^n})}{x^n(b_n+b_{n-1}\frac{1}{x}+\cdots+b_1\frac{1}{x^{n-1}}+b_0\frac{1}{x^n})}=$$

$$=\frac{a_n+a_{n-1}\frac{1}{x}+\cdots+a_1\frac{1}{x^{n-1}}+a_0\frac{1}{x^n}}{b_n+b_{n-1}\frac{1}{x}+\cdots+b_1\frac{1}{x^{n-1}}+b_0\frac{1}{x^n}}.$$

Έχουμε ήδη δείξει (παράδειγμα 5.2.5) ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$. Από το v) του θεωρήματος 5.2.4 προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^k}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^k}=0$ για κάθε θετικό ακέραιο k.

Επομένως, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^{n-1}}=\cdots=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0$.

Άρα, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\dfrac{a_n+a_{n-1}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}+\cdots+a_1\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^{n-1}}+a_0\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}}{b_n+b_{n-1}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}+\cdots+b_1\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^{n-1}}+b_0\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}}=\frac{a_n}{b_n}$, σύμφωνα και με τα iii), iv) και vi) του θεωρήματος 5.2.4. ■

5.2.7 Παραδείγματα

1. Να βρεθούν τα όρια: **i)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+3}{x^3+2x^2+x-1}$, **ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x^4+3x^2-6}{2x^4+x^3-x^2-1}$.

Λύση: i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+3}{x^3+2x^2+x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{0\cdot x^3+x^2-x+3}{x^3+2x^2+x-1}=\frac{0}{1}=0$, σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση.

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x^4+3x^2-6}{2x^4+x^3-x^2-1}=-\frac{3}{2}$, σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση.

2. Να βρεθούν τα όρια: **i)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+3}-x+1\right)$, **ii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}+x-3\right)$, **iii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-x}{x-2}$, **iv)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{x-4}$, **v)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}-x}{\sqrt{9x^2+1}+x}$.

Λύση: i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+3}-x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x+3}\right)^2-(x-1)^2}{\sqrt{x^2+x+3}+x-1}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+3-x^2+2x-1}{\sqrt{x^2+x+3}+x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+3}+x-1}$. Εφόσον $x\to+\infty$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x>0$. Επομένως,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+3}+x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1-\frac{1}{x}}=$$

$$=\frac{3+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}}+1-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=\frac{3+0}{\sqrt{1+0+0}+1-0}=\frac{3}{2}.$$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}+x-3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x+4-(x-3)^2}{\sqrt{x^2+2x+4}-(x-3)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8x-5}{\sqrt{x^2+2x+4}-x+3}$.

Εφόσον $x\to-\infty$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x<0$.

Επομένως, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x-5}{\sqrt{x^2+2x+4}-x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x-5}{|x|\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}}-x+3}=$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{8x-5}{-x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}}-x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(8-\dfrac{5}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}}-1+\dfrac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8-\dfrac{5}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}}-1+\dfrac{3}{x}}=$$

$$=\frac{8-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x}}{-\sqrt{1+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x}+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x^2}}-1+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x}}=\frac{8-0}{-\sqrt{1+0+0}-1+0}=-4\,.$$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}-x}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)}{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1}{1-\dfrac{2}{x}}=\dfrac{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}}-1}{1-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}}=\dfrac{\sqrt{0}-1}{1-0}=-1\,.$

iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x-4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}}{x\left(1-\dfrac{4}{x}\right)}\underset{x<0}{=}-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}}{1-\dfrac{4}{x}}=-\dfrac{\sqrt{1+0}}{1-0}=-1\,.$

v) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-x}{\sqrt{9x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}-x}{|x|\sqrt{9+\dfrac{1}{x^2}}+x}\underset{x<0}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}-x}{-x\sqrt{9+\dfrac{1}{x^2}}+x}=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}-1}{-\sqrt{9+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\frac{-\sqrt{1+0}-1}{-\sqrt{9+0}+1}=1\,.$$

3. Να βρεθούν τα $a,b\in\mathbb{R}$, ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{2x-1}-ax-b\right)=0$.

Λύση: Εφόσον $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{2x-1}-ax-b\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{2x^2-x}-a-\dfrac{b}{x}\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\left(\frac{x^2-3x+1}{2x-1}-ax-b\right)\right)=0\,.$$

Άρα $\quad 0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{2x^2-x}-a-\dfrac{b}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{2x^2-x}-a-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{b}{x}=\dfrac{1}{2}-a\quad$ και επομένως,

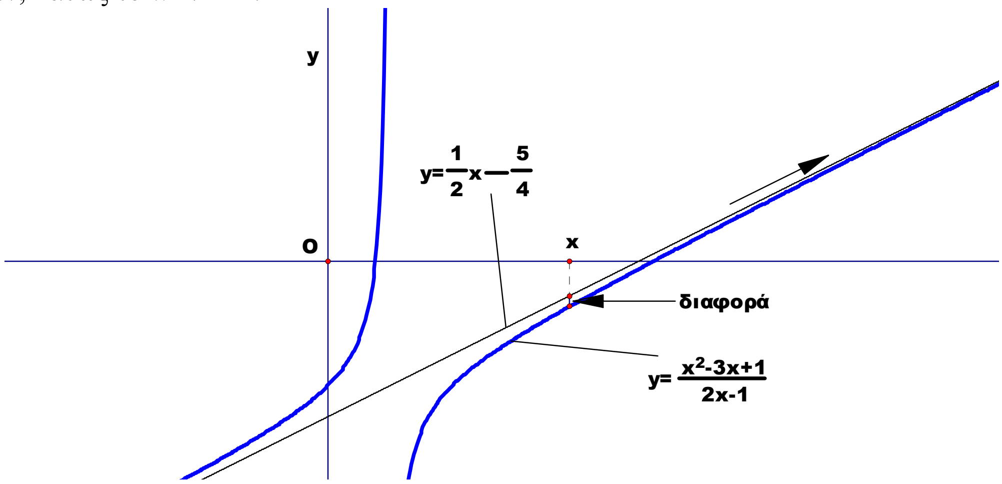
$a=\dfrac{1}{2}$.

Τώρα, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{2x-1}-\dfrac{1}{2}x-b\right)=0\Leftrightarrow b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{2x-1}-\dfrac{1}{2}x\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-6x+2-x(2x-1)}{2(2x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x+2}{4x-2}=-\frac{5}{4}\,.$$

Η γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω γεγονότος είναι η ακόλουθη:

Η απόσταση ενός σημείου της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y=\dfrac{x^2-3x+1}{2x-1}$ από το σημείο της ευθείας $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{4}$ που βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφη με αυτό τείνει στο μηδέν, καθώς το $x\to+\infty$.



Λέμε ότι η ευθεία $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{4}$ είναι μια **πλάγια ασύπτωτη** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y=\dfrac{x^2-3x+1}{2x-1}$. Έχουμε λοιπόν τον επόμενο ορισμό:

5.2.8 Ορισμός

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι το A περιέχει ένα διάστημα της μορφής $(\delta,+\infty)$ ή της μορφής $(-\infty,-\delta)$, όπου $\delta>0$.

i) *Αν το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax-b]$ ή το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax-b]$ υπάρχει και είναι μηδέν, τότε η ευθεία $y=ax+b$ λέγεται **πλάγια ασύπτωτη** της γραφικής παράστασης της f. Αν $a=0$ η ευθεία $y=b$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.*

ii) *Αν $x_0\in\mathbb{R}$ είναι ένα σημείο συσσώρευσης του A και $\lim\limits_{x\to x_0^{\pm}} f(x)=\pm\infty$, τότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται **κάθετη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.*

5.2.9 Παρατηρήσεις

i) Ακολουθώντας τη μέθοδο του προηγουμένου παραδείγματος, μπορεί να δείξει κανείς ότι οι αριθμοί $a,b\in\mathbb{R}$ ορίζονται μονοσήμαντα ως εξής: $a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]$.

ii) Στο παράδειγμα 5.1.21.2) δείξαμε ότι $\lim\limits_{x\to\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)^{\pm}}\tan x=\mp\infty$. Άρα οι ευθείες $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ είναι κάθετες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y=\tan x$.

5.2.10 Παραδείγματα

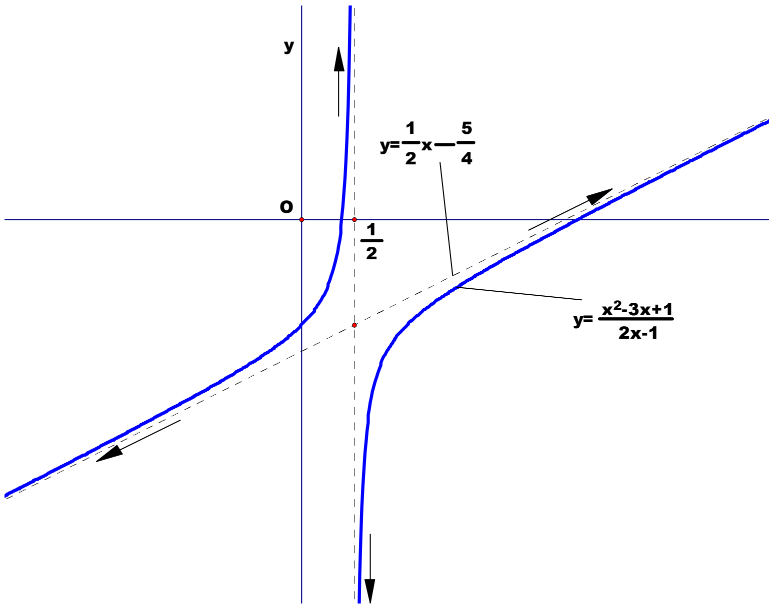
1. Να βρεθούν όλες οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y=\dfrac{x^2-3x+1}{2x-1}$.

Λύση: Έχουμε ήδη βρει μια ασύμπτωτη, την $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{4}$. Παίρνουμε τώρα τα όρια για $x\to-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{x^2-3x+1}{2x-1}\right)=\dfrac{1}{2}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{2x-1}-\dfrac{1}{2}x\right)=-\dfrac{5}{4}$. Καταλήγουμε στην ίδια ευθεία.

Η συνάρτησή μας έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$. Ενδεχομένως λοιπόν να απειρίζεται στο σημείο $x=\frac{1}{2}$.

Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to(1/2)^-}\dfrac{x^2-3x+1}{2x-1}=+\infty$, γιατί $\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\frac{1}{2}+1=-\frac{1}{4}<0$ και $\lim\limits_{x\to(1/2)^-}\left(2x-1\right)=$ $=0$ με $2x-1<0$, για $x<\frac{1}{2}$.

Ανάλογα βρίσκουμε ότι $\lim\limits_{x\to(1/2)^+}\dfrac{x^2-3x+1}{2x-1}=-\infty$. Οι ζητούμενες ασύμπτωτες είναι λοιπόν οι ευθείες $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{4}$ και $x=\dfrac{1}{2}$.



2. Να βρεθούν όλες οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y=\dfrac{2x^2-x+1}{x^2-x-2}$.

Λύση: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-x-2\neq0\}$. Οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-x-2=0$ είναι το -1 και το 2. Είναι $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$. Είναι $x^2-x-2>0\Leftrightarrow x<-1$ ή $x>2$ και $x^2-x-2<0\Leftrightarrow-1<x<2$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to-1^-}(2x^2-x+1)=\lim\limits_{x\to-1^+}(2x^2-x+1)=2\cdot1^2+1+1=4>0$ και

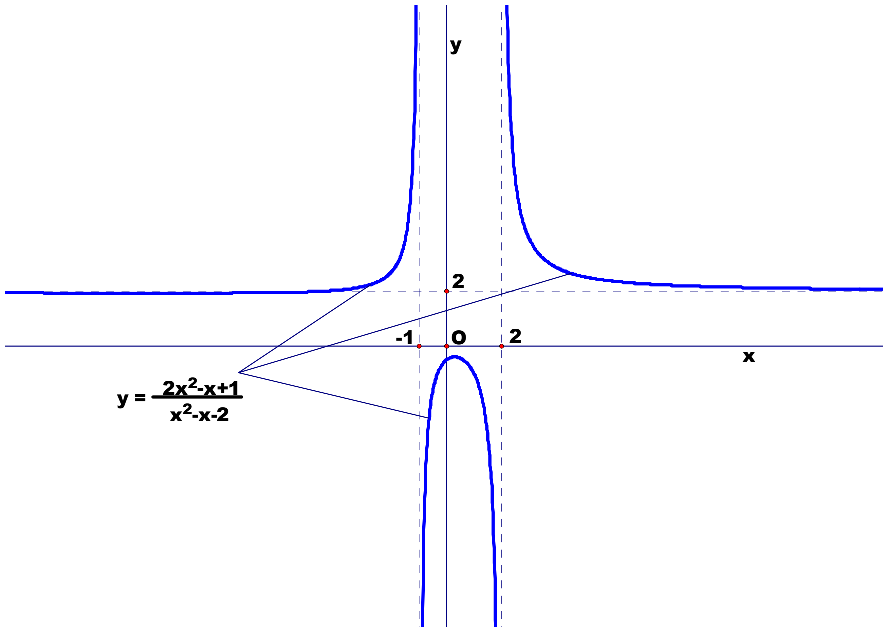
$\lim_{x\to 2^-}(2x^2-x+1)=\lim_{x\to 2^+}(2x^2-x+1)=2\cdot 2^2-2+1=7>0$.

Επομένως, $\lim_{x\to -1^-}\frac{2x^2-x+1}{x^2-x-2}=+\infty$, $\lim_{x\to -1^+}\frac{2x^2-x+1}{x^2-x-2}=-\infty$, $\lim_{x\to 2^-}\frac{2x^2-x+1}{x^2-x-2}=-\infty$ και $\lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2-x+1}{x^2-x-2}=+\infty$.

Οι ευθείες $x=-1$ και $x=2$ είναι οι κάθετες ασύμπτωτες.

$\frac{y}{x}=\frac{2x^2-x+1}{x^3-x^2-2x}\to 0$ για $x\to\pm\infty$. Άρα έχουμε οριζόντιες ασύμπτωτες. ($a=0$)

$b=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x+1}{x^2-x-2}=2$. Η οριζόντια ασύμπτωτη είναι η ευθεία $y=2$.



Άλυτες ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα όρια: **(i)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^3+x}{x^3-3x^2+x+1}$, **(ii)** $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$,

(iii) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$, **(iv)** $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$, **(v)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$, **(vi)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2-x}$.

2. Δείξτε ότι: $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^{2004}+(x+2)^{2004}+(x+3)^{2004}+\cdots+(x+2004)^{2004}}{x^{2004}+2004^{2004}}=2004$.

(Υπόδειξη: Διαιρέστε αριθμητή και παρονομαστή με το x^{2004}).

3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων: **(i)** $f(x)=\frac{2x+1}{x^2-x-2}$,

(ii) $g(x)=\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2+3}$, και **(iii)** $h(x)=\frac{2x-|x+1|}{x}$.

Όπως στα όρια για $x\to x_0\in\mathbb{R}$, έτσι και δω ισχύει το κριτήριο της παρεμβολής. Η απόδειξή του είναι παρόμοια με αυτήν της μορφής 5.1.12 και, γι' αυτό παραλείπεται.

5.2.11 Πρόταση (κριτήριο παρεμβολής)

i) *Έστω* $f(x) \le h(x) \le g(x)$ *για κάθε* $x \in (\delta, +\infty) \cap A$*, όπου* $\delta > 0$.

Αν $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = a \in \mathbb{R}$*, τότε και* $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = a$.

ii) *Έστω* $f(x) \le h(x) \le g(x)$ *για κάθε* $A \cap (-\infty, -\delta)$*, όπου* $\delta > 0$.

Αν $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = a \in \mathbb{R}$*, τότε και* $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = a$. ■

5.2.12 Παράδειγμα

Να βρεθούν τα όρια: **i)** $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\sin x}{x}$ και **ii)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + \sin x}{x^2 + 3}$.

Λύση: i) $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \le \dfrac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{|x|} \le \dfrac{\sin x}{x} \le \dfrac{1}{|x|}$ για κάθε $x \ne 0$. Ακόμη, $\lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{|x|} =$ $= 0$. Άρα $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

ii) $0 \le \dfrac{|2x + \sin x|}{x^2 + 3} \le \dfrac{|2x| + |\sin x|}{x^2 + 3} \le \dfrac{2x + 1}{x^2 + 3}$, εφόσον $x > 0$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + 1}{x^2 + 3} = 0$.

Άρα $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + \sin x}{x^2 + 3} = 0$.

Άλυτες ασκήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει η σχέση: $|(2x^2 + 1)f(x) - x^2| \le x$, για κάθε $x > 0$. Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Τέλος, θα ασχοληθούμε με τα απειριζόμενα όρια, για $x \to \pm\infty$. Δεν έχουμε παρά να τροποποιήσουμε τον ορισμό 5.1.19.

5.2.13 Ορισμός

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ *μια συνάρτηση.*

i) *Υποθέτουμε ότι, για κάθε* $\delta > 0$*, το* A *περιέχει ένα τουλάχιστον στοιχείο του διαστήματος* $(\delta, +\infty)$.

Θα λέμε ότι η συνάρτηση f *συγκλίνει, για* $x \to +\infty$*, στο* $+\infty$ *αν, για κάθε* $\varepsilon > 0$ *(οσοδήποτε μεγάλο) υπάρχει* $\delta > 0$ *με την ιδιότητα:*

Αν $x \in A \cap (\delta, +\infty)$ *τότε* $f(x) > \varepsilon$.

Γράφουμε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Θα λέμε ότι η συνάρτηση f συγκλίνει, για $x \to +\infty$, *στο* $-\infty$ *αν, για κάθε* $\varepsilon > 0$ *(οσοδήποτε μεγάλο) υπάρχει* $\delta > 0$ *με την ιδιότητα:*

$$Αν\ x \in A \cap (\delta, +\infty)\ τότε\ f(x) < -\varepsilon.$$

Γράφουμε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

ii) *Υποθέτουμε ότι, για κάθε* $\delta > 0$, *το A περιέχει ένα τουλάχιστον στοιχείο του διαστήματος* $(-\infty, -\delta)$.

Θα λέμε ότι η συνάρτηση f συγκλίνει, για $x \to -\infty$, *στο* $+\infty$ *αν, για κάθε* $\varepsilon > 0$ *(οσοδήποτε μεγάλο) υπάρχει* $\delta > 0$ *με την ιδιότητα:*

$$Αν\ x \in A \cap (-\infty, -\delta)\ τότε\ f(x) > \varepsilon.$$

Γράφουμε $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Θα λέμε ότι η συνάρτηση f συγκλίνει, για $x \to -\infty$, *στο* $-\infty$ *αν, για κάθε* $\varepsilon > 0$ *(οσοδήποτε μεγάλο) υπάρχει* $\delta > 0$ *με την ιδιότητα:*

$$Αν\ x \in A \cap (-\infty, -\delta)\ τότε\ f(x) < -\varepsilon.$$

Γράφουμε $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Είναι προφανές ότι, με ορισμένες τροποποιήσεις, μπορεί κανείς εύκολα να επαληθεύσει αποτελέσματα αντίστοιχα με αυτά της πρότασης 5.1.20.

Διατυπώνουμε την αντίστοιχη πρόταση:

5.2.14 Πρόταση

Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ *συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι, για κάθε* $\delta > 0$, *το A περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος* $(\delta, +\infty)$. *Ισχύουν τα εξής:*

i) *Αν* $f(x) \le g(x)$ *για κάθε* $x \in A$ *και* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, *τότε* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

ii) *Αν* $f(x) \le g(x)$ *για κάθε* $x \in A$ *και* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, *τότε* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

iii) *Αν* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ *ή* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *και* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, *τότε* $\lim_{x\to+\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty$.

iv) *Αν* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ *ή* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *και* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, *τότε* $\lim_{x\to+\infty} [f(x) + g(x)] = -\infty$.

v) *Αν* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ *με* $a > 0$ *και* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, *τότε* $\lim_{x\to+\infty} [f(x)g(x)] = +\infty$.

Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ *με* $a > 0$ *και* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, *τότε* $\lim_{x\to+\infty} [f(x)g(x)] = -\infty$.

vi) *Αν* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ *με* $a<0$ *και* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, *τότε* $\lim_{x\to+\infty}[f(x)g(x)] = -\infty$.

Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ *με* $a<0$ *και* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, *τότε* $\lim_{x\to+\infty}[f(x)g(x)] = +\infty$.

vii) *Αν* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ *ή* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$,

τότε $\lim_{x\to+\infty}[f(x)g(x)] = +\infty$.

Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *και* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, *τότε* $\lim_{x\to+\infty}[f(x)g(x)] = -\infty$.

viii) *Αν* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *ή* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, *τότε* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

ix) *Αν* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *και* $f(x) > 0$ *για κάθε* $x \in A$, *τότε* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *και* $f(x) < 0$ *για κάθε* $x \in A$, *τότε* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

x) *Αν* $f(x) \geq 0$ *για κάθε* $x \in A$ *και* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *τότε* $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$,

όπου k θετικός ακέραιος.

Όλα τα παραπάνω ισχύουν και για $x \to -\infty$, *αντί* $x \to +\infty$, *με την προϋπόθεση ότι, για κάθε* $\delta > 0$, *το A περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος* $(-\infty, -\delta)$. ■

5.2.15 Παραδείγματα

1. Έστω k θετικός ακέραιος. Εφόσον $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, τότε, με επαγωγή επί του k και εφαρμόζοντας το (vii) της προηγούμενης πρότασης, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\lim_{x\to+\infty} x^k = +\infty$.

Για $x \to -\infty$, ακολουθούμε την ίδια μέθοδο και συμπεραίνουμε ότι:

i) ***k* άρτιος:** Τότε $\lim_{x\to-\infty} x^k = +\infty$.

ii) ***k* περιττός:** Τότε $\lim_{x\to-\infty} x^k = -\infty$.

2. Έστω $f(x) = \dfrac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$ ρητή συνάρτηση με $m > n$ και $a_m, b_n \neq 0$.

Τότε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{m-n}\left(a_m + a_{m-1}\dfrac{1}{x} + \cdots + a_1 \dfrac{1}{x^{m-1}} + a_0 \dfrac{1}{x^m}\right)}{b_n + b_{n-1}\dfrac{1}{x} + \cdots + b_1 \dfrac{1}{x^{n-1}} + b_0 \dfrac{1}{x^n}}.$$

Αλλά, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{a_m + a_{m-1}\dfrac{1}{x} + \cdots + a_1 \dfrac{1}{x^{m-1}} + a_0 \dfrac{1}{x^m}}{b_n + b_{n-1}\dfrac{1}{x} + \cdots + b_1 \dfrac{1}{x^{n-1}} + b_0 \dfrac{1}{x^n}} = \dfrac{a_m}{b_n}$ και $\lim_{x\to+\infty} x^{m-n} = +\infty$.

Με βάση τα (v) και (vi) της πρότασης 5.2.14,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} +\infty, \text{ αν τα } a_m \text{ και } b_n \text{ είναι ομόσημοι} \\ -\infty, \text{ αν τα } a_m \text{ και } b_n \text{ είναι ετερόσημοι} \end{cases}$$

Ειδικά για πολυωνυμικές συναρτήσεις

$$\lim_{x\to+\infty}\left(a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) = \begin{cases} +\infty, \text{ αν } a_m > 0 \\ -\infty, \text{ αν } a_m < 0 \end{cases}$$

Για $x \to -\infty$ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

i) ***m - n* άρτιος:**

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} +\infty, \text{ αν τα } a_m \text{ και } b_n \text{ είναι ομόσημοι} \\ -\infty, \text{ αν τα } a_m \text{ και } b_n \text{ είναι ετερόσημοι} \end{cases}$$

Ειδικά για πολυωνυμικές συναρτήσεις

$$\lim_{x\to-\infty}\left(a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) = \begin{cases} +\infty, \text{ αν } a_m > 0 \\ -\infty, \text{ αν } a_m < 0 \end{cases}$$

ii) ***m - n* περιττός:**

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} -\infty, \text{ αν τα } a_m \text{ και } b_n \text{ είναι ομόσημοι} \\ +\infty, \text{ αν τα } a_m \text{ και } b_n \text{ είναι ετερόσημοι} \end{cases}$$

Ειδικά για πολυωνυμικές συναρτήσεις

$$\lim_{x\to-\infty}\left(a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) = \begin{cases} +\infty, \text{ αν } a_m < 0 \\ -\infty, \text{ αν } a_m > 0 \end{cases}$$

3. Να βρεθούν τα όρια: **i)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+x-1}\right)$, **ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$ και **iii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

Λύση: i) Έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+x-1\right)=+\infty$, σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα. Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x-1}=+\infty$, σύμφωνα με το (x) της πρότασης 5.2.14. Επίσης, $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ και επομένως, σύμφωνα με το (iii) της ίδιας πρότασης παίρνουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+x-1}\right)=+\infty$.

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x^2-x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(2-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)\right]$.

Ακόμη, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=2-1=1>0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(2-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)\right]=+\infty$ (πρόταση 5.2.14 (v)).

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{x^2-x+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)\underset{x<0}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x-x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(2-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)\right]$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=1>0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(2-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)\right]=-\infty$ (πρόταση 5.2.14 (v)).

Άλυτες ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα όρια: **(i)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3-1}{|x+1|}$, **(ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x^2-3x|+5}{x-3}$, **(iii)** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2-2x-1}$,

(iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^2+7x+2}{\sqrt{x^2+2x+4}}$, **(v)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2-3x+1}{\sqrt{x^2-2x-4}}$.

2. Να υπολογιστούν τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-ax\right)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-ax\right)$ για τις διάφορες τιμές του $a\in\mathbb{R}$.

Κλείνουμε την παράγραφο αυτή με ένα αποτέλεσμα, το οποίο είναι γενίκευση της πρότασης 5.1.14. Για να το διατυπώσουμε χρειαζόμαστε κάποιους συμβολισμούς.

5.2.16 Συμβολισμοί*

Έστω $x\in\mathbb{R}$. Αν $\varepsilon>0$, τότε θέτουμε $s(x,\varepsilon)=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$.

Ακόμη, θέτουμε $s(+\infty,\varepsilon)=(\varepsilon,+\infty)$ και $s(-\infty,\varepsilon)=(-\infty,-\varepsilon)$.

Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι, όλοι οι ορισμοί που δώσαμε για τα όρια συναρτήσεων μπορούν να διατυπωθούν κατά ενιαίο τρόπο ως εξής:

Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση και $a,b\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\delta>0$ το σύνολο $\left(A\setminus\{a\}\right)\cap s(a,\delta)$ δεν είναι κενό.

Τότε $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ ***αν και μόνον αν*** *για κάθε* $\varepsilon>0$ *υπάρχει* $\delta>0$ *τέτοιο ώστε,*

$$f(x)\in s(b,\varepsilon),\ \textit{για κάθε}\ x\in\left(A\setminus\{a\}\right)\cap s(a,\delta).$$

Πράγματι, αν $a,b\in\mathbb{R}$, η σχέση $x\in\left(A\setminus\{a\}\right)\cap s(a,\delta)$ είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη: $x\in A$ και $0<|x-a|<\delta$. Επίσης, η σχέση $f(x)\in s(b,\varepsilon)$ είναι ισοδύναμη με την $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Αν $a\in\mathbb{R}$ και $b=+\infty$, η σχέση $f(x)\in s(b,\varepsilon)$ είναι ισοδύναμη με την $f(x)>\varepsilon$.

Για $x\to-\infty$, η σχέση $x\in\left(A\setminus\{a\}\right)\cap s(a,\delta)$ είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη: $x\in A$ και $x<-\delta$. Μπορεί κανείς να ελέγξει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς.

5.2.17 Πρόταση

Δίνονται οι συναρτήσεις $g:A\to B\subseteq\mathbb{R}$ *και* $f:B\to\mathbb{R}$. *Έστω* $a,b\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

Υποθέτουμε ότι:

(i) $\lim\limits_{x\to a}g(x)=b$ *και* $g(x)\neq b$ *για κάθε* $x\neq a$ *και* $x\in s(a,\delta)\cap A$, *όπου* $\delta>0$.

(ii) $\lim\limits_{u\to b} f(u)=c$.

Τότε $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=c$.

***Απόδειξη:** Έστω $\varepsilon>0$. Εφόσον $\lim\limits_{u\to b} f(u)=c$, υπάρχει $\delta'>0$ με την ιδιότητα:

$$u\in\left(B\setminus\{b\}\right)\cap s(b,\delta')\Rightarrow f(u)\in s(c,\varepsilon)\text{ .} \quad (1)$$

Εφόσον $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$, υπάρχει $\delta''>0$ με την ιδιότητα:

$$x\in\left(A\setminus\{a\}\right)\cap s(a,\delta'')\Rightarrow g(x)\in s(b,\delta')\text{ .}$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\delta''<\delta$, οπότε

$$x\in\left(A\setminus\{a\}\right)\cap s(a,\delta'')\Rightarrow g(x)\in\left(B\setminus\{b\}\right)\cap s(b,\delta')\text{ .} \quad (2)$$

Αν συνδυάσουμε τις σχέσεις (1) και (2) θα πάρουμε

$$x\in\left(A\setminus\{a\}\right)\cap s(a,\delta'')\Rightarrow f(g(x))\in s(c,\varepsilon)\text{ .} \qquad \blacksquare$$

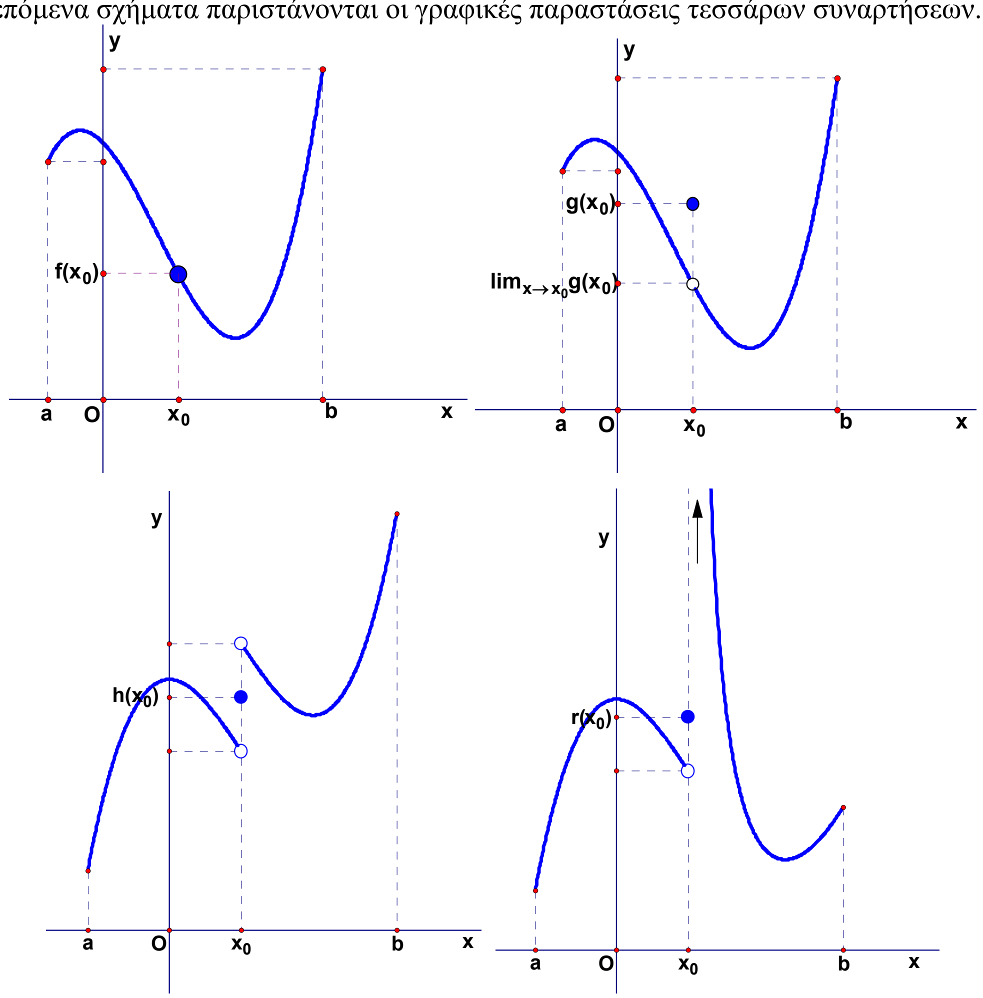
5.2.18 Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

Λύση: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$. Θέτουμε $u=\frac{1}{x}=g(x)$. Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. Εφαρμόζουμε την προηγούμενη πρόταση με $g(x)=\frac{1}{x}$, $f(u)=\frac{\sin u}{u}$, $a=+\infty$ και $b=0$. Έχουμε λοιπόν $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\underset{u>0}{=}\lim\limits_{u\to 0^+}\frac{\sin u}{u}=1$.

5.3 Συνεχείς συναρτήσεις

Στα επόμενα σχήματα παριστάνονται οι γραφικές παραστάσεις τεσσάρων συναρτήσεων.



Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις *g*, *h* και *r* παρουσιάζουν ιδιομορφία στο σημείο x_0. Η γραφική τους παράσταση φαίνεται να «διακόπτεται» στο σημείο αυτό. Η *g* παρουσιάζει μια οπή στη γραφική της παράσταση. Υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ αλλά αυτό δεν είναι ίσο με το $g(x_0)$.

Στις περιπτώσεις των *h* και *r*, παρατηρούμε ουσιωδέστερη διαταραχή στη γραφική παράσταση. Σ' αυτές τις περιπτώσεις δεν υπάρχει ούτε το όριο της συνάρτησης στο x_0. (Η *h* έχει δύο διαφορετικά πεπερασμένα πλευρικά όρια ενώ η *r* έχει ένα πεπερασμένο αριστερό και ένα απειριζόμενο δεξιό πλευρικό όριο). Λέμε ότι οι συναρτήσεις *g*, *h* και *r* είναι **ασυνεχείς** στο x_0 ενώ, η *f* είναι **συνεχής** στο σημείο αυτό.

5.3.1 Ορισμός

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της A.

i) *Αν το x_0 είναι σημείο συσσωρεύσεως του A τότε, λέμε ότι η f είναι* ***συνεχής στο*** $\boldsymbol{x_0}$ *αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και ισούται με την τιμή $f(x_0)$ της f στο x_0.*

***ii)** Αν το x_0 **δεν είναι σημείο συσσωρεύσεως** του Α [1] τότε, η f εξ ορισμού, **θεωρείται συνεχής** στο σημείο αυτό.*

***iii)** Μια συνάρτηση λέγεται **συνεχής** αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.*

5.3.2 Παρατηρήσεις

1. Αν το x_0 είναι σημείο συσσωρεύσεως του *Α* τότε, με βάση τον ορισμό του ορίου, θα έχουμε:

«Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$». (1)

Προφανώς το x_0 ικανοποιεί τη σχέση $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Επομένως, στην περίπτωση αυτή, η φράση «για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$» μπορεί να αντικατασταθεί από τη φράση «για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$». (Ισοδύναμα, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$). Ακόμη, αν το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του *Α*, τότε προφανώς ισχύει η παραπάνω συνθήκη (1).

Επομένως η συνθήκη (1) είναι ικανή και αναγκαία για να είναι η *f* συνεχής στο x_0.

2. Αν η $f : B \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο σημείο x_0, το οποίο είναι σημείο συσσωρεύσεως του συνόλου *Β*, τότε, εφαρμόζοντας την πρόταση 5.2.17, για κάθε συνάρτηση $g : A \to B$ με την ιδιότητα $\lim\limits_{u \to a} g(u) = x_0$, όπου $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, θα έχουμε:

$$\lim_{u \to a} f(g(u)) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{u \to a} g(u)).$$

5.3.3 Παραδείγματα

1. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι συνεχείς σε οποιοδήποτε σημείο του πεδίου ορισμού τους καθώς, $\lim\limits_{x \to x_0} \left(a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \right) = a_m x_0^m + a_{m-1} x_0^{m-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0$.

Γενικότερα, **οι ρητές συναρτήσεις είναι συνεχείς** (ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται στα σημεία του πεδίου ορισμού τους).

Έχουμε ήδη δείξει (πρόταση 5.1.11) ότι **οι εκθετικές συναρτήσεις είναι συνεχείς**.

Επίσης δείξαμε (πρόταση 5.1.16) ότι **οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι συνεχείς**.

2. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = [x]$ δεν είναι συνεχής στα σημεία $x = k \in \mathbb{Z}$.

Πράγματι, αν $k \in \mathbb{Z}$, τότε θεωρούμε τα διαστήματα $(k-1,\ k)$ και $(k,\ k+1)$.

Αν $x \in (k-1,\ k)$ τότε $f(x) = k-1$ και επομένως $\lim\limits_{x \to k^-} f(x) = k-1$.

---

[1] Στην περίπτωση αυτή το x_0 λέγεται **μεμονωμένο** σημείο του *Α*.

Αν $x \in (k,\ k+1)$ τότε $f(x) = k$ και επομένως $\lim_{x \to k^+} f(x) = k$. Εφόσον δεν υπάρχει το $\lim_{x \to k} f(x)$, η f δεν είναι συνεχής στο k.

3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (-\infty, 5] \to \mathbb{R}$, η οποία ορίζεται ως εξής:

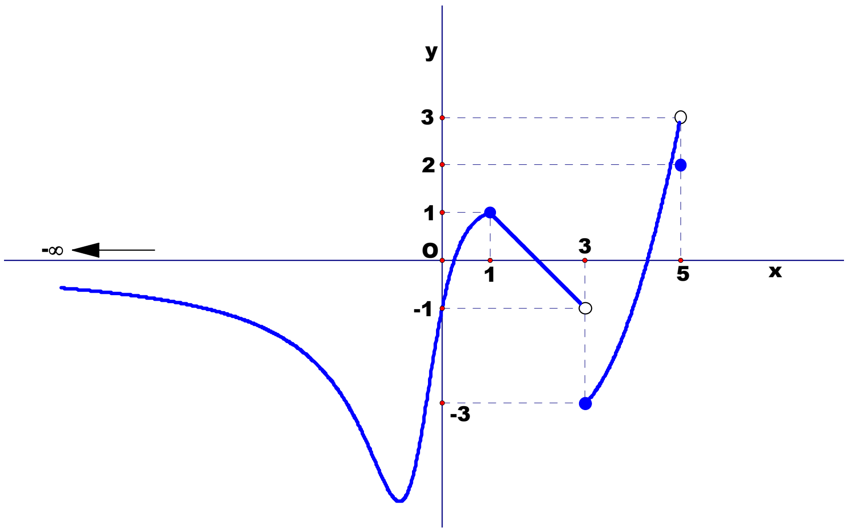
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x-1}{x^2+x+1} & \text{αν } x \le 1, \\ 2-x & \text{αν } 1 < x < 3, \\ x^2-5x+3 & \text{αν } 3 \le x < 5, \\ 2 & \text{αν } x = 5 \end{cases}$$

Να εξεταστεί σε ποια σημεία του πεδίου ορισμού της είναι συνεχής.

Λύση: Στα διαστήματα $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$ και $(3, 5)$ είναι συνεχής γιατί διατηρεί τον ίδιο ρητό ή πολυωνυμικό τύπο. Απομένουν τα σημεία 1, 3 και 5.

Σημείο *x*=1: Σύμφωνα με τον ορισμό 5.3.1, εξετάζουμε πρώτα αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \to 1} f(x)$. Παίρνουμε τα πλευρικά όρια: Επειδή $f(x) = \dfrac{4x-1}{x^2+x+1}$ για $x < 1$, έχουμε $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} \dfrac{4x-1}{x^2+x+1} = 1$. Επειδή $f(x) = 2-x$ για $1 < x < 3$, έχουμε $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1}(2-x) = 1$. Άρα υπάρχει το $\lim_{x \to 1} f(x)$ και ισούται με 1. Αλλά $f(1) = \dfrac{4-1}{1^2+1+1} = 1$, οπότε η f **είναι συνεχής** στο σημείο *x*=1.

Σημείο *x*=3: Επειδή $f(x) = 2-x$ για $1 < x < 3$, έχουμε $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3}(2-x) = -1$. Επειδή $f(x) = x^2-5x+3$ για $3 < x < 5$, έχουμε $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3}(x^2-5x+3) = -3$. Δεν υπάρχει λοπόν το $\lim_{x \to 3} f(x)$ και συνεπώς, η f **δεν είναι συνεχής** στο σημείο *x*=3.



Σημείο *x*=5: Επειδή το 5 είναι δεξιό άκρο του διαστήματος $(-\infty, 5]$, το $\lim_{x \to 5} f(x)$ συμπίπτει με το $\lim_{x \to 5^-} f(x)$. Επομένως, $\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5}(x^2-5x+3) = 3$. Ακόμη, $f(5) = 2$. Συνεπώς, η f **δεν είναι συνεχής** στο σημείο *x*=5.

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τον ακόλουθο τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x^2-x+1}-ax}{x+1} & \text{αν } x<-1,\\ x^3+bx+2 & \text{αν } -1\le x\end{cases}$$

Να προσδιοριστούν τα $a,b\in\mathbb{R}$ ώστε η παραπάνω συνάρτηση να είναι συνεχής.

Λύση: Η συνάρτηση f έχει πράγματι πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ γιατί η υπόρριζη ποσότητα $2x^2-x+1$ είναι πάντα θετική (γιατί;).

Εφόσον η f είναι συνεχής στο -1, θα έχουμε $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=f(-1)$ και επομένως, $\lim\limits_{x\to-1^-}\left[f(x)(x+1)\right]=f(-1)\cdot 0=0$. Αλλά $\lim\limits_{x\to-1^-}\left[f(x)(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-1}\left(\sqrt{2x^2-x+1}-ax\right)=2+a$.

Επομένως $2+a=0\Leftrightarrow a=-2$.

Για $a=-2$ ο τύπος της συνάρτησης γίνεται $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x^2-x+1}+2x}{x+1} & \text{αν } x<-1,\\ x^3+bx+2 & \text{αν } -1\le x\end{cases}$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{2x^2-x+1}+2x}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2-x+1-4x^2}{(x+1)\left(\sqrt{2x^2-x+1}-2x\right)}=$

$$\lim_{x\to-1}\frac{-2x^2-x+1}{(x+1)\left(\sqrt{2x^2-x+1}-2x\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(-2x+1)}{(x+1)\left(\sqrt{2x^2-x+1}-2x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{-2x+1}{\sqrt{2x^2-x+1}-2x}=\frac{-2(-1)+1}{\sqrt{2(-1)^2-(-1)+1}-2(-1)}=\frac{3}{4}.$$

Ακόμη, $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=f(-1)=(-1)^3-b+2=1-b$.

Θα πρέπει να έχουμε λοιπόν $1-b=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow b=\dfrac{1}{4}$.

Άλυτες ασκήσεις

1. Να εξεταστούν ως προς τη συνέχεια οι συναρτήσεις: **(i)** $f(x)=\begin{cases}2+\dfrac{|x-1|}{x}, & \text{αν } 0<x<1\\ \dfrac{3x^3+1}{x^2+1}, & \text{αν } x\ge 1\end{cases}$

και **(ii)** $g(x)=\begin{cases}-x+\sqrt{x^2+4x}, & \text{αν } x\in(-\infty,-4]\cup[0,+\infty)\\ \dfrac{x^2-1}{x^2+4x}, & \text{αν } x\in(-4,0)\end{cases}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3a}{x^3}+1, & \text{αν } 0<x\le 2\\ \dfrac{1-\sqrt{x-1}}{x^2-4}, & \text{αν } x>2\end{cases}$

Να προσδιοριστεί το $a\in\mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής στο σημείο 2.

3. Να προσδιορίσετε τα $a,b\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση *f* με τύπο $f(x)=\begin{cases} a^2x^2+bx-12, & \text{αν } x<1 \\ 5, & \text{αν } x=1 \\ ax+b, & \text{αν } x>1 \end{cases}$

να είναι συνεχής.

Εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες των ορίων (θεώρημα 5.1.6) μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε την επόμενη πρόταση:

5.3.4 Πρόταση

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο σημείο x_0 του κοινού πεδίου ορισμού τους A. Τότε και οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο σημείο x_0:

i) λf, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, ***ii)*** $|f|$, ***iii)*** $f\pm g$, ***iv)*** fg, ***v)*** $\dfrac{f}{g}$, *αν* $g(x)\neq 0$ *για κάθε* $x\in A$,

vi) $\sqrt[k]{f}$, *αν* $f(x)\geq 0$ *για κάθε* $x\in A$, *όπου k θετικός ακέραιος.* ■

Αν χρησιμοποιήσουμε την πρόταση 5.1.14, μπορούμε εξίσου εύκολα να αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση:

5.3.5 Πρόταση

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f:A\to B\subseteq\mathbb{R}$ *και* $g:B\to\mathbb{R}$. *Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής σ' ένα σημείο* $x_0\in A$ *και ότι η g είναι συνεχής στο σημείο* $f(x_0)\in B$.

Τότε η $g\circ f$ *είναι συνεχής στο* x_0. ■

Συνδυάζοντας κανείς τις δύο προηγούμενες προτάσεις με το παράδειγμα 5.3.3.1, μπορεί να κατασκευάσει συναρτήσεις με ένα σωρό πολύπλοκους τύπους. (Αρκεί να περιοριστεί στα πεδία ορισμού για τα οποία έχουν νόημα οι τύποι αυτοί).

Έτσι, η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\cos(2^{-x}+\sqrt{x+1})-\dfrac{x^2-e^{3x}}{x^3+\sin(2x)}$ είναι συνεχής.

Γνωρίζουμε όμως (βλ. Παράδειγμα 5.3.3.2)) ότι, με την ίδια περίπου ευκολία, μπορεί να κατασκευάσει κανείς συναρτήσεις που δεν είναι συνεχείς. Ίσως ένα από τα πιο παθολογικά παραδείγματα είναι η συνάρτηση Dirichlet, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$f(x)=\begin{cases} 1 \text{ αν ο } x \text{ είναι ρητός,} \\ 0 \text{ αν ο } x \text{ είναι άρρητος} \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του πεπερασμένου ορίου μπορεί να δείξει κανείς ότι **δεν υπάρχει** το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$. Άρα η *f* **δεν είναι πουθενά συνεχής!**

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με ορισμένα θεμελιώδη θεωρήματα που αφορούν τις συνεχείς συναρτήσεις. Ξεκινάμε με ένα επώνυμο θεώρημα:

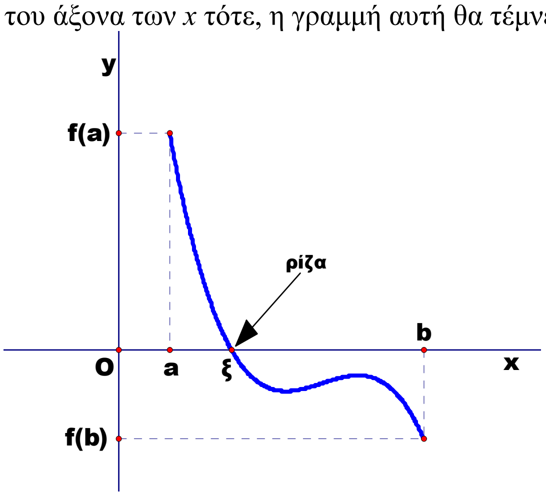
5.3.6 Θεώρημα του Bolzano

Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, *ορισμένη στο κλειστό διάστημα* $[a,b]$. *Υποθέτουμε ότι η* f *παίρνει ετερόσημες τιμές στα άκρα του διαστήματος* $[a,b]$, *δηλαδή* $f(a)f(b)<0$.

Τότε η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο ανοικτό διάστημα (a,b). ■

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού είναι αρκετά λεπτή, γι' αυτό και την παραθέτουμε σε ειδικό παράρτημα στο τέλος αυτού του κεφαλαίου.

Η γεωμετρική σημασία του θεωρήματος του Bolzano είναι η ακόλουθη: Αν φανταστούμε μια συνεχή γραμμή, η οποία συνδέει δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ που βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα των *x* τότε, η γραμμή αυτή θα τέμνει τον άξονα των *x*.



5.3.7 Παρατήρηση

Αν η σχέση $f(a)f(b)<0$ αντικατασταθεί από τη σχέση $f(a)f(b)\le 0$, τότε η διατύπωση του θεωρήματος Bolzano τροποποιείται ως εξής: *«Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, *ορισμένη στο κλειστό διάστημα* $[a,b]$. *Υποθέτουμε ότι* $f(a)f(b)\le 0$. *Τότε η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο κλειστό διάστημα* $[a,b]$*».*

5.3.8 Πόρισμα

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι αν μια συνεχής συνάρτηση, ορισμένη σ' ένα διάστημα (πεπερασμένο ή άπειρο) δεν έχει ρίζες, τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο. ■

5.3.9 Παραδείγματα

1. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^4-x^3+x^2-5x+1$. Να δειχθεί ότι η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$.

Λύση: Παρατηρούμε ότι $f(-1)=(-1)^4-(-1)^3+(-1)^2-5(-1)+1=9>0$ και $f(1)=1^4-1^3+1^2-5\cdot 1+1=-3<0$. Η f παίρνει λοιπόν ετερόσημες τιμές στα άκρα του διαστήματος. Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ με $f(\xi)=0$.

2. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $\cos x+1=x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Λύση: Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\cos x+1-x$. Παρατηρούμε ότι $f(0)=2>0$ και $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1-\dfrac{\pi}{2}<0$ (γιατί $\pi>2$). Από το θεώρημα Bolzano προκύπτει το συμπέρασμα.

5.3.10 Πρόταση (ύπαρξη *n*-στής ρίζας μη αρνητικού αριθμού)

Έστω $a\geq 0$ και n θετικός ακέραιος. Τότε υπάρχει (ακριβώς ένας) μη αρνητικός αριθμός ξ με την ιδιότητα $\xi^n=a$.

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a>0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^n-a$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έχουμε $f(0)=-a<0$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^n-a)=+\infty$, υπάρχει $\delta>0$ με την ιδιότητα $f(x)>1>0$, για κάθε $x\geq\delta$. Ο περιορισμός της f στο διάστημα $[0,\delta]$ παίρνει ετερόσημες τιμές στα άκρα του διαστήματος αυτού. Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η f έχει μια ρίζα στο διάστημα αυτό, δηλαδή, υπάρχει $\xi\in[0,\delta]$ με $\xi^n=a$. ■

Από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ένα ενδιαφέρον πόρισμα:

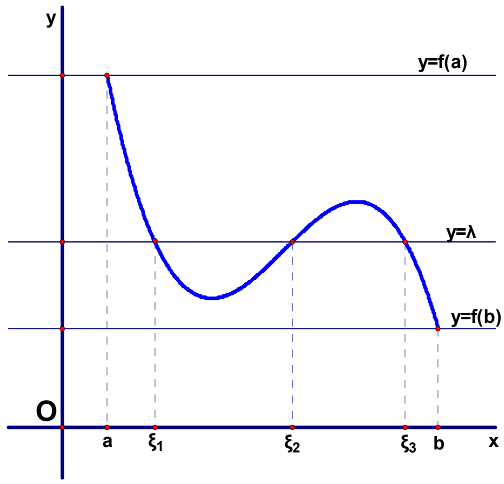
5.3.11 Πόρισμα (θεώρημα ενδιάμεσης τιμής)

Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, *ορισμένη στο κλειστό διάστημα* $[a,b]$. *Αν* λ *είναι ένας αριθμός που βρίσκεται μεταξύ των* $f(a)$ *και* $f(b)$, *τότε υπάρχει* $\xi\in[a,b]$ *τέτοιο ώστε,* $f(\xi)=\lambda$.

Απόδειξη: Η περίπτωση $\lambda=f(a)=f(b)$ είναι τετριμένη. Υποθέτουμε $f(a)<\lambda<f(b)$. Η συνάρτηση $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=f(x)-\lambda$ παίρνει στα άκρα του διαστήματος $[a,b]$ ετερόσημες τιμές. Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει $\xi\in(a,b)$ τέτοιο ώστε, $g(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=\lambda$. Η περίπτωση $f(a)>\lambda>f(b)$ αντιμετωπίζεται παρόμοια. ■

5.3.12 Παρατήρηση

Η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος είναι η ακόλουθη: Κάθε οριζόντια ευθεία που κείται μεταξύ των ευθειών $y=f(a)$ και $y=f(b)$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα



τουλάχιστον σημείο.

5.3.13 Παρατήρηση

Από το προηγούμενο πόρισμα προκύπτει ότι η εικόνα ενός διαστήματος A (πεπερασμένου ή άπειρου), μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης, είναι επίσης διάστημα. Πράγματι, αν y_1, y_2 είναι οι εικόνες δύο σημείων x_1 και x_2, με $x_1<x_2$, τότε και κάθε τιμή y μεταξύ των y_1 και y_2 είναι εικόνα κάποιου σημείου x του διαστήματος $[x_1,x_2]$, (το διάστημα $[x_1,x_2]$ περιέχεται στο πεδίο ορισμού A της συνάρτησης, εφόσον το A είναι διάστημα).

Άλυτες ασκήσεις

1. Να δείξετε ότι οι ακόλουθες εξισώσεις έχουν μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$:

(i) $x^4+30x-29=0$ και **(ii)** $5x^5+25x-11=0$.

2. Δείξτε ότι η εξίσωση $x+\cos x=4$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

3. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις *f* και *g*, για τις οποίες ισχύει $f(x)-g(x)=cx$, όπου $c\in\mathbb{R}$. Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες $r_1<0$ και $r_2>0$, τότε η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[r_1, r_2]$.

4. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g:[a,b]\to\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $f(a)g(b)>0$. Δείξτε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(x)}{x-a}+\dfrac{g(x)}{x-b}=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (a,b).

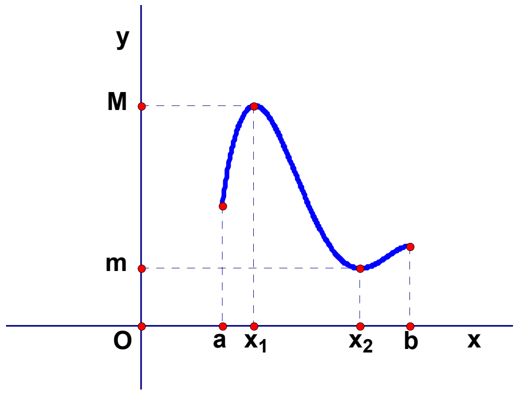
Εξίσου σημαντικό για την κατανόηση της συμπεριφοράς των συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται σε κλειστά διαστήματα είναι το επόμενο θεώρημα.

5.3.14 Θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής

Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Τότε η f είναι φραγμένη.

Επιπλέον, αν $M=\sup\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}$ *και* $m=\inf\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}$, *τότε υπάρχουν* $x_1, x_2 \in[a,b]$ *με* $f(x_1)=M$ *και* $f(x_2)=m$. ■



Και αυτού του θεωρήματος η απόδειξη είναι αρκετά λεπτή και παρατίθεται στο παράρτημα. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την ύπαρξη αντιστρόφου μιας συνεχούς συνάρτησης. Η επόμενη πρόταση αναφέρεται στη μονοτονία των συνεχών συναρτήσεων.

5.3.15 Πρόταση

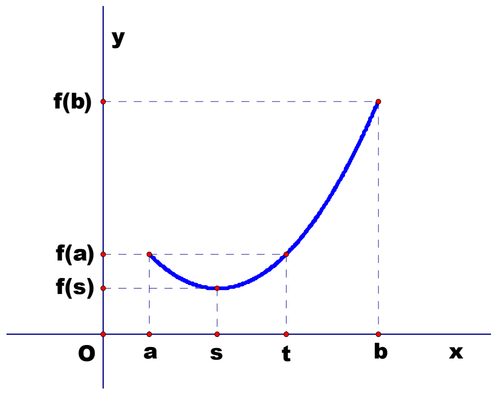
i) *Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. *Αν η f είναι 1-1 τότε είναι γνησίως μονότονη.*

ii) *Γενικότερα, αν* $f:A\to\mathbb{R}$ *είναι μια συνεχής και 1-1 συνάρτηση, όπου A είναι διάστημα (πεπερασμένο ή άπειρο, κλειστό ή όχι), τότε η f είναι γνησίως μονότονη.*

***Απόδειξη:** **i)** Υποθέτουμε ότι $f(a)<f(b)$. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι αν $a<s<b$, τότε $f(a)<f(s)<f(b)$.

Επειδή η *f* είναι 1-1, $f(s)\neq f(a)$. Έστω ότι $f(s)<f(a)$.

Ο περιορισμός της *f* στο διάστημα $[s,b]$ είναι (προφανώς) συνεχής.



Επειδή $f(s) < f(a) < f(b)$, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής προκύπτει ότι υπάρχει $t \in (s, b)$ με $f(t) = f(a)$. Αυτό είναι άτοπο, γιατί η *f* είναι 1-1 ($t \neq a$). Άρα $f(s) > f(a)$.

Με παρόμοιο συλλογισμό δείχνουμε ότι $f(s) < f(b)$.

Έστω τώρα $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Από το προηγούμενο συμπέρασμα προκύπτει ότι $f(a) \leq f(x_1) < f(b)$. Εφαρμόζοντας πάλι το προηγούμενο συμπέρασμα στον περιορισμό της *f* στο διάστημα $[x_1, b]$, προκύπτει ότι $f(a) \leq f(x_1) < f(x_2) \leq f(b)$. Επομένως η *f* είναι γνησίως αύξουσα.

Αν τώρα $f(a) > f(b)$, τότε $-f(a) < -f(b)$ και επομένως η $-f$ είναι γνησίως αύξουσα. Άρα η *f* είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) Θεωρούμε δύο σημεία $x_1 < x_2$ του διαστήματος *A*. Εφόσον η *f* είναι 1-1, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Υποθέτουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Θα δείξουμε ότι η *f* είναι γνησίως αύξουσα. Έστω λοιπόν s, t δύο σημεία του *A* με $s < t$. Θα δείξουμε ότι $f(s) < f(t)$.

Θέτουμε $a = \min\{x_1, x_2, s, t\}$ και $b = \max\{x_1, x_2, s, t\}$. Εφόσον το *A* είναι διάστημα, το κλειστό διάστημα $[a, b]$, το οποίο περιέχει και τα τέσσερα σημεία x_1, x_2, s, t περιέχεται στο *A*. Σύμφωνα με το (i), η *f* είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $[a, b]$. Επειδή $f(x_1) < f(x_2)$, θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, b]$ και επομένως, $f(s) < f(t)$. Η περίπτωση $f(x_1) > f(x_2)$ αντιμετωπίζεται παρόμοια. ■

Σύμφωνα με την παρατήρηση 5.3.13, αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής και 1-1 συνάρτηση, όπου *A* διάστημα, τότε το $B = f(A)$ είναι διάστημα και ορίζεται η αντίστροφη $f^{-1} : B \to A$ συνάρτηση. Με βάση την πρόταση 5.3.15, η *f*, άρα και η f^{-1}, είναι γνησίως μονότονες, του ίδιου τύπου μονοτονίας. Δεν γνωρίζουμε αν η f^{-1} είναι συνεχής. Η επόμενη πρόταση 5.3.17 μας το εξασφαλίζει. Ας δούμε πρώτα ένα λήμμα.

5.3.16 Λήμμα*

Έστω $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ *μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση, όπου* $a < b$ *και* $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$ *η αντίστροφή της. Τότε* $\lim\limits_{y \to f(a)^+} f^{-1}(y) = a$ *και* $\lim\limits_{y \to f(b)^-} f^{-1}(y) = b$.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\varepsilon < b - a$, οπότε $[a, a+\varepsilon) \subseteq [a, b]$. Έστω $\delta = f(a+\varepsilon) - f(a) > 0$. Τότε $f([a, a+\varepsilon)) = [f(a), f(a+\varepsilon)) = [f(a), f(a)+\delta)$. Επομένως, $f^{-1}([f(a), f(a)+\delta)) = [a, a+\varepsilon)$. Αν λοιπόν $0 < y - f(a) < \delta$, τότε $0 < f^{-1}(y) - a < \varepsilon$. Η δεύτερη περίπτωση εξετάζεται παρόμοια. ■

5.3.17 Πρόταση

Έστω $f : A \to B = f(A)$ μια συνεχής και 1-1 συνάρτηση, όπου A διάστημα, που δεν είναι μονοσύνολο. Τότε και η αντίστροφή της $f^{-1} : B \to A$ είναι συνεχής.

***Απόδειξη:** Υποθέτουμε ότι η *f* είναι γνησίως αύξουσα. Έστω $y_0 = f(x_0) \in B$, όπου $x_0 \in A$.

Αν το x_0 είναι αριστερό άκρο του διαστήματος *A*, τότε το $y_0 = f(x_0)$ είναι αριστερό άκρο του διαστήματος *B*. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει $b > x_0$ με $[x_0, b] \subseteq A$. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο λήμμα για τον περιορισμό της *f* στο διάστημα $[x_0, b]$, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{y \to y_0^+} f^{-1}(y) = x_0$.

Αν το x_0 είναι δεξιό άκρο του διαστήματος *A*, τότε το $y_0 = f(x_0)$ είναι δεξιό άκρο του διαστήματος *B*. Στην περίπτωση αυτή υπάρχει $a < x_0$ με $[a, x_0] \subseteq A$. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο λήμμα για τον περιορισμό της *f* στο διάστημα $[a, x_0]$, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{y \to y_0^-} f^{-1}(y) = x_0$.

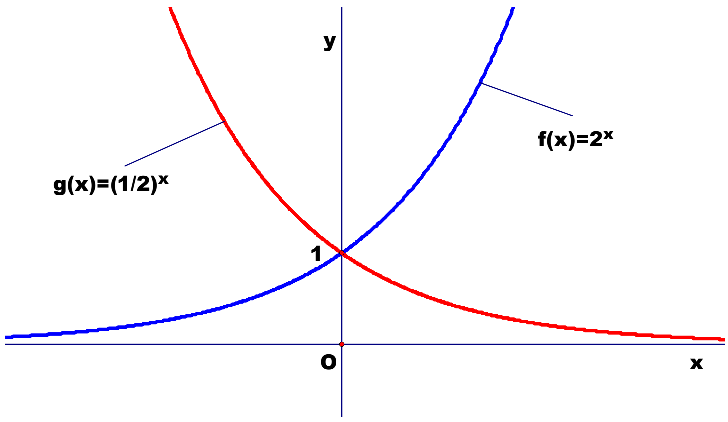
Αν τέλος, το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος *A*, τότε υπάρχουν $a < x_0 < b$ με $[a, b] \subseteq A$. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο λήμμα για τον περιορισμό της *f* στα διαστήματα $[a, x_0]$ και $[x_0, b]$, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{y \to y_0^-} f^{-1}(y) = \lim_{y \to y_0^+} f^{-1}(y) = x_0$.

Αν η *f* είναι γνησίως φθίνουσα, τότε η $-f : A \to -B = \{-y \mid y \in B\}$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Παρατηρούμε ότι $f^{-1} = (-f)^{-1} \circ \phi$, όπου $\phi : B \to -B$ είναι η συνεχής συνάρτηση με τύπο $\phi(y) = -y$. Η f^{-1} σαν σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής. ■

5.4 Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις-κυκλομετρικές συναρτήσεις

Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις

Έστω $a > 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\exp_a : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ με τύπο $\exp_a(x) = a^x$. Έχουμε δείξει (πρόταση 5.1.11) ότι η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής. Ακόμη, αν $a > 1$, η $\exp_a$ είναι γνησίως αύξουσα, αν $a = 1$ είναι σταθερή ενώ αν $a < 1$, τότε είναι γνησίως φθίνουσα.



5.4.1 Πρόταση

i) *Αν $a>1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$.*

ii) *Αν $a<1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.*

Απόδειξη: i) Έστω $\varepsilon>0$. Η ακολουθία $\left(a^n\right)$ απειρίζεται θετικά (παράδειγμα 2.10.6.4(i)). Άρα, υπάρχει θετικός ακέραιος n_0 με $a^n>\varepsilon$, για κάθε $n\geq n_0$. Εφόσον η $\exp_a$ είναι γνησίως αύξουσα, θα έχουμε $a^x \geq a^{n_0} > \varepsilon$, για κάθε $x\in[n_0,+\infty)$.

Επίσης, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{a^{-x}} = \lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{1}{a^u}$. Επειδή $\lim\limits_{u\to+\infty} a^u = +\infty$, από το (viii) της πρότασης 5.2.14, προκύπτει ότι $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{1}{a^u} = 0$.

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(a^{-1}\right)^{-x} = \lim\limits_{u\to-\infty} \left(a^{-1}\right)^{u} \underset{a^{-1}>1}{=} 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(a^{-1}\right)^{-x} = \lim\limits_{u\to+\infty} \left(a^{-1}\right)^{u} \underset{a^{-1}>1}{=} +\infty$. ■

Αν $a>0$ και $a\neq 1$, τότε με βάση την παρατήρηση 5.3.13, η συνάρτηση $\exp_a$ είναι επί του $(0,+\infty)$. Επομένως (όντας και 1-1) αντιστρέφεται.

5.4.2 Ορισμός

*Έστω $a>0$ και $a\neq 1$. Θέτουμε $\log_a = \exp_a^{-1} : (0,+\infty)\to\mathbb{R}$. Αν $x>0$, τότε ο μοναδικός αριθμός $y=\log_a x$ με την ιδιότητα $a^y = x$ λέγεται **λογάριθμος με βάση το a του x**.*

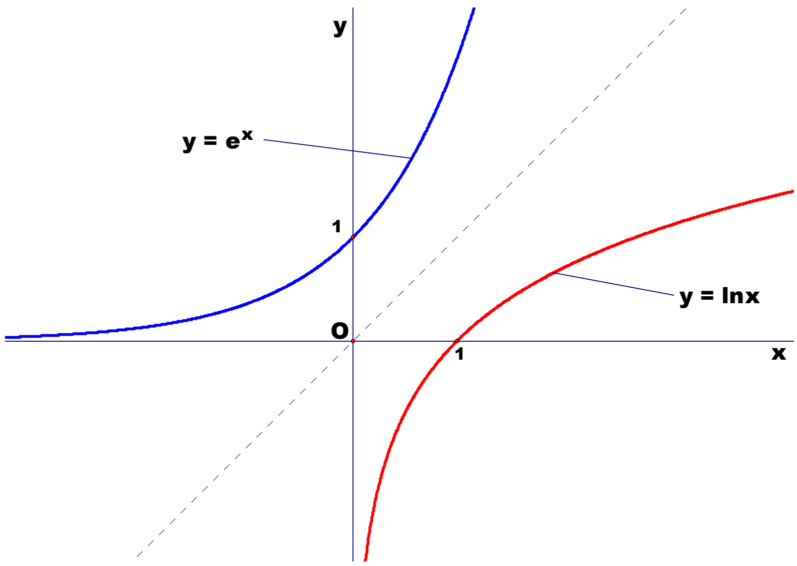
Δηλαδή, ισχύει η ισοδυναμία $y=\log_a x \Leftrightarrow a^y = x$.

5.4.3 Παρατήρηση

Από την πρόταση 5.3.17 συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $\log_a : (0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής.

5.4.4 Ορισμός

Αν $a = e = 2{,}71828182845904....$ *τότε θέτουμε* $\ln x = \log_e x$, *για κάθε* $x > 0$. *Ο αριθμός* $\ln x$ *λέγεται **νεπέριος ή φυσικός λογάριθμος** του x.*



Στο παραπάνω σχήμα παριστάνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = e^x$ και της αντίστροφής της $y = \ln x$.

Οι δύο γραφικές παραστάσεις είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

5.4.5 Πρόταση

Έστω $a > 0$ *και* $a \neq 1$. *Τότε ισχύουν τα εξής:*

i) $\log_a(1) = 0$.

ii) $\log_{a^{-1}} x = -\log_a x$.

iii) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, *για κάθε* $x, y \in (0, +\infty)$.

iv) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$, *για κάθε* $x, y \in (0, +\infty)$.

v) $\log_a(x^\lambda) = \lambda \log_a x$, *για κάθε* $x \in (0, +\infty)$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}$.

vi) *Αν* $b > 0$ *και* $b \neq 1$, *τότε* $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ *(τύπος αλλαγής βάσης).*

Απόδειξη: i) Επειδή $a^0 = 1$, έπεται $\log_a(1) = 0$.

ii) $(a^{-1})^{-\log_a x} = a^{\log_a x} = x$. Επομένως, $\log_{a^{-1}} x = -\log_a x$.

iii) $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy$. Επομένως $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$.

iv) $a^{\log_a x-\log_a y}=a^{\log_a x}a^{-\log_a y}=\dfrac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}}=\dfrac{x}{y}$. Επομένως $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$.

v) $a^{\lambda\log_a x}=\left(a^{\log_a x}\right)^{\lambda}=x^{\lambda}$. Επομένως $\log_a(x^{\lambda})=\lambda\log_a x$.

vi) $a^{\log_a b\cdot\log_b x}=\left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b x}=b^{\log_b x}=x$. Επομένως, $\log_a b\cdot\log_b x=\log_a x\Leftrightarrow\log_b x=\dfrac{\log_a x}{\log_a b}$.

■

5.4.6 Πρόταση

i) *Αν* $a>1$, *τότε* $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$ *και* $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x=-\infty$.

ii) *Αν* $a<1$, *τότε* $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty$ *και* $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x=+\infty$.

Απόδειξη: i) Έστω $\varepsilon>0$. Θέτουμε $\delta=a^{\varepsilon}>0$. Εφόσον η $\log_a$ είναι γνησίως αύξουσα, για κάθε $x>\delta$ θα έχουμε $\log_a x>\log_a\delta=\varepsilon$.

Επομένως, $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$.

Για $\varepsilon>0$, θέτουμε $\delta=a^{-\varepsilon}>0$. Αν $0<x<\delta$, τότε $\log_a x<\log_a\delta=-\varepsilon$.

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=-\lim\limits_{x\to+\infty}\log_{a^{-1}}x\underset{a^{-1}>1}{=}-(+\infty)=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}\log_a x=-\lim\limits_{x\to-\infty}\log_{a^{-1}}x\underset{a^{-1}>1}{=}-(-\infty)=+\infty$. ■

5.4.7 Παραδείγματα

1. Να λυθεί η ανίσωση $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2}<\left(\dfrac{3}{2}\right)^{4-5x}$.

Λύση: $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2}<\left(\dfrac{3}{2}\right)^{4-5x}\Leftrightarrow\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2}<\left(\dfrac{2}{3}\right)^{5x-4}\Leftrightarrow\exp_{2/3}(x^2)<\exp_{2/3}(5x-4)$.

Επειδή $\dfrac{2}{3}<1$, η συνάρτηση $\exp_{2/3}$ είναι γνησίως φθίνουσα και επομένως πρέπει $x^2>5x-4\Leftrightarrow x^2-5x+4>0\Leftrightarrow(x-1)(x-4)>0\Leftrightarrow(x<1$ ή $x>4)$.

2. Να λυθεί η εξίσωση $a^{x^2-x-2}=1$, όπου $a>0$.

Λύση: Έστω $a=1$. Τότε η σχέση $a^{x^2-x-2}=1$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έστω $a\neq1$. Τότε η σχέση $a^{x^2-x-2}=1=a^0$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση $x^2-x-2=0\Leftrightarrow x=-1$ ή $x=2$.

3. Να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπους $f(x)=x^x$ και $g(x)=x^{\sin x}$ είναι συνεχείς.

Απόδειξη: Έχουμε $f(x)=x^x=e^{\ln(x^x)}=e^{x\ln x}$, δηλαδή η f είναι η σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $y=e^x$ και $y=x\ln x$. Άρα η f είναι συνεχής.

Ομοίως, $g(x)=x^{\sin x}=e^{\sin x\ln x}$ και η g είναι σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $y=e^x$ και $y=\sin x\ln x$. Επομένως και αυτή είναι συνεχής.

4. Να αποδείξετε τα ακόλουθα:

(i) Αν $a,b,c>0$, $b\neq 1$ και $ab\neq 1$, τότε $\log_{ab}c=\dfrac{\log_b c}{1+\log_b a}$.

(ii) $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdots\log_n(n+1)=\log_2(n+1)$.

(iii) $\dfrac{1}{\log_2\pi}+\dfrac{1}{\log_5\pi}>2$, όπου π = 3,14159265358979323846264338327950...

Απόδειξη: **(i)** Από τον τύπο αλλαγής βάσης (πρόταση 5.4.3 (vi)) έχουμε: $\log_{ab}c=\dfrac{\log_b c}{\log_b(ab)}$ $=\dfrac{\log_b c}{\log_b a+\log_b b}=\dfrac{\log_b c}{\log_b a+1}$.

(ii) $\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdots\log_n(n+1)=\cancel{\log_2 3}\cdot\dfrac{\cancel{\log_2 4}}{\cancel{\log_2 3}}\cdot\dfrac{\cancel{\log_2 5}}{\cancel{\log_2 4}}\cdots\dfrac{\cancel{\log_2 n}}{\cancel{\log_2(n-1)}}\dfrac{\log_2(n+1)}{\cancel{\log_2 n}}=$

$=\log_2(n+1)$.

(iii) $\dfrac{1}{\log_2\pi}+\dfrac{1}{\log_5\pi}=\dfrac{\log_2 2}{\log_2\pi}+\dfrac{\log_5 5}{\log_5\pi}=\log_\pi 2+\log_\pi 5=\log_\pi(2\cdot 5)=\log_\pi 10$. Επομένως,

$\dfrac{1}{\log_2\pi}+\dfrac{1}{\log_5\pi}>2\Leftrightarrow\log_\pi 10>2\Leftrightarrow\pi^{\log_\pi 10}>\pi^2\Leftrightarrow 10>\pi^2\Leftrightarrow$

$\pi<\sqrt{10}$. Η τελευταία σχέση ισχύει γιατί, $\sqrt{10}=3{,}16227....>\pi$.

5.4.8 Πρόταση

Ισχύει: $1-\dfrac{1}{x}\le\ln x\le x-1$, *για κάθε* $x>0$.

Απόδειξη: Αν στη σχέση $e^x\ge 1+x$ θέσουμε $x-1$ αντί x, παίρνουμε $e^{x-1}\ge x$. Παίρνοντας τους φυσικούς λογαρίθμους και στα δύο μέλη, έχουμε $\ln x\le x-1$.

Αν στην τελευταία σχέση θέσουμε x^{-1} αντί x, θα πάρουμε $\ln(x^{-1})\le\dfrac{1}{x}-1\Leftrightarrow-\ln x\le\dfrac{1}{x}-1\Leftrightarrow$ $\ln x\ge 1-\dfrac{1}{x}$. ■

5.4.9 Παραδείγματα

1. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $a_n=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$, $n=1,2,\dots$

Λύση: Στη σχέση $1-\dfrac{1}{x}\le\ln x\le x-1$, με $x>0$, που αποδείξαμε προηγουμένως, θέτουμε $x=\dfrac{k+1}{k}$, όπου $k=n,n+1,\dots,2n$.

Παίρνουμε $1-\frac{k}{k+1}\le \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\le \frac{k+1}{k}-1 \Leftrightarrow \frac{1}{k+1}\le \ln(k+1)-\ln k\le \frac{1}{k}$.

Αθροίζοντας τις σχέσεις $\frac{1}{k+1}\le \ln(k+1)-\ln k\le \frac{1}{k}$, $k=n,n+1,\ldots,2n$ κατά μέλη, παίρνουμε

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\le (\cancel{\ln(n+1)}-\ln n)+(\cancel{\ln(n+2)}-\cancel{\ln(n+1)})+(\cancel{\ln(n+3)}-\cancel{\ln(n+2)})$$

$$+\cdots+(\ln(2n+1)-\cancel{\ln(2n)})\le \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n}\le \ln(2n+1)-\ln n\le \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_n+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n}\le \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)\le a_n$$

Από τη σχέση $a_n+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n}\le \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$ παίρνουμε $a_n\le \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{n}$.

Άρα, $\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)\le a_n\le \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{n}$.

Είναι $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n}=2$ και $\lim\limits_{x\to 2}\ln x=\ln 2$ (εφόσον η συνάρτηση του λογαρίθμου είναι συνεχής). Από την παρατήρηση 5.3.2.2 προκύπτει ότι $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)=\ln 2$.

Ακόμη, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$. Άρα $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{n}\right]=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)=\ln 2$.

Από το κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\ln 2$.

2. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$, $n=1,2,\ldots$ συγκλίνει.

Απόδειξη: Θέτουμε $x=\frac{k+1}{k}$, $k=1,2,\ldots,n$, στη σχέση $1-\frac{1}{x}\le \ln x\le x-1$ και παίρνουμε $\frac{1}{k+1}\le \ln(k+1)-\ln k\le \frac{1}{k}$. Αθροίζοντας για $k=1,2,\ldots,n-1$ παίρνουμε

$\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\le \ln n\le \sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1\le \ln n\le \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n}\le \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\le 1$, δηλαδή έχουμε $\frac{1}{n}\le a_n\le 1$. Επομένως η ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη. Θα δείξουμε ότι είναι και γνησίως φθίνουσα. Έχουμε, $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

Αλλά $\frac{1}{n+1}<\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \Leftrightarrow 1<(n+1)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \Leftrightarrow 1<\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \Leftrightarrow e<\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$. Η τελευταία σχέση ισχύει, γιατί η ακολουθία $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$, $n=1,2,\ldots$ είναι γνησίως φθίνουσα και έχει όριο τον e (παράδειγμα 2.9.2.1).

Επομένως η (a_n) είναι γνησίως φθίνουσα και, όντας φραγμένη, συγκλίνει.

Σημείωση: Το $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$ συμβολίζεται με το γράμμα γ και λέγεται **σταθερά του Euler**.

3. Να δειχθεί ότι οι σειρές $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sqrt[n]{\ln n}$ και $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ απειρίζονται θετικά.

Απόδειξη: Από τη σχέση $1-\frac{1}{n}\le \ln n\le n-1$ προκύπτει ότι $\sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}\le\sqrt[n]{\ln n}$ και $\frac{1}{\ln n}\ge\frac{1}{n-1}$, για κάθε $n=2,3,\ldots$

Αλλά, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}=1$ (γιατί $\sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}<\sqrt[n]{1}=1$ και $\sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}\ge\sqrt[n]{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\to 1$) και επομένως η ακολουθία $(\sqrt[n]{\ln n})$ δεν είναι μηδενική. Άρα $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sqrt[n]{\ln n}=+\infty$.

Επειδή $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}=\zeta(1)=+\infty$, και η σειρά $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ απειρίζεται θετικά.

4. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

Απόδειξη: Αρχικά εξετάζουμε την περίπτωση $x\to+\infty$. Έχουμε $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(\frac{x+1}{x}\right)^x=$ $=e^{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^x}=e^{x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}$. Λόγω της συνέχειας της εκθετικής συνάρτησης, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)=1$.

Θέτουμε $\frac{x+1}{x}$ αντί x, στη σχέση $1-\frac{1}{x}\le\ln x\le x-1$ και παίρνουμε $\frac{1}{x+1}\le\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\le\frac{1}{x}$.

Πολλαπλασιάζοντας με x (το x λαμβάνεται θετικό, γιατί τείνει στο $+\infty$) παίρνουμε $\frac{x}{x+1}\le x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\le 1$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1$, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)=1$.

Τώρα, αν $x\to-\infty$, έχουμε: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x}=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)}\frac{x}{x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)}\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)}.$$

Θέτουμε $u=-x-1\to+\infty$ και εφαρμόζουμε την πρόταση 5.2.17.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)}=\lim\limits_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=e$.

5. Να υπολογιστούν τα όρια: **(i)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}$, όπου $a,b\in\mathbb{R}$, **(ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$,

(iii) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$ και **(iv)** $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}$.

Λύση: (i) $\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=e^{\ln\left(\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}\right)}=e^{bx\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}$. Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to+\infty}\left(bx\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right)$.

Έχουμε: $1-\frac{1}{1+\frac{a}{x}}\le\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\le 1+\frac{a}{x}-1\Leftrightarrow\frac{a}{x+a}\le\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\le\frac{a}{x}\underset{x>0}{\Leftrightarrow}\frac{ax}{x+a}\le x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\le a$.

Αλλά $\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{x+a}=a$ και επομένως (κριτήριο παρεμβολής) $\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right)=a$.

Άρα $\lim_{x\to+\infty}\left(bx\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right)=ab$ και συνεπώς $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=e^{ab}$.

(ii) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2+3}{x-2}\right)^{2x-4+3}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{2(x-2)}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{3}=$

$\underset{u=x-2\to+\infty}{=}\lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{3}{u}\right)^{2u}=e^6$, σύμφωνα με το **(i)**.

(iii) Έχουμε $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$. Η βασική μας ανισότητα, για $1+\frac{1}{x}$ στη θέση του x, δίνει $\frac{1}{x+1}\le\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\le\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{x^2}{x+1}\le x^2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$. Άρα $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)=+\infty$ (πρόταση 5.2.14(i)).

Επομένως, $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\underset{u=x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\to+\infty}{=}\lim_{u\to+\infty}e^u=+\infty$.

(iv) Έχουμε: $\frac{kx}{1+kx}\le\ln(1+kx)\le kx$. Αν $x\to 0^+$, τότε $x>0$ και επομένως $\frac{k}{1+kx}\le$ $\le\frac{\ln(1+kx)}{x}\le k$. Από το κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+kx)}{x}=k$. Με τον ίδιο τρόπο (αλλάζοντας φορά στις ανισότητες) παίρνουμε $\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+kx)}{x}=k$. Επομένως $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}=k$.

6. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a^x}{a^x+1}$, $a>0$.

Λύση: Αν $a=1$, τότε $\frac{a^x}{a^x+1}=\frac{1}{2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έστω $0<a<1$. Τότε $\lim_{x\to+\infty}a^x=0$ και $\lim_{x\to-\infty}a^x=+\infty$ (πρόταση 5.4.1 (ii)). Επομένως,

$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{a^x+1}\underset{u=a^x\to 0}{=}\lim_{u\to 0}\frac{u}{u+1}=0$ και $\lim_{x\to-\infty}\frac{a^x}{a^x+1}\underset{u=a^x\to+\infty}{=}\lim_{u\to+\infty}\frac{u}{u+1}=1$.

Αν $a>1$, πάλι με βάση την πρόταση 5.4.1 βρίσκουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{a^x+1}=1$ και $\lim_{x\to-\infty}\frac{a^x}{a^x+1}=0$.

7. Να δειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η ακολουθία $\cos^n\left(\frac{x}{n}\right)$, $n = 1,2,\ldots$ τείνει στο 1.

Απόδειξη: Για $x = 0$, η ακολουθία είναι σταθερή (ίση με 1). Υποθέτουμε ότι $x \neq 0$. Αν το n είναι αρκούντως μεγάλο (μεγαλύτερο από $\frac{2|x|}{\pi}$), τότε $\frac{x}{n} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και επομένως, $\cos\left(\frac{x}{n}\right) > 0$. Άρα ορίζεται ο λογάριθμος $\ln\left(\cos^n\left(\frac{x}{n}\right)\right) = n\ln\left(\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)$.

Επειδή $\cos^n\left(\frac{x}{n}\right) = e^{n\ln\left(\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)}$, αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n\ln\left(\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)\right] = 0$.

Θέτουμε $y = \frac{x}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Τότε, $n\ln\left(\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right) = x \cdot \frac{\ln(\cos y)}{y}$.

Με βάση την πρόταση 5.2.17, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n\ln\left(\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)\right] = x \cdot \lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(\cos y)}{y}$.

Σύμφωνα με την ανισότητα της πρότασης 5.4.8, έχουμε $1 - \frac{1}{\cos y} \le \ln(\cos y) \le \cos y - 1$.

Αν $y > 0$, τότε $\frac{\cos y - 1}{y\cos y} \le \frac{\ln(\cos y)}{y} \le \frac{\cos y - 1}{y}$. Επειδή $\lim\limits_{y\to 0}\left(\frac{\cos y - 1}{y}\right) = 0$ (πρόταση 5.1.17) και $\lim\limits_{y\to 0}\cos y = 1$, από το κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε $\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{\ln(\cos y)}{y} = 0$. Αν $y < 0$ απλώς αλλάζουμε φορά στην ανισότητα και παίρνουμε $\lim\limits_{y\to 0^-}\frac{\ln(\cos y)}{y} = 0$. Άρα $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(\cos y)}{y} = 0$ και επομένως, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[n\ln\left(\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)\right] = 0$.

Άλυτες ασκήσεις

1. Αν $x, y, a, b > 0$, $a, b \neq 1$ και $a^x = b^y$ και $x^b = y^a$, να δειχτεί ότι: $\left(\frac{x}{\log_a b}\right)^a = \left(\frac{y}{\log_b a}\right)^b$.

2. Να δείξετε ότι: $\frac{e^a + e^b}{2} > e^{\frac{a+b}{2}}$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \neq b$.

3. Αν $0 < a < b$, να δείξετε ότι $\frac{2}{\sqrt{b}} \le \frac{\ln b - \ln a}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} \le \frac{2}{\sqrt{a}}$.

4. Να δείξετε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(\ln(n+1) - \ln n)$ δεν συγκλίνει.

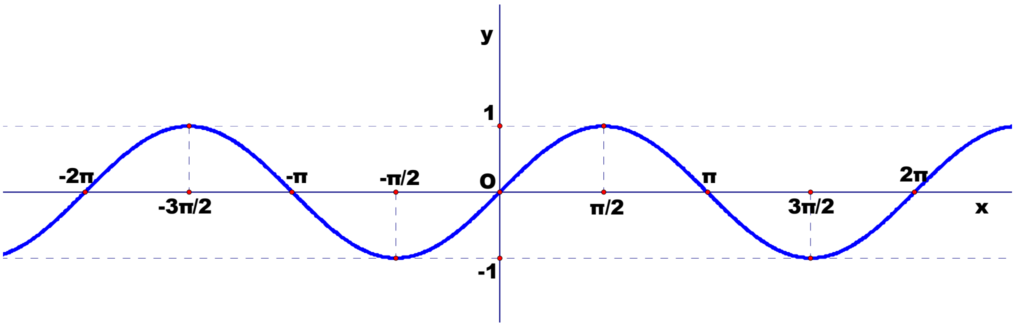
5. Έστω $a_n > 0$, για κάθε $n = 0,1,2,\ldots$ Να δείξετε την ισοδυναμία: Η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\ln(1 + a_n)$ συγκλίνει.

6. Να υπολογίσετε τα όρια: **(i)** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x - 1}{x - 1}$, **(ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(\ln(x+a) - \ln x\right)\right)$, **(iii)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$, **(iv)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)^x$ με $n > 0$, **(v)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$, **(vi)** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

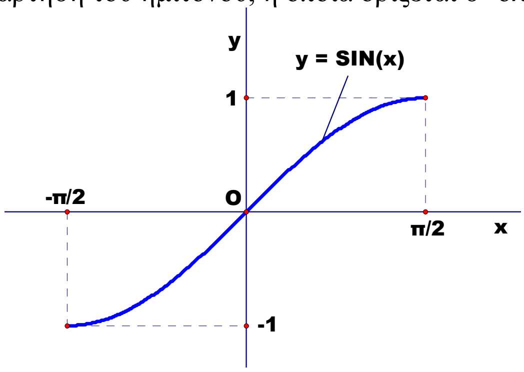
Κυκλομετρικές συναρτήσεις

Α) Τόξο ημιτόνου

Θεωρούμε τη συνάρτηση του ημιτόνου $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση αυτή δεν είναι 1-1.



Ο περιορισμός της όμως στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Ας συμβολίσουμε με κεφαλαία SIN την καινούρια συνάρτηση (περιορισμό) για να την ξεχωρίζουμε από τη συνάρτηση του ημιτόνου, η οποία ορίζεται σ' όλο το $\mathbb{R}$.



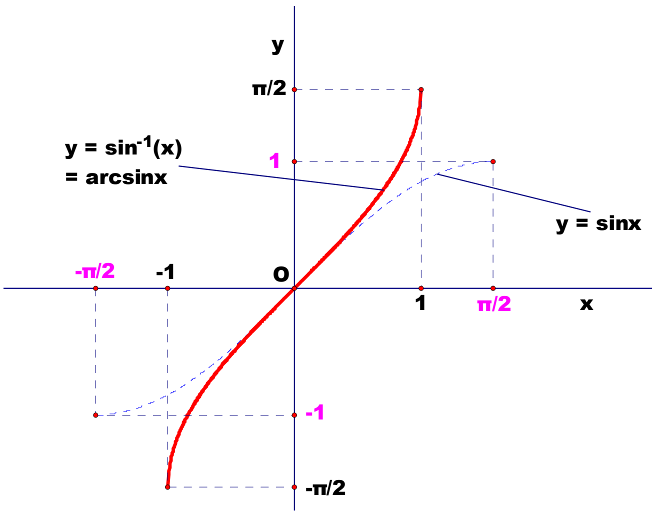
Επειδή η συνάρτηση $\text{SIN} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ είναι γνησίως αύξουσα και επί του $[-1, 1]$ (παρατήρηση 5.3.13), αυτή αντιστρέφεται.

Η αντίστροφη συνάρτηση συμβολίζεται με arcsin ή **καταχρηστικά** με $\sin^{-1}$.

Είναι δηλαδή

$$\arcsin = \sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

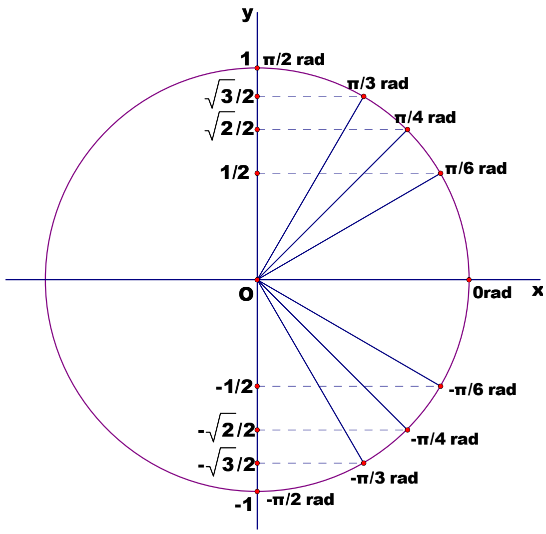
Η παραπάνω συνάρτηση απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα με την παχιά κόκκινη γραμμή και η συνάρτηση $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ με την λεπτή διακεκομμένη μπλέ γραμμή.



Σύμφωνα με την πρόταση 5.3.17, **η συνάρτηση $\sin^{-1}$ είναι συνεχής**.

4.4.10 Σημείωση

Πρακτικά, αλλά και ουσιαστικά, ο ορισμός της συνάρτησης $\sin^{-1}$ μας επιτρέπει να βρίσκουμε την τιμή της σ' ένα σημείο $x \in [-1, 1]$, σκεφτόμενοι ως εξής: Ποια γωνία θ στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ έχει ημίτονο το x;



Έτσι έχουμε:

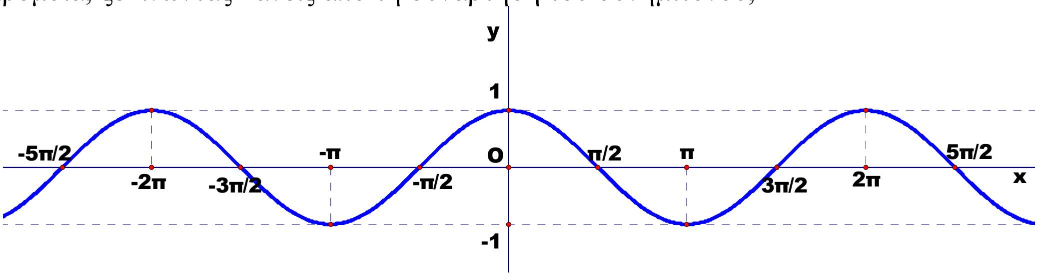
$\sin^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$,

$\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$,

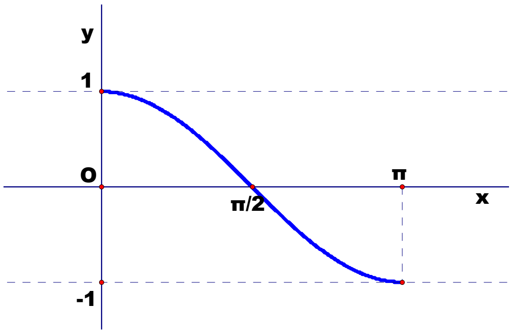
$\sin^{-1}(0) = 0$, $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$, $\sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$.

B) Τόξο συνημιτόνου

Παρόμοια, ξεκινώντας κανείς από τη συνάρτηση του συνημιτόνου,



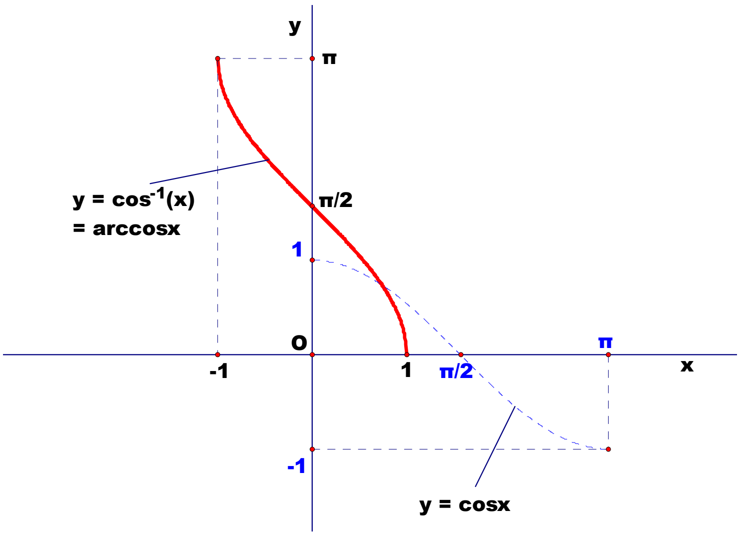
θεωρεί τον περιορισμό της στο διάστημα $[0, \pi]$,



που είναι γνησίως φθίνουσα και επί του $[-1, 1]$ και άρα αντιστρέψιμη συνάρτηση.

Η αντίστροφη του περιορισμού συμβολίζεται με arccos ή **καταχρηστικά** με $\cos^{-1}$ και είναι και αυτή συνεχής συνάρτηση.

Η παραπάνω συνάρτηση απεικονίζεται στο σχήμα με την παχιά κόκκινη γραμμή και η συνάρτηση $y=\cos x$, $x\in[0,\pi]$ με την λεπτή διακεκομμένη μπλέ γραμμή.



5.4.11 Σημείωση

Και εδώ, για να βρούμε την τιμή της συνάρτησης $\cos^{-1}$ σ' ένα σημείο $x\in[-1,1]$, σκεφτόμαστε ως εξής: Ποια γωνία θ στο διάστημα $[0,\pi]$ έχει συνημίτονο το *x*; Έτσι έχουμε:

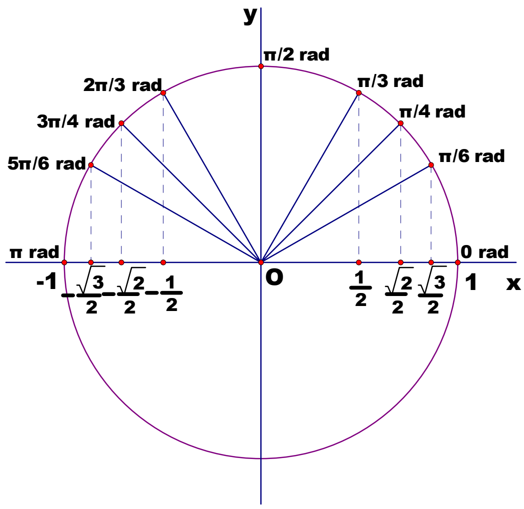
$\cos^{-1}(1)=0$, $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$,

$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$, $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$,

$\cos^{-1}(0)=\frac{\pi}{2}$, $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$,

$\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$, $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{3}$,

$\cos^{-1}(-1)=\pi$.



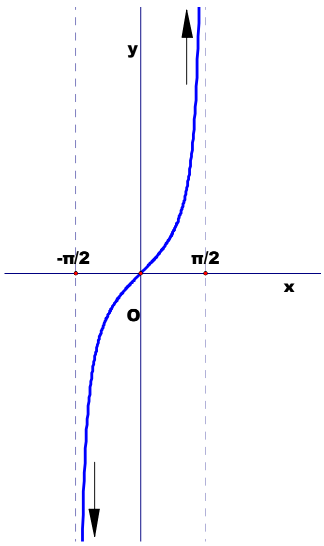
5.4.12 Παράδειγμα

Να αποδειχθεί ότι, για κάθε $x\in[-1,1]$ ισχύει η σχέση: $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$.

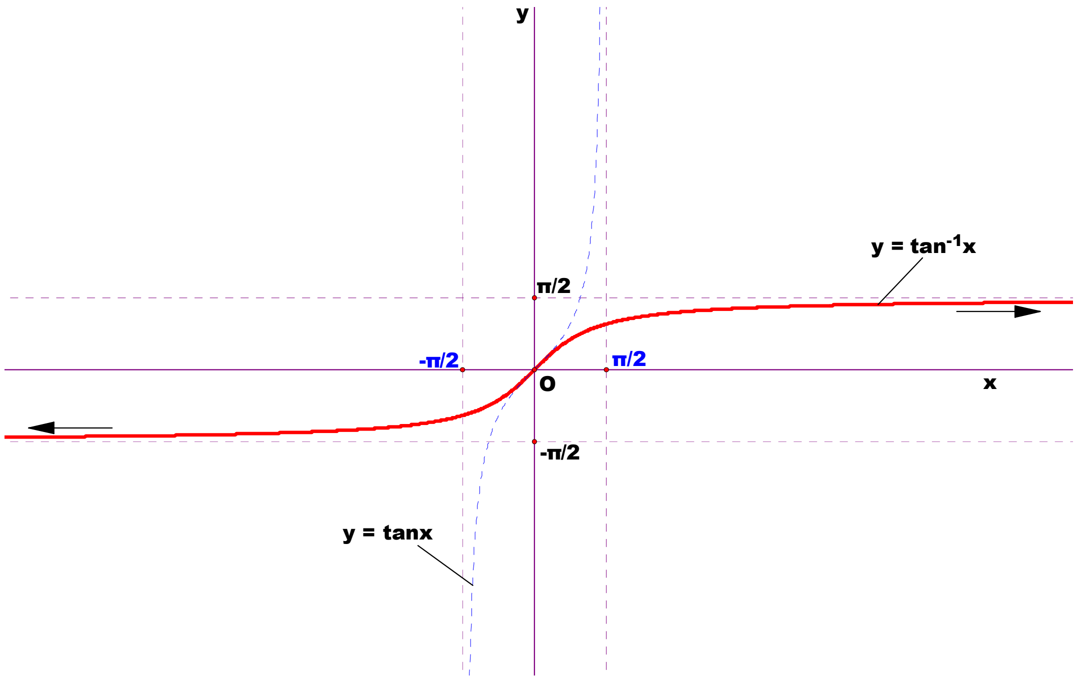
Απόδειξη: Έστω $\theta=\sin^{-1}x$. Από τον ορισμό της συνάρτησης $\sin^{-1}$ προκύπτει ότι $\sin\theta=x$ και $-\pi/2\le\theta\le\pi/2$. Επομένως, $\pi\ge\pi/2-\theta\ge 0$. Για τη γωνία $\pi/2-\theta$ παρατηρούμε ότι $\cos(\pi/2-\theta)=\sin\theta=x$. Εφόσον $\pi/2-\theta\in[0,\pi]$, έπεται ότι $\pi/2-\theta=\cos^{-1}x \Leftrightarrow$ $\theta+\cos^{-1}x=\pi/2$, ήτοι $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\pi/2$.

Γ) Τόξο εφαπτομένης

Εδώ θεωρούμε τον βασικό κλάδο της εφαπτομένης, δηλαδή τη συνάρτηση $y = \tan x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Ο κλάδος αυτός είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.



Η αντίστροφη του περιορισμού συμβολίζεται με arctan ή **καταχρηστικά** με $\tan^{-1}$.



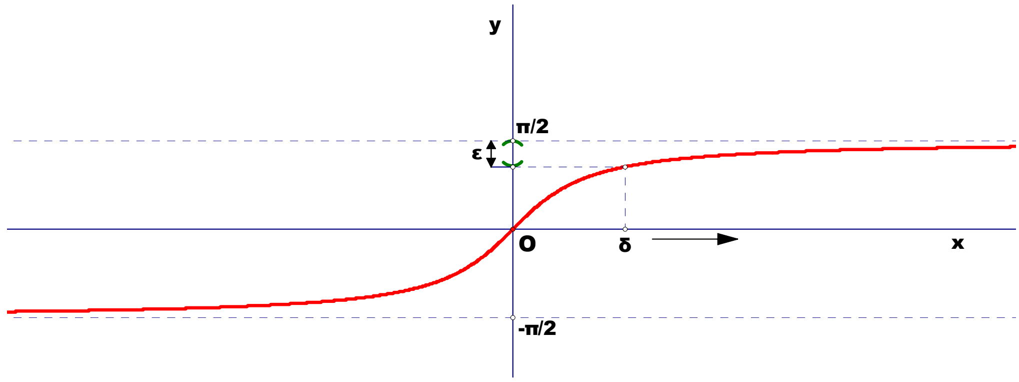
Η συνάρτηση αυτή απεικονίζεται στο σχήμα με την παχιά κόκκινη γραμμή και η συνάρτηση $y = \tan x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με την λεπτή διακεκομμένη μπλέ γραμμή.

Από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$.

*[Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\varepsilon < \pi/2$, οπότε $\pi/2 - \varepsilon \in (0, \pi/2)$. Έστω $\delta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) > 0$. (Είναι $\delta > 0$ γιατί $\pi/2 - \varepsilon \in (0, \pi/2)$ και άρα $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) > 0$).

Άρα $\frac{\pi}{2} - \varepsilon = \tan^{-1} \delta$. Επειδή η συνάρτηση $\tan^{-1}$ είναι γνησίως αύξουσα, θα έχουμε για κάθε $x \in \left(\delta, \frac{\pi}{2}\right)$: $\frac{\pi}{2} > \tan^{-1} x > \tan^{-1} \delta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$,.

Έχουμε, δηλαδή δείξει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $\frac{\pi}{2} > \tan^{-1} x > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, για κάθε $x > \delta$.

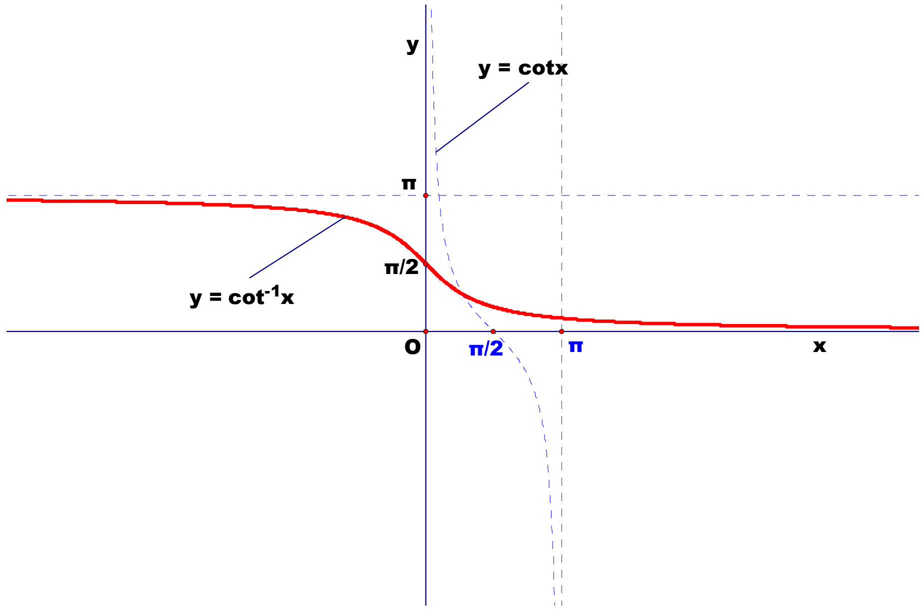


Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$.]

Η σχέση $\lim\limits_{x\to-\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$ αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο.

Δ) Τόξο συνεφαπτομένης

Εδώ αντιστρέφουμε τον κλάδο της συνεφαπτομένης $y = \cot x$, $x \in [0, \pi]$.



Παίρνουμε έτσι μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, η οποία απεικονίζεται στο σχήμα με την παχιά κόκκινη γραμμή. Όπως στην περίπτωση της $\tan^{-1}$, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \cot^{-1} x = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} \cot^{-1} x = \pi$.

5.4.13 Παραδείγματα

1. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων:

(i) $y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ και **(ii)** $y = \cos^{-1}(\sin x)$.

Λύση: **(i)** Θα πρέπει $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$ και $x \neq -1$. Άρα $x < -1$ ή $x \geq 1$. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι λοιπόν το σύνολο $(-\infty,\ -1) \cup [1,\ +\infty)$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτησή μας είναι η σύνθεση $\tan^{-1} \circ g$, όπου $g : (-\infty,\ -1) \cup [1,\ +\infty) \to \mathbb{R}$ η συνεχής συνάρτηση με τύπο $g(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$. Για να βρούμε το σύνολο τιμών της συνάρτησής μας θα βρούμε πρώτα το σύνολο τιμών της g.

Έστω $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$. Τότε $y \geq 0$. Επίσης $y^2 = \dfrac{x-1}{x+1} \Rightarrow (1-y^2)x = y^2 + 1$.

Αν $y = 1$, τότε $0 = 2$, άτοπο. Άρα $y \neq 1$. Τότε $x = \dfrac{y^2+1}{1-y^2}$. Αν $0 \leq y < 1$, τότε $1 \geq 1 - y^2 > 0$ και επομένως $1 \leq \dfrac{1}{1-y^2}$. Επίσης $0 \leq y^2 \Rightarrow 1 \leq y^2 + 1$. Άρα $\dfrac{y^2+1}{1-y^2} \geq \dfrac{1}{1} = 1 \Rightarrow \dfrac{y^2+1}{1-y^2} \in [1,\ +\infty)$.

Αν $y > 1$, τότε $1 - y^2 < 0$. Επομένως, $\dfrac{y^2+1}{1-y^2} = -\dfrac{1-y^2-2}{1-y^2} = -1 + \dfrac{2}{1-y^2} < -1 \Rightarrow \dfrac{y^2+1}{1-y^2} \in (-\infty,\ -1)$.

Σε κάθε περίπτωση επαληθεύουμε ότι $g\left(\dfrac{y^2+1}{1-y^2}\right) = \sqrt{\left(\dfrac{y^2+1}{1-y^2} - 1\right) \Big/ \left(\dfrac{y^2+1}{1-y^2} + 1\right)} = \sqrt{\dfrac{2y^2}{1-y^2} \Big/ \dfrac{2}{1-y^2}} = \sqrt{y^2} \underset{y \geq 0}{=} y$. Επομένως το σύνολο τιμών της g είναι το σύνολο $[0,\ 1) \cup (1,\ +\infty)$. Εφόσον η συνάρτηση $\tan^{-1}$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών της συνάρτησής μας είναι το $\tan^{-1}\left([0,\ 1)\right) \cup \tan^{-1}\left((1,\ +\infty)\right) = \left[0,\ \dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(ii) Θα πρέπει $\sin x \in [-1,\ 1]$, πράγμα που συμβαίνει. Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησής μας είναι όλο το $\mathbb{R}$. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης του ημιτόνου είναι το διάστημα $[-1,\ 1]$ και επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησής μας είναι το διάστημα $\cos^{-1}\left([-1,\ 1]\right) \underset{\substack{\cos^{-1} \\ \text{γνησίως φθίνουσα}}}{=} [\cos^{-1}(1),\ \cos^{-1}(-1)] = [0,\ \pi]$.

2. Να υπολογιστούν τα όρια: **(i)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^{-1} x}{x}$, **(ii)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x - \sin^{-1} x}{2x + \tan^{-1} x}$ και **(iii)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x \left(\tan^{-1} \dfrac{x+1}{x+2} - \dfrac{\pi}{4} \right) \right)$.

Λύση: **(i)** Θέτουμε $y = \sin^{-1} x \to 0$. Επομένως $x = \sin y$. Άρα $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^{-1} x}{x} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y}{\sin y} = 1$.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\sin^{-1}x}{2x+\tan^{-1}x}=\dfrac{2-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^{-1}x}{x}}{2+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^{-1}x}{x}}$. Το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^{-1}x}{x}$ το υπολογίσαμε ίσο με 1. Τώρα, θέτουμε $y=\tan^{-1}x\to 0$ και επομένως $x=\tan y$. Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^{-1}x}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\tan y}=1$. Επομένως $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\sin^{-1}x}{2x+\tan^{-1}x}=\dfrac{2-1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$.

(iii) Θέτουμε $y=\dfrac{x+1}{x+2}\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$. Τότε $x=\dfrac{1-2y}{y-1}$. Επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(\tan^{-1}\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=$ $=\lim\limits_{y\to 1}\left(\dfrac{1-2y}{y-1}\left(\tan^{-1}y-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$. Τέλος, θέτουμε $u=\tan^{-1}y-\dfrac{\pi}{4}\to\tan^{-1}(1)-\dfrac{\pi}{4}=0$. Επομένως $y=\tan\left(u+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1+\tan u}{1-\tan u}$. Άρα $\dfrac{1-2y}{y-1}=-\dfrac{3\tan u+1}{2\tan u}$.

Συνεπώς $\lim\limits_{y\to 1}\left(\dfrac{1-2y}{y-1}\left(\tan^{-1}y-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=-\lim\limits_{u\to 0}\left(\dfrac{3\tan u+1}{2\tan u}u\right)=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{u\to 0}(3\tan u+1)\cdot\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\tan u}=$ $=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{u\to 0}(3\cdot 0+1)\cdot 1=-\dfrac{1}{2}$.

Άλυτες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τα όρια: **(i)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi-2\cos^{-1}x}{x-\tan^{-1}\dfrac{x}{2}}$, **(ii)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(\tan^{-1}\dfrac{x+1}{x+2}-\tan^{-1}\dfrac{x}{x+2}\right)\right)$.

(Υπόδειξη: Για το **(ii)** αφαιρέστε και προσθέστε το $\dfrac{\pi}{4}$ και στη συνέχεια υπολογίστε τα δύο όρια, όπως στο παράδειγμα 5.4.13.iii).

5.5 Παράρτημα του κεφαλαίου 5*

Αποδείξεις των θεωρημάτων Bolzano και μέγιστης-ελάχιστης τιμής

Πρόταση: *Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση, όπου $A\subseteq\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $\xi\in A$. Τότε έχουμε:*

i) *Αν $f(\xi)>0$, τότε υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε, για κάθε $x\in A$ με $|x-\xi|<\delta$ να ισχύει $f(x)>0$.*

ii) *Αν $f(\xi)<0$, τότε υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε, για κάθε $x\in A$ με $|x-\xi|<\delta$ να ισχύει $f(x)<0$.*

Απόδειξη: i) Έστω $\varepsilon = \dfrac{f(\xi)}{2} > 0$. Εφόσον $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon = \dfrac{f(\xi)}{2}$, για κάθε $x \in A$ με $|x - \xi| < \delta$. Από τη σχέση όμως $|f(x) - f(\xi)| < \dfrac{f(\xi)}{2}$ προκύπτει $-\dfrac{f(\xi)}{2} < f(x) - f(\xi) \Leftrightarrow f(x) > \dfrac{f(\xi)}{2} > 0$.

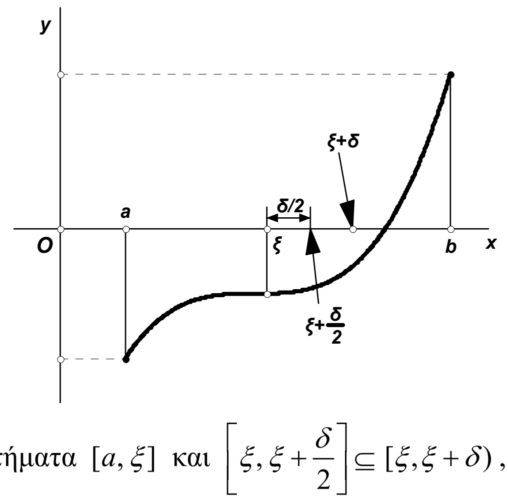
ii) Η σχέση $f(\xi) < 0$ είναι ισοδύναμη με τη $-f(\xi) > 0$. Τώρα εφαρμόζουμε το (i) για τη συνάρτηση $-f$. ■

Θεώρημα του Bolzano: *Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση* $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. *Υποθέτουμε ότι οι τιμές της στα άκρα του διαστήματος* $[a,b]$ *είναι ετερόσημες, δηλαδή* $f(a)f(b) < 0$.
Τότε, η συνάρτηση f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (a,b).

Απόδειξη: Υποθέτουμε αρχικά ότι $f(a) < 0$ και $f(b) > 0$. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{t \in [a,b] \mid f(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in [a,t]\}$. Παρατηρούμε ότι $a \in A$. (Το κλειστό διάστημα $[a,a]$ είναι το μονοσύνολο $\{a\}$). Το *A* περιέχεται στο διάστημα $[a,b]$ και συνεπώς είναι άνω φραγμένο από το *b*. Ας είναι ξ το supremum του *A*. Παρατηρούμε ότι $t \in A$, για κάθε $a \le t < \xi$. Πράγματι, εφόσον $\xi = \sup A$, υπάρχει $t' \in A$ με $t < t' < \xi$. Άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a,t']$. Ειδικότερα, $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a,t]$, ήτοι $t \in A$.
Θα αποδείξουμε ότι το ξ είναι ζητούμενη ρίζα. Θα αποκλείσουμε τις περιπτώσεις $f(\xi) < 0$ και $f(\xi) > 0$.

(i) Έστω ότι $f(\xi) < 0$.

Προφανώς $\xi < b$. Εφόσον η *f* είναι συνεχής στο ξ, υπάρχει διάστημα $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ με $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta) \cap [a,b]$, σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση. Μπορούμε να επιλέξουμε το δ ώστε $\delta < b - \xi$, οπότε $[\xi, \xi + \delta) \subseteq [a,b]$.



Επειδή η *f* παίρνει αρνητικές τιμές στα διαστήματα $[a,\xi]$ και $\left[\xi, \xi + \dfrac{\delta}{2}\right] \subseteq [\xi, \xi + \delta)$, η *f* παίρνει αρνητικές τιμές σ' όλο το διάστημα $\left[a, \xi + \dfrac{\delta}{2}\right]$.

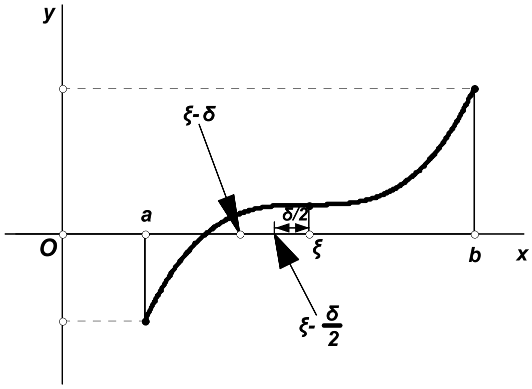
Επομένως $\xi + \dfrac{\delta}{2} \in A$ και συνεπώς $\xi + \dfrac{\delta}{2} \le \xi = \sup A$, άτοπο.

(ii) Έστω ότι $f(\xi) > 0$.

Προφανώς $\xi > a$. Όπως προηγουμένως, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει διάστημα $(\xi - \delta, \xi] \subseteq [a,b]$ στο οποίο η *f* παίρνει θετικές τιμές.

Επειδή η $f\left(\xi - \frac{\delta}{2}\right) > 0$, θα είναι $\xi - \frac{\delta}{2} \geq \xi = \sup A$, άτοπο.

Η περίπτωση $f(a) > 0$ και $f(b) < 0$ αντιμετωπίζεται παρόμοια. ■



Πρόταση: *Θεωρούμε μια συνάρτηση* $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. *Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής. Τότε η f είναι φραγμένη.*

Απόδειξη: Θα κινηθούμε όπως στην απόδειξη του θεωρήματος του Bolzano. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{t \in [a,b] \mid$ η *f* είναι φραγμένη στο διάστημα $[a,t]\}$.

Προφανώς $a \in A$ και επομένως το *A* δεν είναι κενό. Εφόσον το *A* είναι άνω φραγμένο από το *b*, έχει ελάχιστο άνω φράγμα *ξ*.

Ισχυρισμός 1: $\xi \in A$.

Αν $\xi = a$, τότε προφανώς $\xi \in A$. Έστω $a < \xi$. Επειδή $\lim_{x \to \xi^-} f(x) = f(\xi)$ υπάρχει διάστημα $(\xi - \delta, \xi] \subseteq [a,b]$, στο οποίο η *f* είναι φραγμένη. (Πράγματι, υπάρχει $\delta > 0$ με την ιδιότητα $|f(x) - f(\xi)| < 1 \Rightarrow |f(x)| < 1 + |f(\xi)|$). Έστω $t \in A$ με $\xi - \delta < t < \xi$. Εφόσον η *f* είναι φραγμένη στα διαστήματα $[a, t]$ και $[t, \xi]$, θα είναι φραγμένη σ' όλο το διάστημα $[a, \xi]$, δηλαδή $\xi \in A$.

Ισχυρισμός 2: $\xi = b$.

Έστω ότι $\xi < b$. Εφόσον $\lim_{x \to \xi^+} f(x) = f(\xi)$, υπάρχει διάστημα $[\xi, \xi + \delta) \subseteq [a,b]$ στο οποίο η *f* είναι φραγμένη. Εφόσον η *f* είναι φραγμένη στα διαστήματα $[a, \xi]$ και $\left[\xi, \xi + \frac{\delta}{2}\right]$, θα είναι φραγμένη σ' όλο το διάστημα $\left[a, \xi + \frac{\delta}{2}\right]$. Άρα $\xi + \frac{\delta}{2} \in A$ και επομένως $\xi + \frac{\delta}{2} \leq \xi = \sup A$, άτοπο. ■

Θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής: *Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση* $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. *Τότε η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, δηλαδή αν* $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ *και* $m = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$, *τότε υπάρχουν* $x_1, x_2 \in [a,b]$ *με* $f(x_1) = M$ *και* $f(x_2) = m$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $M > f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ για κάθε $x \in [a,b]$. Η g είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$ και επομένως φραγμένη. Έστω λ ένα άνω φράγμα της g.

Επειδή $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$, υπάρχει ακολουθία (x_n) σημείων του διαστήματος $[a,b]$ με $M - f(x_n) < \dfrac{1}{n}$, για κάθε $n = 1,2,\ldots$ Επομένως $\lambda > g(x_n) = \dfrac{1}{M - f(x_n)} > n$, για κάθε $n = 1,2,\ldots$, δηλαδή η ακολουθία των θετικών ακεραίων είναι άνω φραγμένη, άτοπο.

Για το $m = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$, παρατηρούμε ότι $m = -\sup\{-f(x) \mid x \in [a,b]\}$. ■