ΚΕΦΑΛΑΙΟ $2^{\text{Ο}}$

ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΤΟΥΣ

2.1 Τυχαίες μεταβλητές

Πολλές φορές σε ένα πείραμα τύχης δεν μας ενδιαφέρει ο δειγματοχώρος του (ο οποίος όπως είδαμε μπορεί να είναι και μη-αριθμητικό σύνολο), αλλά ένα σύνολο το οποίο είναι αποτέλεσμα μιας απεικόνισης (συνάρτησης) των στοιχείων του δειγματοχώρου στους πραγματικούς αριθμούς. Για να γίνει αυτό κατανοητό δίνουμε το παρακάτω παράδειγμα: έστω ότι ρίχνουμε δύο νομίσματα, τότε ως γνωστόν ο δειγματοχώρος του πειράματος είναι ίσος με:

$$\Omega = \{\text{ΚΚ}, \text{ΚΓ}, \text{ΓΚ}, \text{ΓΓ}\}$$

Ας υποθέσουμε ότι μας ενδιαφέρει ο αριθμός των Κ τα οποία εμφανίζονται, και ας συμβολίσουμε τον αριθμό αυτό με X. Τότε εάν κατά την εκτέλεση του πειράματος συμβεί το γεγονός ΚΚ, η αντίστοιχη τιμή του X είναι 2. Εάν συμβεί το γεγονός ΚΓ ή το ΓΚ, η αντίστοιχη τιμή του X είναι 1, και εάν τέλος συμβεί το γεγονός ΓΓ η αντίστοιχη τιμή του X είναι 0. Έτσι ορίσαμε έναν τρόπο με την βοήθεια του οποίου, σε κάθε δειγματοσημείο αντιστοιχούμε έναν πραγματικό αριθμό, μ' άλλα λόγια ορίσαμε μια συνάρτηση X με πεδίο ορισμού τον δειγματοχώρο και πεδίο τιμών το υποσύνολο $\{0, 1, 2\}$ των πραγματικών αριθμών.

Έτσι λοιπόν έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 2.1.1 Μια **τυχαία μεταβλητή *X*** (χάριν συντομίας τ.μ.), είναι μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού έναν δειγματοχώρο Ω και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών (δηλαδή η $X:\Omega \to \Re$).

Παρατήρηση 2.1.2 Στην πραγματικότητα, αν θεωρήσουμε μια οποιαδήποτε συνάρτηση X με πεδίο ορισμού έναν δειγματοχώρο Ω (στον οποίο έχει οριστεί μια σ-άλγεβρα γεγονότων $\Im$) και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, τότε η εν λόγω συνάρτηση θεωρείται ότι είναι μια τυχαία μεταβλητή εάν ικανοποιεί την συνθήκη: για κάθε πραγματικό αριθμό x το σύνολο:

$$X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega \,/\, \mathrm{X}(\omega) \le x\} \qquad (2.1.3)$$

είναι ένα γεγονός του Ω, αναφορικά με την σ-άλγεβρα $\Im$. Είναι φανερό ότι εάν σαν σ-άλγεβρα $\Im$ θεωρήσουμε το δυναμοσύνολο του Ω, τότε κάθε πραγματική συνάρτηση του δειγματοχώρου θεωρείται τυχαία μεταβλητή.

Για τις εφαρμογές του εν λόγω συγγράμματος θεωρούμε ότι, όλες οι πραγματικές συναρτήσεις που ορίζονται σ' έναν δειγματοχώρο είναι τυχαίες μεταβλητές.

Αν υποθέσουμε ότι στον δειγματοχώρο Ω (μαζί με την σ-άλγεβρα του $\Im$) ορίζεται ένα «μέτρο» πιθανότητας P και μια τυχαία μεταβλητή *X*, τότε με την βοήθεια της *X* ορίζουμε στο $\Re$ (στον οποίο χώρο είναι ορισμένη μια σ-άλγεβρα ***B*** καλούμενη σ-άλγεβρα του Borel) ένα μέτρο πιθανότητας ***L*,** ως εξής:

$$\boldsymbol{L}(A) = P(X^{-1}(A)) = P(\{\omega \,/\, X(\omega) \in A\}) \qquad (2.1.4)$$

για όλα τα *A* Borel γεγονότα του $\Re$. Το μέτρο πιθανότητας ***L*** καλείται **νόμος** ή **κατάνομή** της τ.μ. *X*.

Ορισμός 2.1.5 Έστω τώρα ότι δίνεται μια τ.μ. *X*, τότε ορίζουμε μια συνάρτηση $F : \Re \to \Re$ με τύπο:

$$F(x) = L((-\infty, x]) = P(X^{-1}((-\infty, x])) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\}) \qquad (2.1.6)$$

Η συνάρτηση *F* καλείται **συνάρτηση κατανομής** (distribution function) της τ.μ. *X* (συνήθως γράφουμε F_X).

Εάν δυο τ.μ. *X* και *Y* έχουν την ίδια συνάρτηση κατανομής, δηλαδή $F_X = F_Y$, τότε λέμε ότι οι τ.μ. είναι **ισόνομες** ή **ταυτοτικά κατανεμημένες**.

Πρόταση 2.1.7 Η συνάρτηση κατανομής F_X της τ.μ. *X* έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

(1) $0 \le F_X(x) \le 1$

(2) Η F_X είναι αύξουσα.

(3) Η F_X είναι συνεχής από δεξιά σε όλα τα $x \in \Re$, δηλαδή: $F_X(x) = \lim_{t \to x^+} F_X(t)$.

(4) $F_X(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ και $F_X(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

(5) $P(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a), \;\; a \le b$

2.2 Διακριτές και συνεχείς τυχαίες μεταβλητές κατανομές

(Α) Διακριτές τυχαίες μεταβλητές κατανομές

Μια τυχαία μεταβλητή X καλείται **διακριτή** αν το πλήθος των τιμών της είναι ένα πεπερασμένο ή το πολύ αριθμήσιμο σύνολο και κάθε μια από αυτές τις τιμές έχει θετική πιθανότητα. Δηλαδή αν η X είναι μια διακριτή τ.μ. και παίρνει τις τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ (ας υποθέσουμε ακόμα ότι: $x_1 < x_2 < \cdots$) τότε οι πιθανότητες

$$P(\{\omega / X(\omega) = x_k\}) = p_k > 0, \quad k = 1, 2, \cdots .$$

Είναι φανερό ότι:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\{X = x_k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$$

Ορισμός 2.2.1 Η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο:

$$f_X(x) = P\{X = x\} = \begin{cases} p_k & x = x_k, \quad k = 1, 2, \cdots \\ 0 & αλλού \end{cases} \tag{2.2.2}$$

καλείται **πυκνότητα πιθανότητας** της τ.μ. X (probability density function).

Είναι φανερό ότι η πυκνότητα πιθανότητας μιας τ.μ. ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) $f_X(x) \geq 0$ και

(β) $\sum_{n=1}^{\infty} f_X(x_n) = 1$

Η πυκνότητα πιθανότητας και η συνάρτηση κατανομής μιας τ.μ. συνδέονται ως εξής:

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_k \leq x} P\{X = x_k\} = \sum_{x_k \leq x} f_X(x_k)$$

$$\begin{aligned} f_X(x_k) &= P\{X = x_k\} = P\{x_{k-1} < X \leq x_k\} = P\{X \leq x_k\} - P\{X \leq x_{k-1}\} = \\ &= F_X(x_k) - F_X(x_{k-1}) \end{aligned}$$

Αναφέρουμε παρακάτω ορισμένες πυκνότητες πιθανότητας, οι οποίες εμφανίζονται συνήθως στην πράξη και χρησιμοποιούνται στην συνέχεια του συγγράμματος. Λέμε λοιπόν ότι μια τ.μ. X ακολουθεί:

(α) την **διωνυμική κατανομή** (binomial distribution) με παραμέτρους $\boldsymbol{n}$ και $\boldsymbol{p}$ (συμβολικά $X \approx B(n; p)$), εάν η πυκνότητα πιθανότητάς της δίνεται από την:

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n \quad (2.2.3)$$

(β) την **κατανομή Poisson** (Poisson distribution) με παράμετρο $\boldsymbol{\lambda}$ με λ > 0 (συμβολικά $X \approx P(\lambda)$) , εάν η πυκνότητα πιθανότητάς της ισούται με:

$$P\{X=k\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k=0,1,2,\cdots \quad (2.2.4)$$

(γ) την **γεωμετρική κατανομή** (geometrical distribution) με παράμετρο ***r*** (με 0<r<1), εάν η πυκνότητα πιθανότητάς της ισούται με:

$$P\{X=k\}=r(1-r)^{k-1}, \quad k=1,2,\cdots \quad (2.2.5)$$

(Β) Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές κατανομές

Έστω τώρα ότι το το πλήθος των τιμών μιας τ.μ. X είναι ένα μη-αριθμήσιμο σύνολο *S*, τέτοιο ώστε $P\{X=x\}=0, \ \forall x \in S$. Η τ.μ. X καλείται, σ΄αυτή την περίπτωση **συνεχής**.

Τις περισσότερες φορές υποθέτουμε ότι υπάρχει μια πραγματική μη αρνητική συνάρτηση $f_X(x)$ (η λεγόμενη πυκνότητα πιθανότητας) τέτοια ώστε:

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt, \quad \forall x \in \Re \quad (2.2.6)$$

Από τον ορισμό της πυκνότητας πιθανότητας, είναι εύκολο να δει κανείς ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx=1 \quad (2.2.7)$$

ενώ $f_X(x)=\dfrac{dF_X(x)}{dx}$ για όλα τα x για τα οποία η $f_X(x)$ είναι συνεχής.

Οι χρησιμότερες συνεχείς τ.μ. είναι αυτές των οποίων η πυκνότητα πιθανότητας δίνεται παρακάτω. Θα λέμε ότι μια τ.μ. X ακολουθεί:

(α) την **ομοιόμορφη κατανομή** (uniform distribution) με παραμέτρους $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ (συμβολικά $X \approx U(\alpha,\beta)$), εάν η πυκνότητα πιθανότητάς της ορίζεται από την:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-\alpha} & x\in[\alpha,\beta],\ \alpha<\beta \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases} \quad (2.2.8)$$

(β) την **κανονική κατανομή** (normal distribution) με παραμέτρους $\boldsymbol{\mu}$ και $\boldsymbol{\sigma}$ (συμβολικά $X \approx N(\mu,\sigma^2)$), εάν η πυκνότητα πιθανότητάς της είναι ίση με:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \Re,\ \mu \in \Re, \sigma > 0 \qquad (2.2.9)$$

Εάν $\boldsymbol{\mu}$**=0** και $\boldsymbol{\sigma}$**=1,** τότε λέμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί την **τυπική κανονική κατανομή** (standard normal distribution).

(γ) την **αρνητική εκθετική κατανομή** (negative exponential distribution) με παράμετρο $\boldsymbol{\lambda}$, με $\lambda > 0$, εάν η πυκνότητα πιθανότητάς της είναι ίση με:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases} \qquad (2.2.10)$$

(δ) την **γάμμα κατανομή** (gamma distribution) με παραμέτρους $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ με α, β>0 εάν η πυκνότητα πιθανότητάς της ορίζεται από την σχέση:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^a} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases} \qquad (2.2.11)$$

όπου η συνάρτηση: $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$ καλείται **συνάρτηση γάμμα**. Μπορεί να δειχθεί ότι : $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$ απ’ όπου παίρνουμε $\Gamma(n) = (n-1)!$, για n φυσικό.

Η αρνητική εκθετική κατανομή είναι ειδική περίπτωση της γάμμα κατανομής για $\boldsymbol{\alpha}$=1 και $\boldsymbol{\beta}$=1/λ.

Ακόμα στην περίπτωση που το $\boldsymbol{\alpha}$=1/2 και $\boldsymbol{\beta}$=2, τότε η γάμμα κατανομή ονομάζεται **χι-τετράγωνο με έναν βαθμό ελευθερίας** (συμβολικά χ_1^2).

Το παρακάτω θεώρημα περιγράφει πως βρίσκουμε την πυκνότητα πιθανότητας μιας συνάρτησης μιας τ.μ., όταν είναι γνωστή η π.π. της (αρχικής) τ.μ.

Θεώρημα 2.2.12 *(μετασχηματισμός μιας τυχαίας μεταβλητής)*

Έστω η τ.μ. X με συνεχή (εκτός, ενδεχομένως, πεπερασμένου πλήθους σημείων) π.π. $f_X(x)$, η οποία είναι θετική για $x \in S$ και 0 για τα υπόλοιπα. Έστω $g : S \to T$ μια “αμφιμονοσήμαντη και επί” συνάρτηση. Υποθέτουμε ακόμα ότι η (υπάρχουσα) αντίστροφη συνάρτηση $g^{-1} : T \to S$ είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγός της είναι συνεχής. Εάν ορίσουμε την τ.μ. $Y = g(X)$, τότε η πυκνότητα πιθανότητας της δίνεται από την σχέση:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[g^{-1}(y)] \cdot \left| \dfrac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| & y \in T \\ 0 & y \in T' \end{cases} \tag{2.2.13}$$

2.3 Αριθμητικά χαρακτηριστικά μιας τυχαίας μεταβλητής

Έστω X μια τ.μ. και έστω ότι η πυκνότητα πιθανότητάς της $f_X(x)$ είναι γνωστή. Τότε, τουλάχιστον θεωρητικά, μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις πιθανότητες οι οποίες μας ενδιαφέρουν. Από μαθηματική άποψη όμως, υπάρχουν πολλές φορές δυσκολίες που κάνουν αυτούς τους υπολογισμούς αδύνατους. Γι΄ αυτό, δίνουμε παρακάτω ορισμένους αριθμούς που χαρακτηρίζουν την τ.μ. X ή την κατανομή της.

Ορισμός 2.3.1 Η **μέση τιμή** (mean) ή **μαθηματική ελπίδα** (expectation) μιας τ.μ. X με πυκνότητα πιθανότητας $f_X(x)$ είναι ο αριθμός:

$$\mu_X = E(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n f_X(x_n) & X \ \textit{διακριτή} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx & X \ \textit{συνεχής} \end{cases} \tag{2.3.2}$$

με την προυπόθεση ότι οι ποσότητες του δεξιού μέλους έχουν νόημα (δηλαδή τόσο το άθροισμα όσο και το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους είναι πεπερασμένα).

Εάν τώρα g είναι μια πραγματική συνάρτηση, τότε η συνάρτηση $Y = g(X)$ είναι μια τ.μ. Η μέση τιμή της Y, όταν υπάρχει, υπολογίζεται:

$$E(Y) = E[g(X)] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g(x_n) f_X(x_n) & X \ \textit{διακριτή} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx & X \ \textit{συνεχής} \end{cases} \tag{2.3.3}$$

Ορισμός 2.3.4 (α) Εάν $g(x)=x^r$, τότε η μέση τιμή της $Y = g(X)$ καλείται **ροπή r-τάξεως** της τ.μ X.

(β) Εάν $g(x) = (x-E(X))^r$, τότε η μέση τιμή της $Y = g(X)$ καλείται **κεντρική ροπή r-τάξεως** της τ.μ X.

Είναι φανερό ότι η ροπή πρώτης τάξεως μιας τ.μ είναι η μέση της τιμή, ενώ η κεντρική ροπή πρώτης τάξης είναι πάντα μηδέν.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η κεντρική ροπή δεύτερης τάξης μιας τ.μ., η οποία καλείται **διασπορά** της τ.μ. Δηλαδή η διασπορά μιας τ.μ. X δίνεται από την σχέση:

$$\sigma^2(X) = V(X) = E[(X-(EX))^2] = E(X^2)-(EX)^2 \tag{2.3.5}$$

Η τετραγωνική ρίζα της διασποράς καλείται **τυπική απόκλιση** της τ.μ.

Η μέση τιμή καθώς και η διασπορά τ.μ με κατανομές αυτές που αναφέρθηκαν στην παράγραφο 2.2 δίνονται αναλυτικά στον πίνακα που υπάρχει στο τέλος του συγγράμματος.

Η παρακάτω ανισότητα δίνει ένα άνω φράγμα μιας ενδιαφέρουσας πιθανότητας με την βοήθεια της μέσης τιμής και της διασποράς μιας τ.μ.

Πρόταση 2.3.6 (**Ανισότητα του Tchebichev**)

Έστω X μια τ.μ. με πεπερασμένη μέση τιμή EX και διασπορά $\sigma^2(X)$. Τότε για οιονδήποτε θετικό αριθμό c, έχουμε:

$$P\{\,|X - EX| \geq c\} \leq \frac{\sigma^2(X)}{c^2} \tag{2.3.7}$$

Ορισμός 2.3.8 Η **ροπογεννήτρια** μιας τ.μ. X ορίζεται από την σχέση:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f_X(x) & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx & X \text{ συνεχής} \end{cases} \tag{2.3.9}$$

δοθέντος ότι οι ποσότητες στος δεξί μέλος, του ορισμού, είναι πεπερασμένες (συνήθως για $t\in(-c, c)$, για κάποιο $c>0$).

Το παρακάτω θεώρημα δίνει τις βασικές ιδιότητες της ροπογεννήτριας μιας τ.μ.

Θεώρημα 2.3.10 (α) $M_X(0) = 1$ (πάντα). Το σημείο t=0 μπορεί να είναι και το μοναδικό σημείο στο οποίο υπάρχει η ροπογεννήτρια μιας τ.μ.

(β) $$\frac{d^n}{dt^n} M_X(t)\,|_{t=0} = E(X^n), \quad n \in N \tag{2.3.11}$$

με την προυπόθεση ότι η ροπή $n^{\text{οστής}}$ τάξης του δεξιού μέλους είναι πεπερασμένη.

2.4 Πολυδιάστατες τυχαίες μεταβλητές: κατανομές και ροπές

Εάν X_1, X_2 είναι δυό διακριτές τ.μ. οι οποίες ορίζονται στον ίδιο πιθανοθεωρητικό χώρο *Ω*, και οι οποίες παίρνουν τιμές σ' ένα σύνολο *S*.

Ορισμός 2.4.1 (1) Εάν ορίσουμε μια συνάρτηση $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ στο *SxS*, από τον τύπο:

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = P\{X_1 = x_1,\ X_2 = x_2\} \tag{2.4.2}$$

τότε η συνάρτηση αυτή καλείται **από κοινού πυκνότητα πιθανότητας** των τ.μ. X_1, X_2**,** έχει δε τις παρακάτω ιδιότητες:

(a) $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \geq 0 \qquad \forall (x_1,x_2) \in SxS$

(β) $P\{X_1 \in B_1, X_2 \in B_2\} = \sum_{X_1 \in B_1} \sum_{X_2 \in B_2} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \quad \forall B_1, B_2 \subset S$ γεγονότα

και ιδιαίτερα:

$$\sum_{x_1 \in S} \sum_{x_2 \in S} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = 1$$

(2) Η συνάρτηση $f_{X_1}(x)$ που ορίζεται από την σχέση:

$$f_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \tag{2.4.3}$$

είναι η πυκνότητα πιθανότητας της τ.μ X_1**.** Οι π.π. $f_{X_1}(x)$, $f_{X_2}(x)$ καλούνται **περιθωριακές πυκνότητες πιθανότητας** της $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$.

(3) Η συνάρτηση $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ που δίνεται από την σχέση:

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = P\{X_1 \leq x_1,\ X_2 \leq x_2\} = \sum_{t_1 \leq x_1} \sum_{t_2 \leq x_2} f_{X_1,X_2}(t_1,t_2) \tag{2.4.4}$$

καλείται **από κοινού συνάρτηση κατανομής** των τ.μ. X_1, X_2 οι δε ιδιότητες της είναι ανάλογες εκείνων της συνάρτησης κατανομής μιας τ.μ.

(4) Εάν για κάθε x_2 τέτοιο ώστε $f_{X_2}(x_2)$>0 ορίσουμε την συνάρτηση $f_{X_1,X_2}(\cdot \mid x_2)$ από την σχέση:

$$f_{X_1,X_2}(x_1 \mid x_2) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)} = P\{X_1 = x_1 \mid X_2 = x_2\} \tag{2.4.5}$$

τότε η εν λόγω συνάρτηση καλείται **δεσμευμένη** (ή **υπό συνθήκες**) **πυκνότητα πιθανότητας** της τ.μ. X_1 **δοθέντος** ότι $X_2 = x_2$**.**

Έστω τώρα X_1, X_2 δυο συνεχείς τ.μ. οι οποίες ορίζονται στον ίδιο πιθανοθεωρητικό χώρο Ω, και οι οποίες παίρνουν τιμές σ' ένα σύνολο S.

Ορισμός 2.4.6 (1) Εάν υπάρχει μια συνάρτηση $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ στο SxS τ.ω:

(a) $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \geq 0 \qquad \forall (x_1,x_2) \in SxS$

(β) $P\{X_1 \in B_1, X_2 \in B_2\} = \int\limits_{B_1} \int\limits_{B_2} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2 \quad \forall B_1, B_2 \subset S$

(γεγονότα) και ιδιαίτερα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = 1$$

τότε η συνάρτηση $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ καλείται **από κοινού πυκνότητα πιθανότητας** των τ.μ. X_1, X_2**.**

(2) Η συνάρτηση $f_{X_1}(x)$ που ορίζεται από την σχέση:

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\, dx_2 \tag{2.4.7}$$

είναι η πυκνότητα πιθανότητας της τ.μ X_1**.** Οι π.π. $f_{X_1}(x)$, $f_{X_2}(x)$ καλούνται **περιθωριακές πυκνότητες πιθανότητας** της $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$.

(3) Η συνάρτηση $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ που ορίζεται από την σχέση:

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = P\{X_1 \leq x_1,\ X_2 \leq x_2\} = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_{X_1,X_2}(t_1,t_2)\, dt_1\, dt_2 \tag{2.4.8}$$

καλείται **από κοινού συνάρτηση κατανομής** των τ.μ. X_1, X_2.

(4) Εάν για κάθε x_2 τέτοιο ώστε $f_{X_2}(x_2)$>0 ορίσουμε την συνάρτηση $f_{X_1,X_2}(\cdot \mid x_2)$ από την σχέση:

$$f_{X_1,X_2}(x_1 \mid x_2) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)} \tag{2.4.9}$$

τότε η εν λόγω συνάρτηση καλείται **δεσμευμένη** (ή **υπό συνθήκες**) **πυκνότητα πιθανότητας** της τ.μ. X_1 **δοθέντος** ότι $X_2 = x_2$**.**

Όλοι οι παραπάνω ορισμοί γενικεύονται και στην περίπτωση που έχουμε περισσότερες από δυο τ.μ (διακριτές ή συνεχείς).

Εάν X_1, X_2 δυο τ.μ. και $Y = g(X_1, X_2)$ μία τ.μ. η οποία είναι συνάρτηση των τ.μ. X_1, X_2 τότε:

Ορισμός 2.4.10 Η **μαθηματική ελπίδα** (ή **μέση τιμή**) της τ.μ. $Y = g(X_1, X_2)$ ορίζεται από την σχέση:

$$EY = Eg(X_1, X_2) = \begin{cases} \sum_{x_1} \sum_{x_2} g(x_1, x_2) f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) & X_1, X_2 \ \textit{διακριτές} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2) f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 & X_1, X_2 \ \textit{συνεχείς} \end{cases}$$

με την προυπόθεση ότι οι ποσότητες του δεξιού μέλους έχουν νόημα (δηλαδή είναι πεπερασμένες).

Ακόμα:

Ορισμός 2.4.11 Η **διασπορά** της τ.μ. $Y = g(X_1, X_2)$ ορίζεται από την σχέση:

$$\sigma^2(Y) = \begin{cases} \sum_{x_1} \sum_{x_2} [g(x_1, x_2) - Eg(X_1, X_2)]^2 f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) & X_1, X_2 \ \textit{διακριτές} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [g(x_1, x_2) - Eg(X_1, X_2)]^2 f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 & X_1, X_2 \ \textit{συνεχείς} \end{cases}$$

όταν οι ποσότητες του δεξιού μέλους είναι πεπερασμένες.

Ορισμός 2.4.12 Η **από κοινού ροπογεννήτρια** των τ.μ X_1, X_2 δίνεται από την:

$$M_{X_1, X_2}(t_1, t_2) = \begin{cases} \sum_{x_1} \sum_{x_2} e^{t_1 x_1 + t_2 x_2} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) & X_1, X_2 \ \textit{διακριτές} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1 x_1 + t_2 x_2} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 & X_1, X_2 \ \textit{συνεχείς} \end{cases}$$

Ο παραπάνω ορισμός μπορεί να γενικευτεί, εύκολα, και στην περίπτωση μιας τ.μ. $Y = g(X_1, X_2)$.

Ορισμός 2.4.13 Η **συνδιασπορά** των τ.μ X_1, X_2 ορίζεται να είναι ο παρακάτω αριθμός:

$$C(X_1, X_2) = E[(X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2)] = E(X_1 X_2) - EX_1 EX_2$$

Εάν $C(X_1, X_2) = 0$ τότε οι τ.μ. X_1, X_2 καλούνται **ασυσχέτιστες.**

Το παρακάτω θεώρημα δίνει ένα άνω και κάτω φράγμα της συνδιασποράς δυο τ.μ.

Θεώρημα 2.4.14 (**Ανισότητα του Schwarz**) Ισχύει:

$$-\sigma_{X_1}\sigma_{X_2} \le C(X_1, X_2) \le \sigma_{X_1}\sigma_{X_2}$$

Οι διασπορές τυχαίων μεταβλητών συνδέονται με τις συνδιασπορές τους με την βοήθεια της παρακάτω σχέσης.

Θεώρημα 2.4.15 (**Ισότητα του Bienayme**) Εάν $X_j, j = 1, \cdots, n$ τ.μ. με πεπερασμένη διασπορά, τότε:

$$\sigma^2(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{X_j}^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} C(X_i, X_j) \tag{2.4.16}$$

Εάν οι τ.μ. $X_j, j = 1, \cdots, n$ είναι ανά δύο ασυσχέτιστες, τότε έχουμε:

$$\sigma^2(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{X_j}^2 \tag{2.4.17}$$

Εάν στους ορισμούς η π.π. αντικατασταθεί από μια δεσμευμένη πυκνότητα, τότε η αντίστοιχη μέση τιμή και διασπορά λέγονται **δεσμευμένη μέση τιμή** και **δεσμευμένη διασπορά** αντίστοιχα, δηλαδή έχουμε τους παρακάτω ορισμούς:

Ορισμός 2.4.18 Η **δεσμευμένη** (ή **υπό συνθήκες**) **μέση τιμή** της τ.μ. X_1 **δοθέντος ότι** $X_2 = x_2$ ορίζεται από την σχέση:

$$E(X_1 | X_2 = x_2) = \begin{cases} \sum\limits_{x_1} x_1 f_{X_1, X_2}(x_1 | x_2) & X_1, X_2 \ \textit{διακριτές} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_1 f_{X_1, X_2}(x_1 | x_2) dx_1 & X_1, X_2 \ \textit{συνεχείς} \end{cases}$$

επίσης:

Ορισμός 2.4.19 Η **δεσμευμένη** (ή **υπό συνθήκες**) **διασπορά** της τ.μ. X_1 **δοθέντος** ότι $X_2 = x_2$ ορίζεται από την σχέση

$$\sigma^2(X_1 | X_2 = x_2) = \begin{cases} \sum\limits_{x_1} [x_1 - E(X_1 | X_2 = x_2)]^2 f_{X_1, X_2}(x_1 | x_2) & X_1, X_2 \ \textit{διακριτές} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [x_1 - E(X_1 | X_2 = x_2)]^2 f_{X_1, X_2}(x_1 | x_2) dx_1 & X_1, X_2 \ \textit{συνεχείς} \end{cases}$$

Παρατήρηση 2.4.20 Είναι φανερό από τον ορισμό 2.4.18 ότι η δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. X_1 δοθέντος ότι $X_2 = x_2$ είναι μια συνάρτηση του x_2, έστω $\varphi(x)$, δηλαδή:

$$\phi(x_2) = E(X_1 \mid X_2 = x_2)$$

Η τ.μ. $\phi(X_2)$ παριστάνεται επίσης και σαν $E(X_1 \mid X_2)$. Δηλαδή η τ.μ $E(X_1 \mid X_2)$ ορίζεται από την σχέση:

$$E(X_1 \mid X_2)(x) = \phi(x) = E(X_1 \mid X_2 = x)$$

Επειδή η $E(X_1 \mid X_2)$ είναι μια τ.μ. έχει νόημα να μιλάμε για την μέση τιμή της.

Θεώρημα 2.4.21 Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(i) $E\{E[g(X_1, X_2) \mid X_1]\} = E[g(X_1, X_2)]$

(ii) $E[g_1(X_1) g_2(X_1, X_2) \mid X_1] = g_1(X_1) E[g_2(X_1, X_2) \mid X_1]$

(iii) $\sigma^2[E(X_1 \mid X_2)] \le \sigma^2(X_1)$

με την προυπόθεση ότι όλες οι ποσότητες που εμφανίζονται παραπάνω έχουν νόημα.

2.5 Στοχαστική Ανεξαρτησία τ.μ.

Ορισμός 2.5.1 Οι τ.μ X_1, X_2 καλούνται (**στοχαστικά**) **ανεξάρτητες** εάν:

$$P\{X_1 \in B_1,\, X_2 \in B_2\} = P\{X_1 \in B_1\},\, P\{X_2 \in B_2\} \tag{2.5.2}$$

για οποιαδήποτε υποσύνολα (γεγονότα) B_1, B_2 των πραγματικών αριθμών.

Το παρακάτω θεώρημα δίνει ισοδύναμους ορισμούς της ανεξαρτησίας δυο τ.μ.

Θεώρημα 2.5.3 Οι τ.μ X_1, X_2 είναι (**στοχαστικά**) **ανεξάρτητες** εάν και μόνον εάν ισχύει μια από τις παρακάτω σχέσεις:

(α) $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2)$

(β) $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$

(γ) $M_{X_1, X_2}(t_1, t_2) = M_{X_1}(t_1) M_{X_2}(t_2)$

Άμεσες συνέπειες του ορισμού της ανεξαρτησίας δυό τυχαίων μεταβλητών δίνονται από την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.5.4. Εάν οι τ.μ. X_1, X_2 είναι (στοχαστικά) ανεξάρτητες, τότε:

(1) $E[g_1(X_1) g_2(X_2)] = E[g_1(X_1)] E[g_2(X_2)]$

Από το γεγονός αυτό, εύκολα μπορεί να δει κανείς (;) ότι: εάν δυο τ.μ. είναι ανεξάρτητες τότε είναι και ασυσχέτιστες. Το αντίστροφο εν γένει δεν ισχύει.

(2) $M_{X_1+\cdots+X_n}(t) = M_{X_1}(t)\cdots M_{X_n}(t)$

(3) Εάν $Y_1 = g_1(X_1), Y_2 = g_2(X_2)$ τότε οι τ.μ. Y_1, Y_2 είναι και αυτές ανεξάρτητες.

Το ακόλουθο θεώρημα είναι ένα από τα σπουδαιότερα αποτελέσματα που συναντά κανείς στη Θεωρία Πιθανοτήτων. Συνδέει την κατανομή μιας συγκεκριμένης συνάρτησης ανεξαρτήτων τ.μ. με την κανονική κατανομή φανερώνοντας έτσι την σπουδαιότητα της κανονικής κατανομής.

Θεώρημα 2.5.5 (**Κεντρικό Οριακό Θεώρημα**)

Εάν οι $X_1, \cdots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανεμημένες τ.μ. με πεπερασμένη μέση τιμή και διασπορά και θέσουμε:

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \tag{2.5.6}$$

τότε:

$$P\left\{\frac{S_n - ES_n}{\sigma(S_n)} \le x\right\} \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(x) \tag{2.5.7}$$

όπου $\Phi(x)$ η συνάρτηση κατανομής την τυπικής κανονικής κατανομής.

Παρατήρηση 2.5.8 Ο τρόπος σύγκλισης που περιγράφεται στο παραπάνω θεώρημα λέγεται **σύγκλιση κατά κατανομή**

Μ΄ άλλα λόγια το Κ.Ο.Θ. αναφέρει ότι:

$$\frac{S_n - ES_n}{\sigma(S_n)} \approx N(0,1) \tag{2.5.9}$$

ή επειδή $ES_n = n\mu,\ \sigma^2(S_n) = n\sigma^2$, έχουμε:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \approx N(0,1) \tag{2.5.10}$$

ή ισοδύναμα:

$$S_n \approx N(n\mu, n\sigma^2) \tag{2.5.11}$$

Τέλος, εάν $\overline{X_n} = \frac{S_n}{n}$, έχουμε:

$$\frac{\sqrt{n}\,(\overline{X_n} - \mu)}{\sigma} \approx N(0,1) \tag{2.5.12}$$

ή ισοδύναμα:

$$\overline{X_n} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right). \tag{2.5.13}$$

2.6 Ασκήσεις

2.6.1 Μια τ.μ. X έχει κατανομή (πυκνότητα) πιθανότητας που δίνεται από τον πίνακα**:**

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$p(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

(α) Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της X και να γίνει η γραφική της παράσταση.

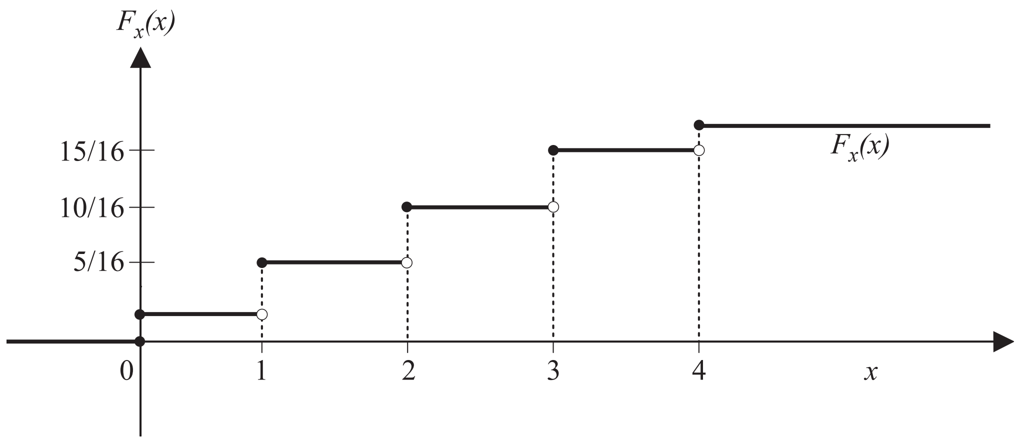
(β) Να βρεθεί η μέση τιμή EX και η διασπορά $V(X)$ της X.

Λύση

Η συνάρτηση κατανομής της X είναι ίση με:

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{16} & 0 \le x < 1 \\ \frac{5}{16} & 1 \le x < 2 \\ \frac{11}{16} & 2 \le x < 3 \\ \frac{15}{16} & 3 \le x < 4 \\ 1 & 4 \le x \end{cases}$$

η δε γραφική της παράσταση είναι



(β) Η μέση τιμή της είναι ίση με:

$$EX = \sum_{x=0}^{4} x \cdot P\{X = x\} = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = 2$$

Ακόμα:

$$EX^2 = \sum_{x=0}^{4} x^2 \cdot P\{X = x\} = 0^2 \cdot \frac{1}{16} + 1^2 \cdot \frac{4}{16} + 2^2 \cdot \frac{6}{16} + 3^2 \cdot \frac{4}{16} + 4^2 \cdot \frac{1}{16} = 5$$

άρα η <u>διασπορά</u> της είναι ίση με: $V(X) = EX^2 - (EX)^2 = 5 - 2^2 = 1$

2.6.2 Η τυχαία μεταβλητή X έχει <u>πυκνότητα</u> <u>πιθανότητας</u>:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0{,}2 & -\theta \le x \le \theta \\ \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$$

(α) Να βρεθεί η σταθερά θ (έτσι ώστε η $f_X(x)$ νάναι πυκνότητα πιθανότητας).

(β) Να βρεθούν οι πιθανότητες:
(I) $\mathrm{P}\{-1 \le X \le 2\}$ (II) $\mathrm{P}\{X \ge 1{,}5\}$

(γ) Να βρεθεί η σταθερά c τέτοια ώστε: $\mathrm{P}\{X \ge c\} = 0{,}8$

(δ) Να βρεθεί η μέση τιμή EX και η διασπορά $V(X)$ της X.

Λύση

(α) Ξέρουμε ότι για νάναι η $f_X(x)$ πυκνότητα πιθανότητας θα πρέπει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{-\theta}^{\theta} 0{,}2\,dx = 1 \Rightarrow 0{,}2x\Big|_{-\theta}^{\theta} = 1 \Rightarrow 0{,}4\theta = 1 \Rightarrow \theta = 2{,}5$$

δηλαδή:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0{,}2 & -2{,}5 \le x \le 2{,}5 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$$

(β) (I) $\mathrm{P}\{-1 \le X \le 2\} = \int_{-1}^{2} 0{,}2\,dx = 0{,}2x\Big|_{-1}^{2} = 0{,}6$ και:

(II) $\mathrm{P}\{X \ge 1{,}5\} = \int_{1{,}5}^{\infty} 0{,}2\,dx = \int_{1{,}5}^{2{,}5} 0{,}2\,dx = 0{,}2x\Big|_{1{,}5}^{2{,}5} = 0{,}2$

(γ) Έχουμε ότι:

$$\mathrm{P}\{X \ge c\} = 0{,}8 \Rightarrow \int_{c}^{\infty} 0{,}2\,dx = \int_{c}^{2{,}5} 0{,}2\,dx = 0{,}8 \Rightarrow 0{,}2x\Big|_{c}^{2{,}5} = 0{,}2\,(2{,}5 - c) = 0{,}8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2{,}5 - c = 4 \Rightarrow c = -1{,}5$$

(δ) Η μέση τιμή της X είναι ίση με:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx = \int_{-2{,}5}^{2{,}5} 0{,}2\,x\,dx = 0{,}2\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-2{,}5}^{2{,}5} = 0\,;$$

Ακόμα:

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{-2,5}^{2,5} 0,2\,x^2\,dx = 0,2\frac{x^3}{3}\bigg|_{-2,5}^{2,5} = 2,08$$

και έτσι η διασπορά της X είναι ίση με:

$$V(X) = EX^2 - (EX)^2 = 2,08 - 0^2 = 2,08$$

2.6.3 Εάν η τ.μ $X \approx P(\lambda)$ τότε (α) $EX=\lambda$ (β) $\sigma^2(X)=\lambda$

Λύση

(α) Έχουμε:

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} kP\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}, =$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda \qquad \left(\sum_{y=0}^{\infty}\frac{a^y}{y!} = e^a\right)$$

(β) $\sigma^2(X) = E[(X-(EX))^2] = E(X^2)-(EX)^2$ ή $\sigma^2(X) = E[X(X-1)]+E(X)-(EX)^2$

Τώρα:

$$E[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\,P\{X=k\} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!} = \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^2$$

οπότε

$$\sigma^2(X) = E[X(X-1)]+E(X)-(EX)^2 = \lambda^2+\lambda-\lambda^2 = \lambda\,.$$

2.6.4 Έστω ότι η τ.μ $X \approx P(\lambda)$.

(α) Να δειχθεί ότι $M_X(t) = e^{\lambda e^t - \lambda}$

(β) Με την βοήθεια του (α) υπολογίστε την μέση τιμή και διασπορά της X .

Λύση

(α) Έχουμε:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^t} = e^{\lambda e^t - \lambda}$$

(β) Ξέρουμε: $EX = \frac{d}{dt}M_X(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\{e^{\lambda e^t-\lambda}\}\,|_{t=0} = \lambda e^{\lambda e^t - \lambda}e^t\,|_{t=0} = \lambda$

ακόμα

$$EX^2 = \frac{d^2}{dt^2} M_X(t)|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2}\{e^{\lambda e^t-\lambda}\}|_{t=0} = (\lambda e^{\lambda e^t-\lambda}e^t + \lambda^2 e^{\lambda e^t-\lambda}e^{2t})|_{t=0} = \lambda^2+\lambda$$

οπότε $\sigma^2(X) = E(X^2)-(EX)^2 = \lambda^2+\lambda-\lambda^2 = \lambda$

2.6.5 *(Διωνυμική κατανομή)* Από την γενική απογραφή καταστημάτων ενός έτους, διαπιστώθηκε ότι 10% των καταστημάτων λειτουργούσε χωρίς άδεια του αρμόδιου Υπουργείου. Επιλέγουμε 6 καταστήματα τυχαία, ποιά η πιθανότητα:

(α) ακριβώς 4 από αυτά να λειτουργούσαν χωρίς άδεια του Υπουργείου
(β) τουλάχιστον 4 από αυτά να λειτουργούσαν χώρις άδεια του Υπουργείου
(γ) το πολύ 3 από αυτά να λειτουργούσαν χώρις άδεια του Υπουργείου
(δ) τουλάχιστον 4 από αυτά να λειτουργούσαν **με** άδεια του Υπουργείου.

Λύση

Διωνυμικό πείραμα: (δυό δυνατά αποτελέσματα)

¨**επιτυχία**¨=¨το κατάστημα λειτουργούσε **<u>χωρίς</u>** την άδεια του αρμόδιου Υπουργείου¨

P(«επιτυχίας») = **0,10 = p** και **n = 6** (αριθμός των επαναλήψεων)

Εάν **X=αριθμός των καταστημάτων που λειτουργούσαν <u>χωρίς</u> την άδεια του αρμόδιου Υπουργείου**, τότε

(α) $P(X=4) = \frac{6!}{4!\cdot(6-4)!}0{,}10^4\cdot 0{,}90^{6-4} = 15\cdot 0{,}10^4\cdot 0{,}90^2 = \ldots$

η πιθανότητα μπορεί να υπολογιστεί με την χρήση **διωνυμικών πινάκων(;)**

(β) $P(X\geq 4) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) =$

$$\frac{6!}{4!\cdot(6-4)!}0{,}10^4\cdot 0{,}90^{6-4} + \frac{6!}{5!\cdot(6-5)!}0{,}10^5\cdot 0{,}90^{6-5} + \frac{6!}{6!\cdot(6-6)!}0{,}10^6\cdot 0{,}90^{6-6} = \ldots$$

(γ) $P(X\leq 3) = P(X=3) + P(X=2) + P(X=1) + P(X=0) =$
(ανάλογα με το (β)) = ...

(δ) P(τουλάχιστον 4 από αυτά να λειτουργούσαν **με** άδεια του Υπουργείου) =
P(4 ή 5 ή 6 καταστήματα λειτουργούσαν **με** άδεια του Υπουργείου) =
P(2 ή 1 ή 0 καταστήματα λειτουργούσαν **χωρίς** την άδεια του Υπουργείου)=
$P(X \leq 2) = P(X=2) + P(X=1) + P(X=0) =$ .... (ανάλογα με το (β))

2.6.6 *(Κανονική κατανομή)* Το IQ αποτελεί δείκτη ευφυίας των ατόμων και ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ=100 και τυπική απόκλιση σ=15. Αν X είναι ο δείκτης ευφυίας ενός ατόμου, να βρεθούν οι παρακάτω πιθανότητες:

(α) $P(X < 118)$ (β) $P(X > 112)$ (γ) $P(X < 94)$

(δ) $P(X > 73)$ (ε) $P(100 < X < 112)$ (στ) $P(73 < X < 118)$

(ζ) $P(73 < X < 94)$

Λύση

Εχουμε:

(α) $P(X < 118) = P\left(\frac{X-100}{15} < \frac{118-100}{15}\right) = P(Z < 1{,}2) = 0{,}884930$

(β) $P(X > 112) = P\left(\frac{X-100}{15} > \frac{112-100}{15}\right) = P(Z > 0{,}8) = 1 - P(Z < 0{,}8) =$

$= 1 - 0{,}788145 = 0{,}211855$

(γ) $P(X < 94) = P\left(\frac{X-100}{15} < \frac{94-100}{15}\right) = P(Z < -0{,}4) = P(Z > 0{,}4) =$

$= 1 - P(Z < 0{,}4) = 1 - 0{,}655422 = 0{,}344578$

(με χρήση των κανονικών πινάκων)

(δ) $P(X > 73) = P\left(\frac{X-100}{15} > \frac{73-100}{15}\right) = P(Z > -1{,}8) = P(Z < 1{,}8) = 0{,}964070$

(ε) $P(100 < X < 112) = P\left(\frac{100-100}{15} < \frac{X-100}{15} < \frac{112-100}{15}\right) =$

$= P(0 < Z < 0{,}8) = P(Z < 0{,}8) - P(Z < 0) = 0{,}788145 - 0{,}5 = 0{,}288145$

(στ) $P(73 < X < 118) = P\left(\frac{73-100}{15} < \frac{X-100}{15} < \frac{118-100}{15}\right) =$

$P(-1{,}8 < Z < 1{,}2) = P(Z < 1{,}2) - P(Z < -1{,}8) = P(Z < 1{,}2) - P(Z > 1{,}8) =$

$P(Z < 1{,}2) - \{1 - P(Z < 1{,}8)\} = P(Z < 1{,}2) - 1 + P(Z < 1{,}8) =$

$0{,}884930 - 1 + 0{,}964070 = 0{,}849$

(ζ) $P(73 < X < 94) = P\left(\frac{73-100}{15} < \frac{X-100}{15} < \frac{94-100}{15}\right) =$

$P(-1{,}8 < Z < -0{,}4) = P(0{,}4 < Z < 1{,}8) =$

$P(Z < 1{,}8) - P(Z < 0{,}4) = 0{,}964070 - 0{,}655422 = 0{,}308648$

2.6.7 *(Τυπική κανονική κατανομή)* Αν $Z \approx N(0,1)$ να βρεθεί η σταθερά c στις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $P(Z < c) = 0{,}9554$ (β) $P(Z > c) = 0{,}0321$

(γ) $P(Z < c) = 0{,}3085$ (δ) $P(1 < Z < c) = 0{,}1219$

Λύση

(α) $P(Z < c)=0{,}9554 \Rightarrow$ (c θετικό) από τους κανονικούς πίνακες c=1,70

(β) $P(Z > c)=0{,}0321 \Rightarrow P(Z < c)=1-0{,}0321=0{,}9679 \Rightarrow$
(c θετικό) από τους κανονικούς πίνακες c=1,85

(γ) $P(Z < c) = 0{,}3085 \Rightarrow$ (c αρνητικό)
$P(Z < c) = P(Z > - c) \Rightarrow P(Z < -c) = 1- 0{,}3085=0{,}6915$
από τους κανονικούς πίνακες $-c=0{,}5 \Rightarrow c=-0{,}5$

(δ) $P(1<Z<c) = 0{,}1219 \Rightarrow P(Z < c)- P(Z < 1) = P(Z < c)-0{,}841345 = 0{,}1219$
$\Rightarrow P(Z < c) = 0{,}963245$ από τους κανονικούς πίνακες c=1,79.

2.6.8 *(Κατανομή Poisson)* Ένας εντομολόγος μελετά τον αριθμό των ζωύφιων στα φύλλα ενός δένδρου. Ο αριθμός αυτός ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ=10.

(α) Ποιά η πιθανότητα να πάρει ένα φύλλο με τουλάχιστον 5 ζωύφια;

(β) Ποιά η πιθανότητα να πάρει ένα φύλλο χωρίς κανένα ζωύφιο;

Λύση

Εάν X= **αριθμός των ζωύφιων σε ένα φύλλο του δένδρου**, τότε $X \approx P(10)$ και είναι γνωστό:

$$P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \qquad x = 0,1,2,....$$

(α) $P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0{,}0293 = 0{,}9707$
(από τους πίνακες Poisson με λ=10 και κ=4).

(β) $P(X = 0) = e^{-10}\frac{10^0}{0!} = 0{,}000045 \approx 0$

2.6.9 Ο αριθμός των μικροβίων X που βρίσκονται σ’ένα χώρο V είναι μια τ.μ. $X \approx P(\lambda)$. Να προσδιορισθεί ο λ, αν είναι $P(X > 0) = 0{,}999$.

Λύση

Έχουμε:

$P(X > 0) = 0{,}999 = 1-P(X=0) \Rightarrow P(X=0) = 0{,}001 \Rightarrow$

$$P(X = 0) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = 0{,}001 \Rightarrow e^{-\lambda} = 0{,}001 \Rightarrow \lambda = -\ln(0{,}001) \cong 6{,}9$$

2.6.10 *(Εκθετική κατανομή)* Η διάρκεια ζωής (σε χρόνια) μιας ηλεκτρικής συσκευής έχει την (αρνητική) εκθετική κατανομή με παράμετρο λ=0,1. Ποιά η πιθανότητα ότι η εν λόγω ηλεκτρική συσκευή θα πρέπει ν'αντι-κατασταθεί όχι αργότερα από 5 χρόνια; Μετά από 7 χρόνια;

Λύση

Εχουμε:

$$\mathrm{P(X \le 5)} = \int_0^5 \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = \int_0^5 0{,}1 \cdot e^{-0{,}1x} dx = -e^{-0{,}1\cdot 5} + e^{-0{,}1\cdot 0} \cong 0{,}39 .$$

$$\mathrm{P(X \ge 7)} = \int_7^{+\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = \int_7^{+\infty} 0{,}1 \cdot e^{-0.1x} dx = -e^{-0.1\cdot x}\Big|_7^{+\infty} = e^{-0.7} \cong 0{,}49$$

2.6.11 Εάν η τ.μ X ακολουθεί την γάμμα κατανομή με παραμέτρους α και β, να βρεθεί η κατανομή της τ.μ $Y = \ln X$.

Λύση

Η π.π. της τ.μ. X, είναι ως γνωστόν ίση με:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^a} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

Εδώ:

$$g : S = (0,+\infty) \to T = (-\infty,+\infty),\ g(x) = \ln x \Rightarrow g^{-1}(y) = e^y \ \ \& \ \ \frac{d}{dy}(e^y) = e^y$$

οπότε, από γνωστό θεώρημα έχουμε:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^a}(e^y)^{\alpha-1} e^{-\frac{e^y}{\beta}} e^y = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^a} e^{y\alpha - \frac{e^y}{\beta}} \quad y \in \Re$$

2.6.12 Έστω *X, Y* τ.μ με από κοινού π.π. την:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} & x, y > 0 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι οι τ.μ. *X, Y* είναι ανεξάρτητες

Λύση

Οι περιθωριακές π.π. των τ.μ. *X, Y* είναι ίσες με:

$$f_X(x) = \int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} dy = \lambda e^{-\lambda x} \quad x > 0$$

και (όμοια) $\quad f_Y(y) = \int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}dx = \lambda e^{-\lambda y} \quad y > 0$

Επειδή τώρα:

$$f_{X,Y}(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} = \lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y} = f_X(x)f_Y(y)$$

οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες.

2.6.13 *(Κ.Ο.Θ.)* Εργοστάσιο κατασκευάζει συσσωρευτές, η διάρκεια ζωής καθενός εκ των οποίων ακολουθεί την αρνητική εκθετική κατανομή με μέσο 300 ώρες. Διαλέγουμε 20 από αυτούς τους συσσωρευτές τυχαία. Να υπολογιστεί η πιθανότητα (αυτοί) να δουλεύουν συνολικά πάνω από 8000 ώρες.

Λύση

Έστω $X_1, X_2, \cdots, X_{20}$ τ.μ. που εκφράζουν την διάρκεια ζωής (κάθενός εκ) των 20 συσσωρευτών, τότε:

$$X_i \approx f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ i = 1,2,\cdots,20 \qquad \& \qquad \lambda = \frac{1}{300}$$

Η ζητούμενη πιθανότητα, με την βοήθεια του Κ.Ο.Θ., γίνεται:

$$P\{X_1 + X_2 + \cdots + X_{20} > 8000\} = P\{S_{20} > 8000\} =$$

$$P\{\frac{S_{20} - ES_{20}}{\sqrt{\sigma^2(S_{20})}} > \frac{8000 - 6000}{\sqrt{1.800.000}}\} = P\{\frac{S_{20} - ES_{20}}{\sqrt{\sigma^2(S_{20})}} > 1{,}5\} =$$

$$1 - P\{\frac{S_{20} - ES_{20}}{\sqrt{\sigma^2(S_{20})}} < 1{,}5\} = 1 - \Phi(1{,}5) = 1 - 0{,}933193 = 0{,}066$$

γιατί: $\quad ES_{20} = 20 \cdot EX_1 = 20 \cdot \frac{1}{\lambda} = 20 \cdot 300 = 6000$ ώρες

και $\quad \sigma^2(S_{20}) = 20 \cdot \sigma^2(X_1) = 20 \cdot \frac{1}{\lambda^2} = 20 \cdot 300^2 = 1.800.000$ ώρες^2

2.6.14 Ένα κανονικό νόμισμα ρίχνεται ανεξάρτητα n φορές και έστω S_n μια τ.μ. που δηλώνει τον συνολικό αριθμό κεφαλών που εμφανίστηκαν. Υπολογίστε την μικρότερη τιμή του n για την οποία έχουμε:

$$P\{\left|\overline{X_n} - 0{,}5\right| \leq 0{,}1\} \geq 0{,}95$$

όπου: $\quad \overline{X_n} = \frac{S_n}{n}$

Λύση

Εάν θεωρήσουμε τις n ρίψεις σαν n ανεξάρτητες τ.μ. $X_1, X_2, \cdots, X_n$, τότε:

$$X_i \approx B(1,\frac{1}{2}),\ i=1,2,\cdots,n \ \Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \approx B(n,\frac{1}{2}) \qquad \&$$

$$\mu = E(X_1) = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \sigma = \sqrt{\sigma^2(X_1)} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

οπότε, με την βοήθεια του Κ.Ο.Θ., η ζητούμενη πιθανότητα γίνεται:

$$P\{\left|\overline{X_n} - 0{,}5\right| \le 0{,}1\} = P\{-0{,}1 \le \overline{X_n} - 0{,}5 \le 0{,}1\} =$$

$$= P\{-0{,}1\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \le \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X_n} - \mu) \le 0{,}1\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\} =$$

$$\overset{Z=\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X_n}-\mu)}{=} \quad P\{-0{,}1\cdot 2\sqrt{n} \le Z \le 0{,}1\cdot 2\sqrt{n}\} =$$

$$= P\{Z \le 0{,}1\cdot 2\sqrt{n}\} - P\{Z \le -0{,}1\cdot 2\sqrt{n}\} =$$

$$= P\{Z \le 0{,}1\cdot 2\sqrt{n}\} - P\{Z \ge 0{,}1\cdot 2\sqrt{n}\} =$$

$$= P\{Z \le 0{,}1\cdot 2\sqrt{n}\} - \{1 - P\{Z \le 0{,}1\cdot 2\sqrt{n}\}\} =$$

$$= 2P\{Z \le 0{,}1\cdot 2\sqrt{n}\} - 1 = 2\,\Phi(0{,}2\sqrt{n}) - 1$$

Επειδή θέλουμε:

$$2\Phi(0{,}2\sqrt{n}) - 1 \ge 0{,}95 \Rightarrow \Phi(0{,}2\sqrt{n}) \ge 0{,}975 \Rightarrow 0{,}2\sqrt{n} \ge 1{,}96 \Rightarrow \sqrt{n} \ge \frac{1{,}96}{0{,}2} \Rightarrow$$

$$n \ge 96{,}04 \Rightarrow n \ge 97$$

2.6.15 Εάν $X_1,\cdots,X_k$ ανεξάρτητες τ.μ. τέτοιες ώστε $X_j \approx B(n_j, p),\ j = 1,\cdots,k$. Τότε η τ.μ. $S_k = X_1 + \cdots + X_k \approx B(n,p)$ όπου $n = n_1 + \cdots + n_k$.

Λύση

Χρησιμοποιώντας το μονοσήμαντο της αντιστοιχίας μεταξύ της πυκνότητας πιθανότητας μιας τ.μ. και της ροπογεννήτριάς της, είναι αρκετό να δείξουμε ότι η ροπογεννήτρια της τ.μ. $S_k = X_1 + \cdots + X_k$ είναι εκείνη μιας τ.μ. με κατανομή την $B(n,p)$. Από την ανεξαρτησία των τ.μ. $X_1,\cdots,X_k$ έχουμε:

$$M_{S_k}(t) = M_{X_1+\cdots+X_k}(t) = M_{X_1}(t)\cdots M_{X_k}(t) =$$

$$= (pe^t + q)^{n_1}\cdots(pe^t + q)^{n_k} = (pe^t + q)^n$$

και αυτή είναι η ροπογεννήτρια μιας $B(n,p)$ τ.μ. με $n = n_1 + \cdots + n_k$.

Παρατήρηση Η παραπάνω ιδιότητα καλείται **αναπαραγωγική**, με την έννοια ότι το άθροισμα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με την ίδιου τύπου κατανομή έχει κατανομή του ίδιου τύπου. Η κατανομή Poisson, η κανονική κατανομή, η γάμμα κατανομή είναι μερικά παραδείγματα κατανομών που έχουν την ιδιότητα αυτή. Πράγματι, μπορεί να αποδειχθεί με τρόπο ανάλογο όπως παραπάνω ότι, ισχύουν τα εξής:

(i) Εάν $X_1,\cdots,X_k$ ανεξάρτητες τ.μ. τέτοιες ώστε $X_j \approx P(\lambda_j),\ j=1,\cdots,k$.
Τότε η τ.μ. $S_k = X_1+\cdots+X_k \approx P(\lambda)$ όπου $\lambda = \lambda_1+\cdots+\lambda_k$.

(ii) Εάν $X_1,\cdots,X_k$ ανεξάρτητες τ.μ. τέτοιες ώστε
$X_j \approx N(\mu_j,\sigma_j^2),\ j=1,\cdots,k$. Τότε η τ.μ. $S_k = X_1+\cdots+X_k \approx N(\mu,\sigma^2)$
όπου $\mu=\mu_1+\cdots+\mu_k$, $\sigma^2=\sigma_1^2+\cdots+\sigma_k^2$.

(iii) Εάν $X_1,\cdots,X_k$ ανεξάρτητες τ.μ. τέτοιες ώστε $X_j,\ j=1,\cdots,k$ ακολουθεί την γάμμα κατανομή με παραμέτρους $\alpha_j,\ \beta$.
Τότε η τ.μ. $S_k = X_1+\cdots+X_k$ ακολουθεί την γάμμα κατανομή με παραμέτρους $\alpha,\ \beta$ όπου $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_k$.

Γενικά, η αναπαραγωγική ιδιότητα που περιγράψαμε παραπάνω δεν ισχύει. Για παράδειγμα εάν *X, Y* είναι δυό ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή, το άθροισμά τους *X*+*Y* δεν ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή (αλλά μια κατανομή που ονομάζεται τριγωνική).