Σημειώσεις στις συναρτήσεις

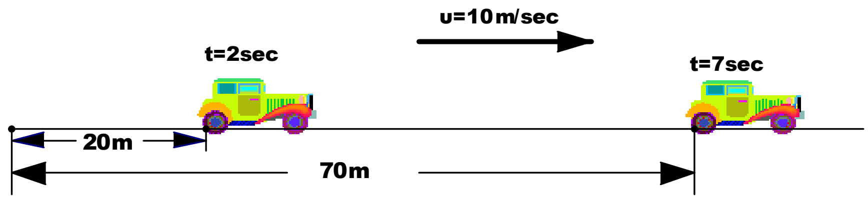
4.1 Η έννοια της συνάρτησης

Ο όρος «συνάρτηση» χρησιμοποιείται αρκετά συχνά για να δηλώσει ότι ένα μέγεθος, μια κατάσταση κτλ. εξαρτάται από κάτι άλλο. Και στα μαθηματικά ο όρος συνάρτηση έχει παρόμοια σημασία. Το επόμενο, ίσως απλοϊκό, αλλά διδακτικό παράδειγμα θα μας βοηθήσει να αντιληφθούμε καλύτερα την ακριβή έννοια του όρου.

4.1.1 Παράδειγμα

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα αυτοκίνητο που κινείται σε ευθεία γραμμή με σταθερή ταχύτητα 10m/sec. Κατά την εκκίνηση του αυτοκινήτου το ρολόι μας δείχνει χρόνο $t=0$.

Αν συμβολίσουμε με s το διάστημα (σε μέτρα) που διανύει το αυτοκίνητο σε χρόνο t (σε δευτερόλεπτα), τότε θα έχουμε τη σχέση: $s=10\cdot t$. Έτσι, σε χρόνο 2sec το αυτοκίνητο διανύει διάστημα 20m, σε χρόνο 7sec το αυτοκίνητο διανύει διάστημα 70m κ.ο.κ.

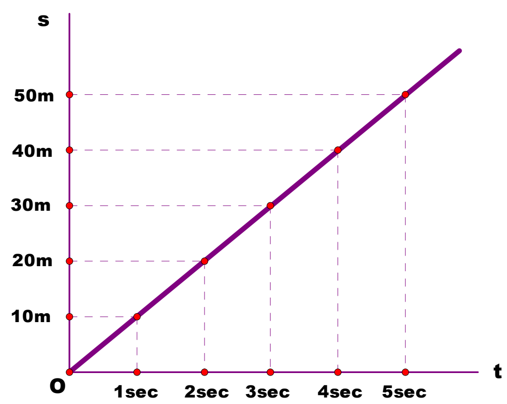


Η σχέση $s=10\cdot t$ μας δίνει το διάστημα s ως **συνάρτηση** του χρόνου t. Δηλαδή, αν ξέρουμε πόσος χρόνος πέρασε από την εκκίνηση του αυτοκινήτου μπορούμε να υπολογίσουμε το αντίστοιχο διάστημα που το αυτοκίνητο διένυσε.

Για να δηλώσουμε ότι το διάστημα s **εξαρτάται** από τον χρόνο t γράφουμε $s(t)$ αντί s και διαβάζουμε «***s* του *t***». Ο χρόνος t είναι η **ανεξάρτητη μεταβλητή** και το διάστημα s η **εξαρτημένη**.

Αν παραστήσουμε σε ένα σύστημα αξόνων τα ζεύγη $(t, s(t))$ για τις διάφορες τιμές του t, παίρνουμε μια ημιευθεία γραμμή.

Η ημιευθεία αυτή αποτελεί τη **γραφική παράσταση** της συνάρτησης με τύπο $s(t)=10t$.



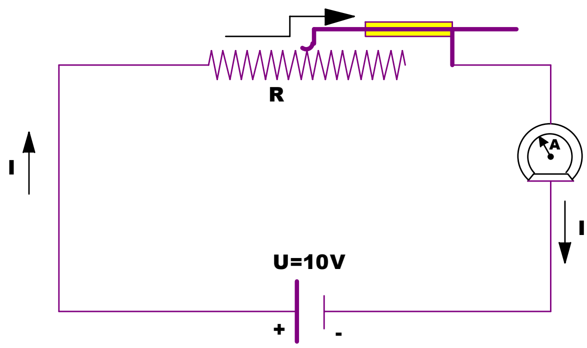
Ο χρόνος t θεωρητικά μπορεί να πάρει

οποιαδήποτε τιμή, από μηδέν έως άπειρο. (Αν δεχτούμε ότι το αυτοκίνητο έχει άπειρη ποσότητα βενζίνης!). Λέμε λοιπόν ότι το **πεδίο ορισμού** της συνάρτησής μας είναι το διάστημα $[0,+\infty)$.

Ας δούμε τώρα ένα άλλο παράδειγμα παρμένο πάλι από τη φυσική:

4.1.2 Παράδειγμα

Έχουμε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα που αποτελείται από έναν συσσωρευτή (μπαταρία) με συνεχή τάση $U = 10$ Volt. Στο κύκλωμα υπάρχει μια μεταβλητή αντίσταση *R*. (Μετριέται σε Ω=Ohm). Με ένα αμπερόμετρο μετράμε σε Ampere την ένταση *I* του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.



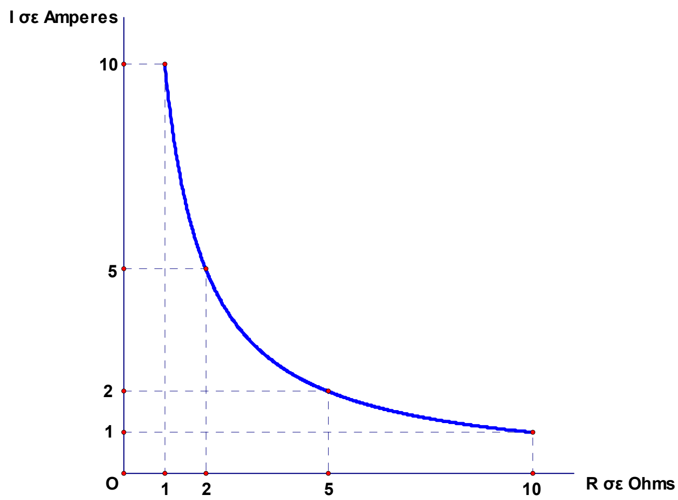
Σύμφωνα με τον νόμο του Ohm έχουμε: $I = \frac{U}{R} = \frac{10}{R}$.

Με τον ροοστάτη (μεταβλητή αντίσταση) δίνουμε διάφορες τιμές στο *R*. Προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας:

ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ R ΣΕ ΟΗΜ (Ω)	1	2	5	10
Ένταση I σε Ampere (A)	10	5	2	1

Παρατηρούμε ότι η ένταση *I* εξαρτάται από την τιμή της αντίστασης *R*, είναι δηλαδή **συνάρτηση του *R***. Το *R* είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή, που μπορούμε να το μεταβάλλουμε όσο θέλουμε ή καλύτερα, μπορούμε να το μεταβάλλουμε μεταξύ δύο τιμών, π.χ. $R_1 = 1\,\Omega < R_2 = 10\,\Omega$ και το *I* η εξαρτημένη.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $I(R) = \frac{10}{R}$ είναι το διάστημα $[R_1, R_2]$.



Αν παραστήσουμε σε ένα σύστημα αξόνων τα ζεύγη $(R, I(R))$ για τις διάφορες τιμές του *R*, παίρνουμε μια **καμπύλη** γραμμή.

Η καμπύλη αυτή αποτελεί τη **γραφική παράσταση** της συνάρτησης με τύπο

$I(R) = \frac{10}{R}$.

Ας συνοψίσουμε τώρα όσα είδαμε στα προηγούμενα παραδείγματα:

Μια συνάρτηση είναι μια ***διαδικασία*** *ή μια* ***σχέση εξάρτησης*** *στην οποία εμπλέκονται* ***δύο μεταβλητές ποσότητες****.*

Η μία ποσότητα είναι η ***ανεξάρτητη μεταβλητή*** *x, η οποία μεταβάλλεται ελεύθερα, παίρνοντας τιμές από ένα σύνολο (που εμείς έχουμε προκαθορίσει) και το οποίο λέγεται* ***πεδίο ορισμού****.*

Η άλλη ποσότητα είναι η ***εξαρτημένη μεταβλητή*** *y, η οποία όμως* ***δεν μεταβάλλεται ελεύθερα****. Η τιμή που παίρνει κάθε φορά η μεταβλητή y* ***εξαρτάται από την τιμή που έχει η ανεξάρτητη μεταβλητή x*** *τη συγκεκριμένη στιγμή. Έτσι, σε κάθε τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχεί μία μόνον τιμή της μεταβλητής y.*

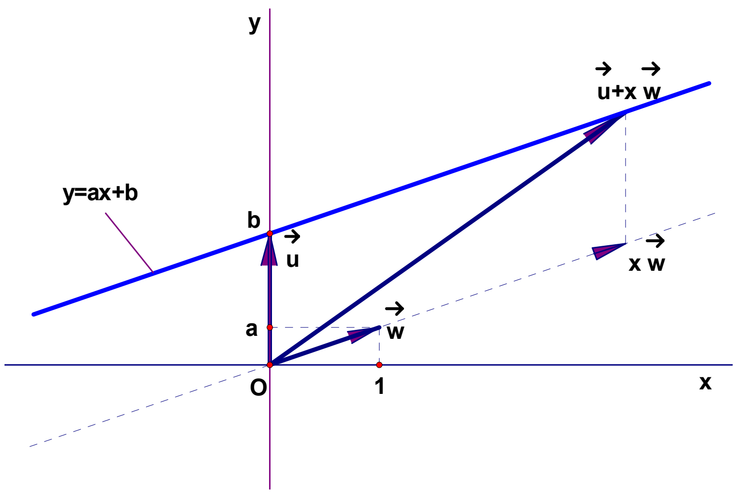
Έτσι, στη συνάρτηση $I(R) = \frac{10}{R}$, αν η ανεξάρτητη μεταβλητή R πάρει την τιμή 2, η εξαρτημένη μεταβλητή I θα πάρει αναγκαστικά την τιμή $\frac{10}{2} = 5$.

4.1.3 Παραδείγματα συναρτήσεων

1. Η συνάρτηση $y = ax + b$, όπου a και b είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

Εδώ το πεδίο ορισμού της συνάρτησης (το σύνολο στο οποίο παίρνει τιμές η ανεξάρτητη μεταβλητή x) είναι όλο το $\mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης αποτελείται από όλα τα ζεύγη της μορφής $(x, ax+b)$, $x \in \mathbb{R}$. Τα σημεία αυτά είναι τα πέρατα των διανυσμάτων $\overrightarrow{OM} = \vec{u} + x \cdot \vec{w}$, όπου $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ και $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$.



Καθώς το x παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$, το διάνυσμα $x \cdot \vec{w}$ «σαρώνει» μια ευθεία γραμμή (διακεκομμένη).

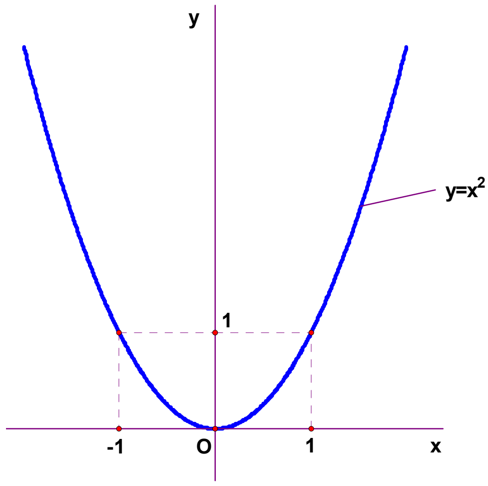
Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM} = \vec{u} + x \cdot \vec{w}$ «σαρώνει» και αυτό μια ευθεία γραμμή, η οποία είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησής μας.

Η ευθεία αυτή προκύπτει από την πρώτη με παράλληλη μετατόπιση κατά το διάνυσμα $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$.

Επειδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax + b$ είναι ευθεία γραμμή, η συνάρτηση αυτή λέγεται **γραμμική**.

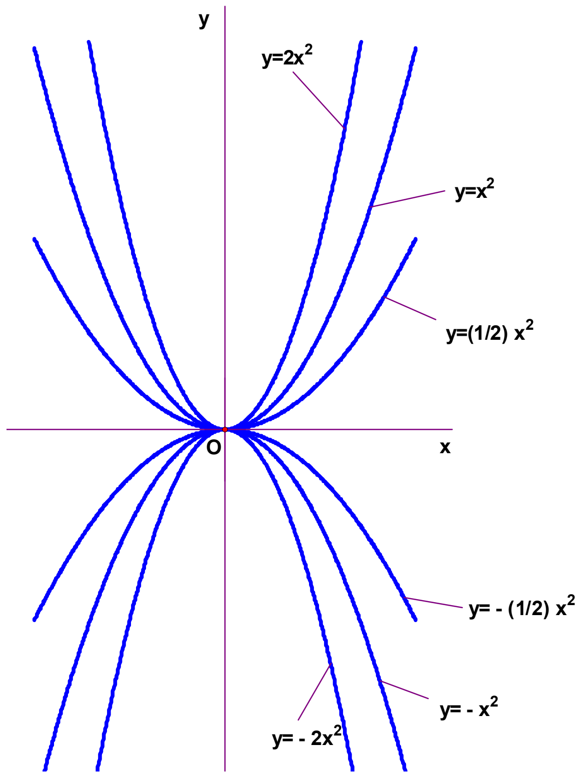
2. Η συνάρτηση $y = ax^2 + bx + c$, όπου *a*, *b* και *c* είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί με $a \neq 0$.

Ας εξετάσουμε πρώτα την ειδική περίπτωση $y = x^2$. Είναι προφανές ότι το πεδίο ορισμού είναι όλο το $\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης αποτελείται από όλα τα ζεύγη της μορφής (x, x^2), $x \in \mathbb{R}$ και είναι μια καμπύλη γραμμή.



Παρατηρούμε ότι η καμπύλη αυτή «κατέρχεται» αριστερά του άξονα των *y* και «ανέρχεται» δεξιά του. Παρατηρούμε ακόμη ότι η καμπύλη αυτή είναι **συμμετρική ως προς τον άξονα των *y***.

Αυτό είναι απόρροια του γεγονότος ότι τα σημεία (x, x^2) και $(-x, x^2)$ της καμπύλης έχουν αντίθετες τετμημένες και την ίδια τεταγμένη. Μια συνάρτηση με αυτή την ιδιότητα λέγεται **άρτια**.

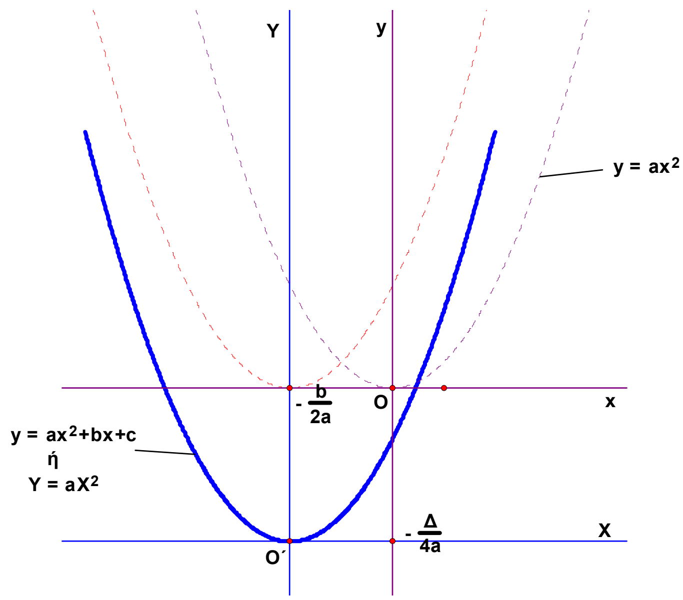


Αν τώρα δώσουμε διάφορες τιμές στο *a*, παίρνουμε μια οικογένεια καμπυλών που είναι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = ax^2$. Οι καμπύλες αυτές ονομάζονται γενικά **παραβολές**.

Αν $a > 0$, τότε η καμπύλη αυτή «κατέρχεται» αριστερά του άξονα των *y* και «ανέρχεται» δεξιά του. Αν $a < 0$, τότε η καμπύλη αυτή «ανέρχεται» αριστερά του άξονα των *y* και «κατέρχεται» δεξιά του.

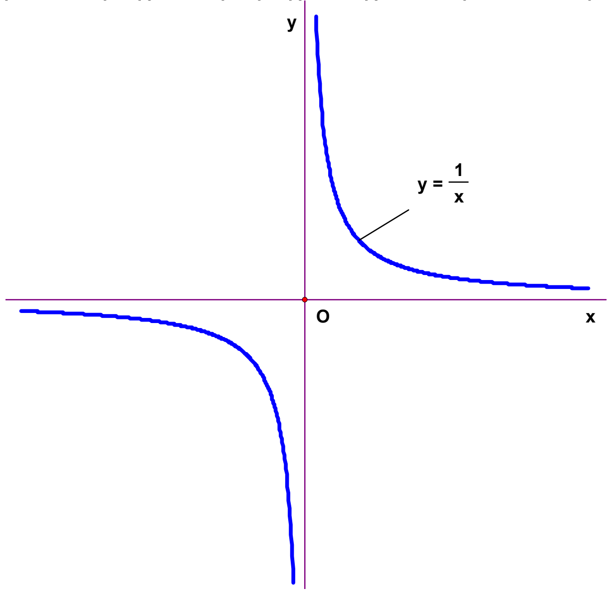
Ας δούμε τώρα τη γενική περίπτωση. Γράφουμε το τριώνυμο $y = ax^2 + bx + c$ στη μορφή $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow y + \frac{\Delta}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ (βλ. παράγρ. 1.7). Θέτουμε $X = x + \frac{b}{2a}$ και $Y = y + \frac{\Delta}{4a}$. Το νέο σύστημα αξόνων $XO'Y$ προκύπτει από το xOy αν μετατοπίσουμε τους άξονες ώστε η αρχή του νέου συστήματος να είναι το σημείο $O' = \left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Στο νέο σύστημα αξόνων η εξίσωση της καμπύλης είναι $Y = aX^2$, δηλαδή μια παραβολή.



3. Η συνάρτηση $y = \frac{1}{x}$.

Εδώ το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ καθώς, το x δεν μπορεί να είναι μηδέν. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής είναι η ακόλουθη:



Αποτελείται από δύο κλάδους οι οποίοι βρίσκονται στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο. Η καμπύλη αυτή ανήκει σε μια κατηγορία καμπυλών με το όνομα **υπερβολές**.

Πριν προχωρήσουμε σε νέα παραδείγματα ας συμπληρώσουμε την ορολογία και το συμβολισμό που θα χρησιμοποιούμε.

Συνήθως, για να ξεχωρίζουμε τις συναρτήσεις, συμβολίζουμε την κάθε μια με ένα σύμβολο, συνήθως *f*, *g*, *h* κτλ.

Αν η συνάρτηση *f* έχει πεδίο ορισμού το υποσύνολο *A* του συνόλου των πραγματικών, τότε γράφουμε

$$f : A \to \mathbb{R},$$

δείχνοντας μ' αυτόν τον τρόπο ότι κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής *x* (που την παίρνουμε από το σύνολο *A*) μας δίνει ή αλλιώς **απεικονίζεται** σε μια μοναδική τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής *y* (που είναι πραγματικός αριθμός). Για να δηλώσουμε αυτήν την εξάρτηση γράφουμε

$$y = f(x).$$

Αν, για παράδειγμα, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$, τότε $f(-2) = (-2)^2 = 4$, $f(-1) = 1$, $f(5) = 25$ κτλ. Ο μαθηματικός τύπος $f(x) = x^2$ που μας δίνει τη διαδικασία μέσω της οποίας το *x* (ανεξάρτητη μεταβλητή) απεικονίζεται στο *y* (εξαρτημένη μεταβλητή), λέγεται **τύπος της συνάρτησης**.

Έτσι, αν ονομάσουμε *g* τη συνάρτηση του παραδείγματος 4.1.3.3, έχουμε $g : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ και $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

Αν δεν δίνεται το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης *f* αλλά μόνον ο τύπος της, τότε σαν πεδίο ορισμού θεωρούμε το σύνολο όλων των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία έχει νόημα η παράσταση $f(x)$. Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης *f* θα συμβολίζεται με D_f. Ας δούμε το ακόλουθο παράδειγμα:

4.1.4 Παραδείγματα

1. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:
(i) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 3}$ και **(ii)** $g(x) = \sqrt{-x + 3 + 2\sqrt{x}}$.

Λύση: (i) Για να ορίζεται το $f(x)$ θα πρέπει ο παρονομαστής του κλάσματος $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 3}$ να μην είναι μηδέν. Λύνουμε την εξίσωση $x^2 + 2x - 3 = 0$. Αυτή έχει ρίζες τους αριθμούς -3 και 1. Επομένως, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\} = (-\infty, -3) \cup (-3, 1) \cup (1, +\infty)$.

Παρατηρούμε ότι αν $x \neq -3, 1$, τότε $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x-2}{x+3}$. Είναι όμως λάθος να πούμε ότι η συνάρτηση *f* έχει το ίδιο πεδίο ορισμού με αυτό της συνάρτησης $h(x) = \frac{x-2}{x+3}$. Γιατί η συνάρτηση *h* ορίζεται στο σημείο 1, ενώ η *f* δεν ορίζεται σ' αυτό.

(ii) Για να ορίζεται το $g(x)$ θα πρέπει οι υπόρριζες ποσότητες *x* και $-x + 3 + 2\sqrt{x}$ να μην είναι αρνητικές. Επομένως $x \geq 0$ και $-x + 3 + 2\sqrt{x} \geq 0$.

Αν θέσουμε στην παράσταση $-x + 3 + 2\sqrt{x}$, όπου $\sqrt{x}$ το *t*, θα πάρουμε $-t^2 + 3 + 2t \geq 0$. Βρίσκουμε τις ρίζες του τριωνύμου $-t^2 + 3 + 2t$. Αυτές είναι οι αριθμοί -1 και 3. Επομένως, $-1 \leq t \leq 3$. Επειδή $t = \sqrt{x} \geq 0$ θα έχουμε: $0 \leq \sqrt{x} \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 9$. Συνεπώς, $D_g = [0, 9]$.

2. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = \frac{\sqrt{-x^2 + 6x - 8}}{x - 2}$.

Λύση: Θα πρέπει $-x^2 + 6x - 8 \geq 0$ και $x \neq 2$. Το τριώνυμο $-x^2 + 6x - 8$ έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και 4. Άρα πρέπει $2 \leq x \leq 4$. Επειδή $x \neq 2$, το πεδίο ορισμού είναι το $(2, 4]$.

Μια άλλη χρήσιμη έννοια είναι αυτή του **συνόλου τιμών** μιας συνάρτησης.

4.1.5 Ορισμός

*Σαν **σύνολο τιμών** μιας συνάρτησης* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *ορίζουμε το σύνολο*

$$f(D_f) = \{ y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in D_f \}.$$

Δηλαδή, το σύνολο τιμών αποτελείται από όλες τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει η εξαρτημένη μεταβλητή y.

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι το σύνολο τιμών δεν είναι (εν γένει) όλο το $\mathbb{R}$. Έτσι, το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ είναι το διάστημα $[0, +\infty)$. Πράγματι, $f(x) = x^2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αντίστροφα, κάθε $y \in [0, +\infty)$ είναι τιμή της συνάρτησης, αφού $f(\sqrt{y}) = y$.

4.1.6 Παραδείγματα

1. Να βρεθούν τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων του παραδείγματος 4.1.4.1.

Λύση: **(i)** Είδαμε ότι $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$ με $x \neq -3, 1$. Έστω $y = \frac{x-2}{x+3}$. Τότε $x(y-1) = -3y - 2$.

Αν $y = 1$, τότε παίρνουμε $0 = -5$, άτοπο.

Έστω $y \neq 1$. Τότε $x = \dfrac{3y+2}{1-y}$. Αφού οι αριθμοί -3 και 1 δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της *f*, πρέπει $\dfrac{3y+2}{1-y} \neq -3, 1$.

Έχουμε $\dfrac{3y+2}{1-y} = 1 \Leftrightarrow 4y = -1 \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{4}$. Άρα το $-\dfrac{1}{4}$ δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της *f*.

Αν $\dfrac{3y+2}{1-y} = -3$, τότε παίρνουμε $2 = -3$, άτοπο. Επομένως το κλάσμα $\dfrac{3y+2}{1-y}$ δεν παίρνει ποτέ την τιμή -3 που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της *f*.

Τώρα, για κάθε $y \neq -\dfrac{1}{4}$ έχουμε $f\left(\dfrac{3y+2}{1-y}\right) = \dfrac{\dfrac{3y+2}{1-y} - 2}{\dfrac{3y+2}{1-y} + 3} = y$.

Άρα το σύνολο τιμών της *f* είναι το $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{4}\} = \left(-\infty, -\dfrac{1}{4}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$.

(ii) Θέτουμε $y = g(x) = \sqrt{-x+3+2\sqrt{x}}$. Παρατηρούμε ότι $y \geq 0$.

Ακόμη, $y^2 = -x+3+2\sqrt{x} \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 3 + y^2 = 0$ και, θέτοντας $t = \sqrt{x} \geq 0$ παίρνουμε την εξίσωση (ως προς *t*) $t^2 - 2t - 3 + y^2 = 0$.

Η εξίσωση αυτή θα πρέπει να έχει ρίζα που να ανήκει στο διάστημα $[0, 3]$ (γιατί το πεδίο ορισμού της *g* είναι το διάστημα $[0, 9]$).

Η διακρίνουσά της είναι $\Delta = 16 - 4y^2$. Επομένως, $16 - 4y^2 \geq 0 \underset{y \geq 0}{\Leftrightarrow} 0 \leq y \leq 2$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι αριθμοί $\dfrac{2 \pm 2\sqrt{4-y^2}}{2} = 1 \pm \sqrt{4-y^2}$.

Παρατηρούμε ότι $0 \leq 1 + \sqrt{4-y^2} \leq 3$, για κάθε $y \in [0, 2]$. Πράγματι, $0 \leq 1 + \sqrt{4-y^2} \leq 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sqrt{4-y^2} \leq 2 \Leftrightarrow 4 - y^2 \leq 4 \Leftrightarrow y^2 \geq 0$, που ισχύει.

Άρα το σύνολο τιμών της *g* είναι το διάστημα $[0, 2]$.

2. Να βρεθούν τα σύνολα τιμών των επόμενων συναρτήσεων:
(i) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$ και **(ii)** $g(x) = 3 - \sqrt{1-x^2}$.

Λύση: **(i)** Η συνάρτηση *f* έχει πεδίο ορισμού όλο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών (ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται).

Θέτουμε $y = \dfrac{3x}{x^2+1}$ και λύνουμε ως προς *x*: $y = \dfrac{3x}{x^2+1} \Leftrightarrow yx^2 - 3x + y = 0$. Αν $y = 0$, τότε και $x = 0$. Πράγματι, $f(0) = 0$. Έστω ότι $y \neq 0$. Τότε η δευτεροβάθμια εξίσωση $yx^2 - 3x + y = 0$ πρέπει να έχει μη αρνητική διακρίνουσα. Επομένως,

$9-4y^2\ge 0 \Leftrightarrow |y|\le \frac{3}{2} \Leftrightarrow y\in\left[-\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right]$. Το τελευταίο διάστημα περιέχει το μηδέν που βρήκαμε προηγουμένως. Άρα $D_g=\left[-\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right]$

(ii) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης *g* είναι το διάστημα [-1, 1] στο οποίο η υπόρριζη ποσότητα γίνεται μη αρνητική. Θέτουμε τώρα $y=3-\sqrt{1-x^2}$. Έχουμε: $y=3-\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=3-y$. Επειδή $\sqrt{1-x^2}\ge 0$, θα πρέπει $y\le 3$. Επομένως, $\sqrt{1-x^2}=3-y \underset{3-y\ge 0}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow 1-x^2=(3-y)^2 \Leftrightarrow -y^2+6y-8=x^2\in[0,\ 1]$. Επομένως, $0\le -y^2+6y-8\le 1$.

Λύνουμε την ανίσωση $0\le -y^2+6y-8$. Το τριώνυμο $-y^2+6y-8$ έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και 4. Επομένως πρέπει $2\le y\le 4$.

Λύνουμε μετά την ανίσωση $-y^2+6y-8\le 1 \Leftrightarrow y^2-6y+9\ge 0$. Το τριώνυμο y^2-6y+9 είναι πάντα μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός, γιατί $y^2-6y+9=(y-3)^2$. Επομένως $D_g=[2,\ 4]$.

Γενικά, αν το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f:A\to\mathbb{R}$, όπου $A=D_f$, περιέχεται σε ένα υποσύνολο *B* των πραγματικών, τότε μπορούμε να γράψουμε $f:A\to B$.

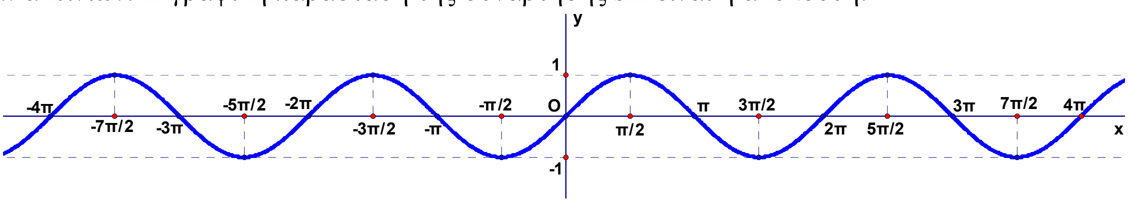
Μια συνάρτηση $f:A\to B$ λέγεται ***επί του B*** *αν $B=f(A)$.*

4.1.7 Και άλλα παραδείγματα συναρτήσεων

1. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

(i) Η συνάρτηση του ημιτόνου:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\sin:\mathbb{R}\to[-1,1]$ που σε κάθε τιμή του *x* αντιστοιχεί το ημίτονο των *x* ακτινίων. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης sin είναι η ακόλουθη:



Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση επαναλαμβάνεται κατά 2π, δηλαδή ισχύει:

$$\sin(x+2\pi)=\sin x=\sin(x-2\pi),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Μια τέτοια συνάρτηση λέγεται **περιοδική**. Έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

4.1.8 Ορισμός

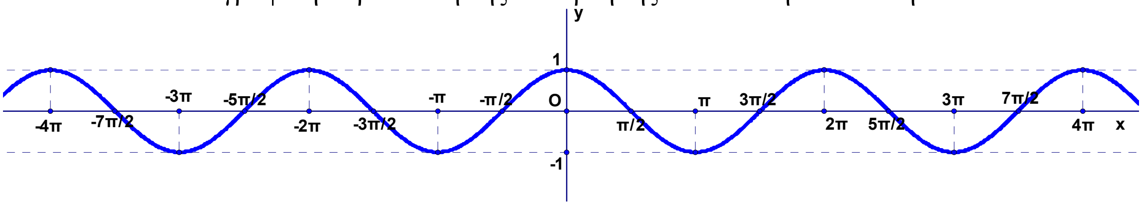
Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ *μια συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει θετικός αριθμός T με τις εξής ιδιότητες:* ***(i)*** *Αν* $x \in A$*, τότε* $x+T \in A$ *και* $x-T \in A$ *και* ***(ii)*** $f(x+T) = f(x) = f(x-T)$.

Τότε η f λέγεται ***περιοδική*** *και ο αριθμός T λέγεται* ***περίοδος*** *της συνάρτησης f.*

Είναι προφανές πως η περίοδος δεν είναι μοναδική. Αν *T* είναι μια περίοδος της συνάρτησης *f*, τότε και οι αριθμοί 2*T*, 3*T* κτλ είναι επίσης περίοδοι της *f*.

(ii) Η συνάρτηση του συνημιτόνου:

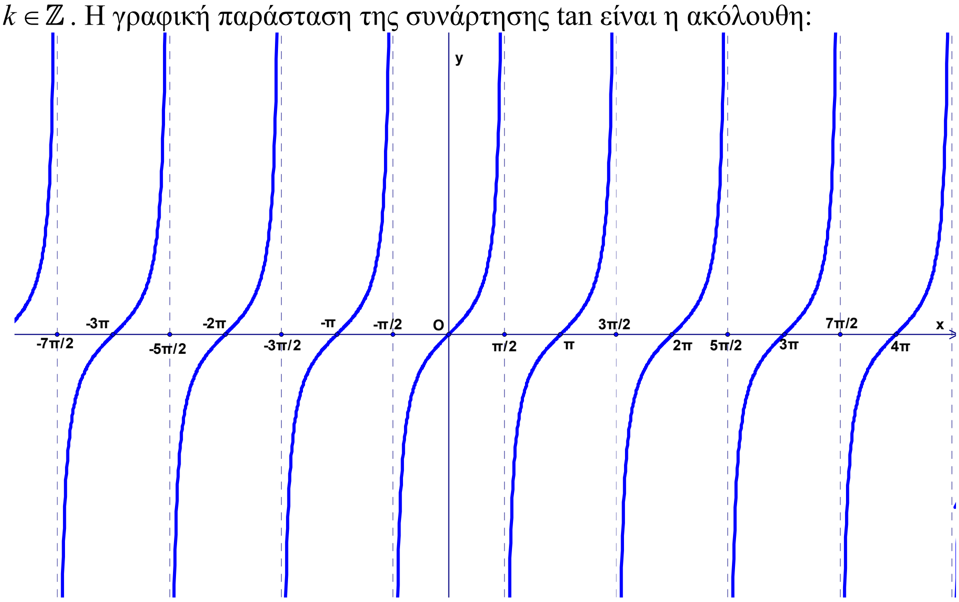
Θεωρούμε τη συνάρτηση $\cos: \mathbb{R} \to [-1, 1]$ που σε κάθε τιμή του *x* αντιστοιχεί το συνημίτονο των *x* ακτινίων. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης cos είναι η ακόλουθη:



Είναι και αυτή περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π.

(iii) Η συνάρτηση της εφαπτομένης:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\tan: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ που σε κάθε τιμή του *x* αντιστοιχεί την εφαπτομένη των *x* ακτινίων. Η συνάρτηση αυτή δεν ορίζεται στα σημεία της μορφής $k\pi$, όπου $k \in \mathbb{Z}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης tan είναι η ακόλουθη:



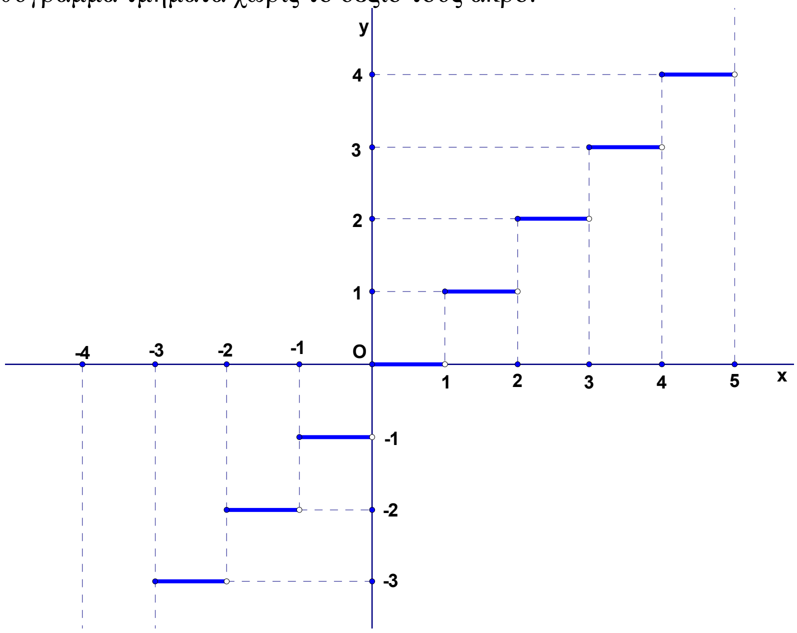
Είναι και αυτή περιοδική συνάρτηση αλλά με περίοδο π.

Παρόμοια συμπεριφορά έχει και η συνάρτηση της **συνεφαπτομένης cot**.

2. Η συνάρτηση του ακέραιου μέρους

Στην παράγραφο 1.4 (ορισμός 1.4.15) είδαμε ότι το ακέραιο μέρος ενός πραγματικού αριθμού x είναι ο μοναδικός ακέραιος, που συμβολίζεται με $[x]$, με την ιδιότητα: $[x] \le x \le [x]+1$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=[x]$ έχει κλιμακωτή μορφή και αποτελείται από μοναδιαία ευθύγραμμα τμήματα χωρίς το δεξιό τους άκρο.

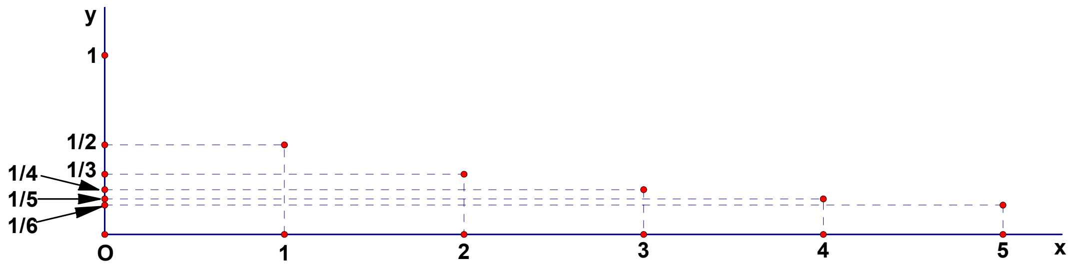


Πράγματι, για κάθε $x \in [k, k+1)$ έχουμε $[x]=k$, δηλαδή η συνάρτηση του ακεραίου μέρους είναι σταθερή στο διάστημα $[k, k+1)$.

3. Οι ακολουθίες ως συναρτήσεις

Κάθε ακολουθία (a_n) είναι στην ουσία μία συνάρτηση $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών. Εδώ η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο δείκτης n και η εξαρτημένη ο n-στός όρος a_n.

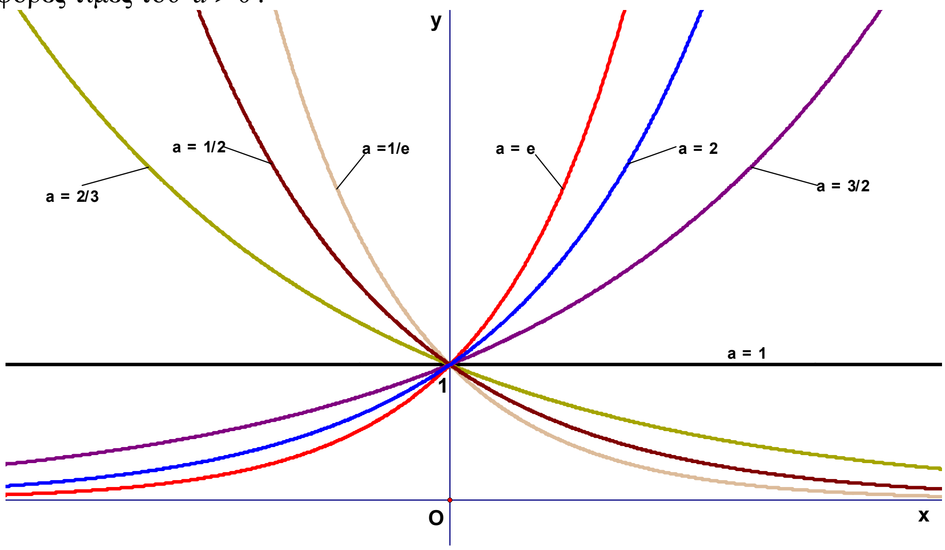
Η γραφική παράσταση μιας ακολουθίας αποτελείται από τα σημεία (n, a_n), $n \in \mathbb{N}$. Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της ακολουθίας $a_n = \dfrac{1}{n+1}$, $n = 0,1,2,\ldots$



4. Οι εκθετικές συναρτήσεις

Στην παράγραφο 2.12 ορίσαμε την έννοια της δύναμης με εκθέτη πραγματικό αριθμό. Συγκεκριμένα, αν $a > 0$ και $x \in \mathbb{R}$, ορίσαμε την δύναμη a^x. Η συνάρτηση $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\exp_a(x) = a^x$ λέγεται **εκθετική συνάρτηση** με βάση το *a*. Ξέρουμε ότι $a^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, είναι προτιμότερο να γράφουμε $\exp_a : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$. Όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 5, αν $a \neq 1$ τότε η $\exp_a : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ είναι **επί** του $(0, +\infty)$.

Στο παρακάτω σχήμα παριστάνονται οι γραφικές παραστάσεις εκθετικών συναρτήσεων για τις διάφορες τιμές του $a > 0$.



Η εκθετική συνάρτηση με βάση το *e* έχει ιδιαίτερη σημασία και συμβολίζεται απλά με exp.

Σ' όλα τα παραπάνω παραδείγματα οι συναρτήσεις δίνονταν μέσω κάποιου ενιαίου μαθηματικού τύπου.

Κάτι τέτοιο είναι πολύ δεσμευτικό και δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Έτσι, η συνάρτηση του επόμενου παραδείγματος δεν περιγράφεται με έναν ενιαίο τύπο.

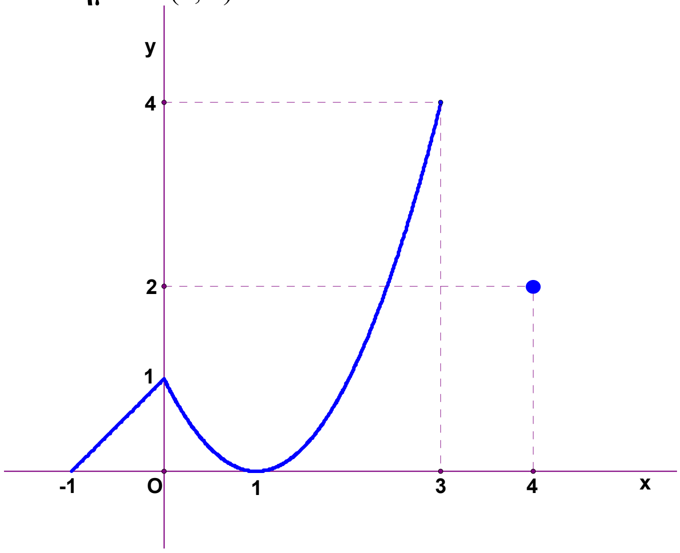
4.1.9 Παράδειγμα

Ορίζουμε τη συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού το σύνολο $[-1, 3] \cup \{4\}$ ως εξής:

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{αν } -1\le x<0 \\ x^2-2x+1, & \text{αν } 0\le x\le 3 \\ 2, & \text{αν } x=4 \end{cases}$$

Δηλαδή, στον ορισμό της f έχουμε διακρίνει περιπτώσεις ανάλογα με την τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής x.

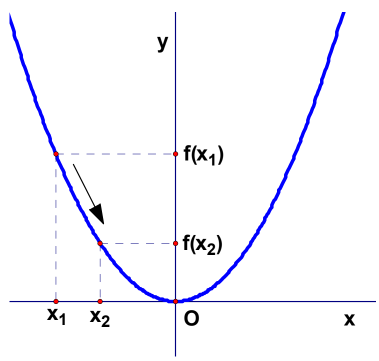
Η γραφική παράσταση της f είναι ένωση τριών κομματιών, του ευθυγράμμου τμήματος που αντιστοιχεί στη γραμμική συνάρτηση $y=x+1$, του τόξου της παραβολής $y=x^2-2x+1$, **και του μεμονωμένου σημείου** (4, 2).



Αν και αυτές οι περιπτώσεις αρκούν για να καλύψουν τα θέματα που θα διαπραγματευτούμε στη συνέχεια, θα ήταν εν τούτοις παράλειψη να μην αναφέρουμε το γεγονός ότι υπάρχουν συναρτήσεις που δεν μπορούν, έστω και με διάκριση περιπτώσεων, να περιγραφούν μέσω συγκεκριμένων μαθηματικών τύπων. Στα μαθηματικά, πολλές φορές, αποδεικνύουμε την ύπαρξη συναρτήσεων με συγκεκριμένες ιδιότητες, αλλά που, είτε δεν μπορούμε είτε δεν μας ενδιαφέρει να βρούμε κάποιους συγκεκριμένους μαθηματικούς τύπους που να τις περιγράφουν.

4.2 Μονοτονία, ακρότατα και φράγματα συναρτήσεων

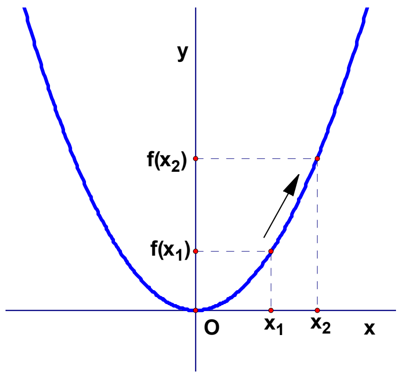
Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ με $f(x)=x^2$. Όπως έχουμε παρατηρήσει, η γραφική της παράσταση «κατέρχεται» στο διάστημα $(-\infty,0]$ και «ανέρχεται» στο διάστημα $[0,+\infty)$.



Πράγματι, αν $x_1 < x_2 \le 0$, τότε $-x_1 > -x_2 \ge 0$, δηλαδή, $|x_1| > |x_2|$ και, με βάση την πρόταση 1.4.12, παίρνουμε $x_1^2 = |x_1|^2 > |x_2|^2 = x_2^2$.

Λέμε ότι η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $(-\infty, 0]$.

Στο διάστημα $[0, +\infty)$ η κατάσταση αντιστρέφεται. Έτσι, αν $0 \le x_1 < x_2$, τότε $x_1^2 < x_2^2$. Λέμε ότι η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $[0, +\infty)$.



Έχουμε τον επόμενο ορισμό:

4.2.1 Ορισμός

*Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και B ένα υποσύνολο που περιέχεται στο πεδίο ορισμού της A. Θα λέμε ότι η f είναι **γνησίως φθίνουσα στο B** αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$. Αν $B = A$, τότε η f λέγεται **γνησίως φθίνουσα**.*

*Θα λέμε ότι η f είναι **γνησίως αύξουσα στο B** αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$. Αν $B = A$, τότε η f λέγεται **γνησίως αύξουσα**.*

*Αν η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα, τότε λέγεται **γνησίως μονότονη**.*

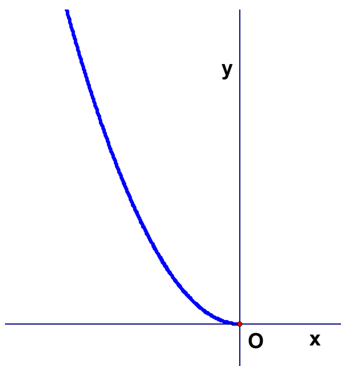
4.2.2 Σχόλιο

Αν οι σχέσεις $f(x_1) > f(x_2)$ και $f(x_1) < f(x_2)$ αντικατασταθούν στον προηγούμενο ορισμό από τις σχέσεις $f(x_1) \ge f(x_2)$ και $f(x_1) \le f(x_2)$ αντίστοιχα, παίρνουμε την έννοια της **αύξουσας** και της **φθίνουσας** συνάρτησης, αντίστοιχα.

Η επόμενη έννοια είναι πολύ βολική στη διατύπωση των αποτελεσμάτων μας.

4.2.3 Ορισμός

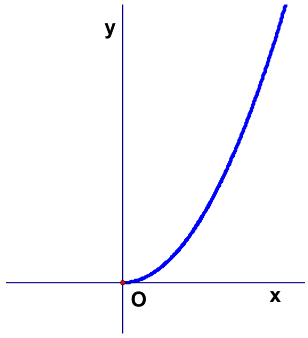
Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και B ένα υποσύνολο που περιέχεται στο πεδίο ορισμού της A. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : B \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \in B$.



*Τότε η g λέγεται **περιορισμός** της f στο B και συμβολίζεται με* $f|_B$.

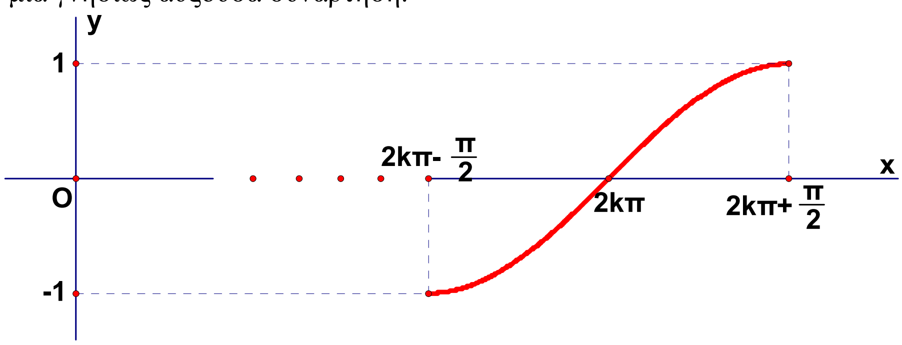
Έτσι, ο περιορισμός της συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ με $f(x)=x^2$ στο διάστημα $(-\infty,0]$ είναι μια συνάρτηση, ας την πούμε *g*, με γραφική παράσταση το αριστερό τόξο της παραβολής $y=x^2$. Η συνάρτηση *g* είναι γνησίως φθίνουσα.

Ο περιορισμός της *f* στο διάστημα $[0,+\infty)$ είναι μια συνάρτηση, ας την πούμε *h*, με γραφική παράσταση το δεξιό τόξο της παραβολής $y=x^2$. Η συνάρτηση *h* είναι γνησίως αύξουσα.

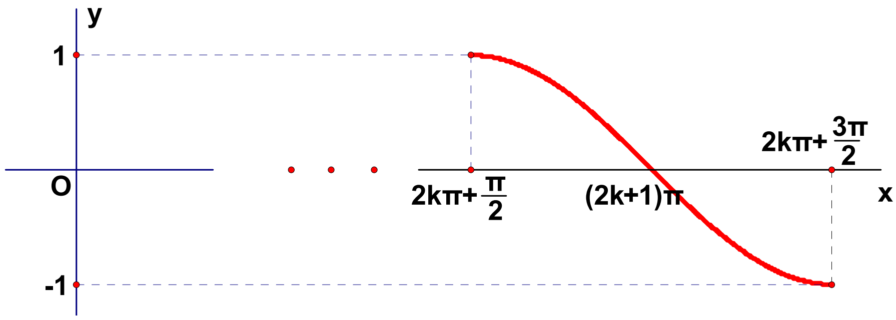


4.2.3 Παραδείγματα

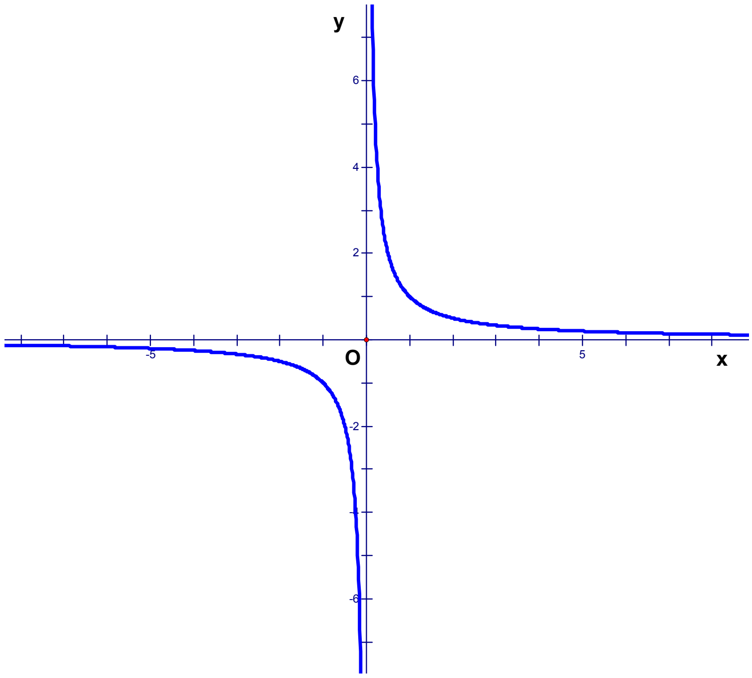
1. Η συνάρτηση του ημιτόνου (παράδειγμα 4.1.7.1) δεν είναι γνησίως μονότονη αλλά ταλαντεύεται κατά τρόπο περιοδικό με ταξύ των τιμών -1 και 1. Αν όμως θεωρήσουμε τον περιορισμό της σε ένα διάστημα της μορφής $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$, όπου *k* ακέραιος, θα πάρουμε μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση.



Στα διαστήματα όμως της μορφής $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$, όπου *k* ακέραιος, είναι γνησίως φθίνουσα.



2. Η συνάρτηση $g:(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ του παραδείγματος 4.1.3.3, με $g(x)=\dfrac{1}{x}$ αποτελείται από δύο κλάδους. Ο περιορισμός σε κάθε ένα από τα υποδιαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.



Είναι όμως λάθος να πούμε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα, γιατί τότε θα έπρεπε να είναι π.χ. $g(-1)>g(1)$, δηλαδή $-1>1$, άτοπο.

3. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=[x]$ είναι αύξουσα. Δεν είναι όμως γνησίως αύξουσα, γιατί $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ και $\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{2}$.

4. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x\,|\,x\,|$ είναι γνησίως αύξουσα.

Πράγματι, έστω $x_1<x_2$. Διακρίνουμε περιπτώσεις: (i) $x_1<x_2\le 0$. Τότε $-x_1>-x_2\ge 0$ και υψώνοντας στο τετράγωνο, $x_1^2=(-x_1)^2>(-x_2)^2=x_2^2$. Επομένως, $-x_1^2<-x_2^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_1(-x_1)<x_2(-x_2)\Leftrightarrow x_1\,|\,x_1\,|<x_2\,|\,x_2\,|$.

(ii) $0\le x_1<x_2$. Τότε $x_1^2<x_2^2\Leftrightarrow x_1\,|\,x_1\,|<x_2\,|\,x_2\,|$.

(iii) $x_1<0<x_2$. Τότε $x_1\,|\,x_1\,|<0<x_2\,|\,x_2\,|$.

Οι μέγιστη και η ελάχιστη τιμή (αν υπάρχουν) που μπορεί να πάρει μια συνάρτηση παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Έχουμε τον επόμενο ορισμό:

4.2.4 Ορισμός

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ *μια συνάρτηση, όπου* $A \subseteq \mathbb{R}$ *και* $x_0 \in A$.

(i) *Αν* $f(x_0) \geq f(x)$, *για κάθε* $x \in A$, *τότε η* ***μέγιστη τιμή*** $f(x_0)$ *της συνάρτησης ονομάζεται* ***ολικό μέγιστο*** *αυτής. Το σημείο* x_0 *ονομάζεται θέση* ***ολικού μεγίστου****.*

(ii) *Αν* $f(x_0) \leq f(x)$, *για κάθε* $x \in A$, *τότε η* ***ελάχιστη τιμή*** $f(x_0)$ *της συνάρτησης ονομάζεται* ***ολικό ελάχιστο*** *αυτής. Το σημείο* x_0 *ονομάζεται θέση* ***ολικού ελαχίστου****.*

Οι έννοιες του ολικού μεγίστου και του ολικού ελαχίστου χαρακτηρίζονται με τον γενικότερο όρο ***ολικό ακρότατο****.*

4.2.5 Ορισμός

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ *μια συνάρτηση, όπου* A *διάστημα και* $x_0 \in A$.

(i) *Αν* $f(x_0) \geq f(x)$, *για κάθε* $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, *όπου* $\delta > 0$, *τότε η* ***τιμή*** $f(x_0)$ *της συνάρτησης ονομάζεται* ***τοπικό μέγιστο*** *αυτής. Το σημείο* x_0 *ονομάζεται θέση* ***τοπικού μεγίστου****.*

(ii) *Αν* $f(x_0) \leq f(x)$, *για κάθε* $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, *τότε η* ***τιμή*** $f(x_0)$ *της συνάρτησης ονομάζεται* ***τοπικό ελάχιστο*** *αυτής. Το σημείο* x_0 *ονομάζεται θέση* ***τοπικού ελαχίστου****.*

Οι έννοιες του τοπικού μεγίστου και του τοπικού ελαχίστου χαρακτηρίζονται με τον γενικότερο όρο ***τοπικό ακρότατο****.*

4.2.6 Παραδείγματα

1. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι συναρτήσεις:
(i) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, **(ii)** $g(x) = \dfrac{5x+2}{x-4}$ και **(iii)** $h(x) = x + \dfrac{4}{x^2}$.

Λύση: (i) Έχουμε $f(x) = x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 - 1 = (x-2)^2 - 1$. Παρατηρούμε ότι αν $x_1 < x_2 \leq 2$, τότε $x_1 - 2 < x_2 - 2 \leq 0 \Rightarrow (x_1 - 2)^2 > (x_2 - 2)^2 \Rightarrow (x_1 - 2)^2 - 1 > (x_2 - 2)^2 - 1$, δηλαδή $f(x_1) > f(x_2)$. Η συνάρτηση λοιπόν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$.

Ακόμη, αν $2 \leq x_1 < x_2$, τότε $0 \leq x_1 - 2 < x_2 - 2 \Rightarrow (x_1 - 2)^2 < (x_2 - 2)^2 \Rightarrow (x_1 - 2)^2 - 1 <$ $< (x_2 - 2)^2 - 1$, δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$. Η συνάρτηση λοιπόν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$. Το 2 είναι λοιπόν θέση ολικού ελαχίστου που είναι το $f(2) = -1$.

(ii) Έχουμε $g(x)=\dfrac{5x+2}{x-4}=\dfrac{5x-20+22}{x-4}=5+\dfrac{22}{x-4}$. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το σύνολο $\mathbb{R}\setminus\{4\}$.

Έστω $x_1<x_2<4$. Τότε $x_1-4<x_2-4<0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_1-4}>\dfrac{1}{x_2-4} \Leftrightarrow 5+\dfrac{22}{x_1-4}>5+\dfrac{22}{x_2-4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,\ 4)$.

Έστω $4<x_1<x_2$. Τότε $0<x_1-4<x_2-4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_1-4}>\dfrac{1}{x_2-4} \Leftrightarrow 5+\dfrac{22}{x_1-4}>5+\dfrac{22}{x_2-4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(4,\ +\infty)$.

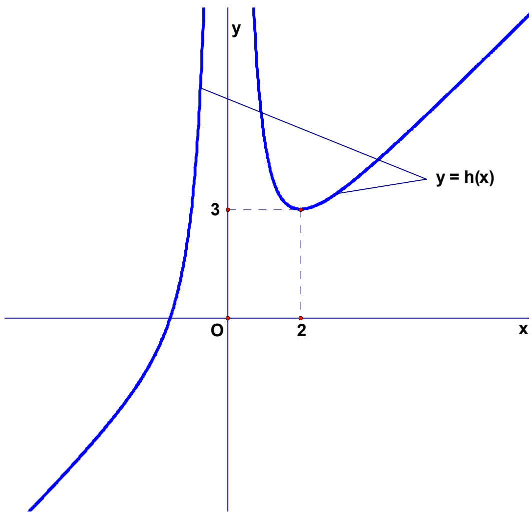
(iii) Η συνάρτηση h έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Έστω $x_1<x_2<0$. Έχουμε $x_1{}^2>x_2{}^2 \Leftrightarrow \dfrac{4}{x_1{}^2}<\dfrac{4}{x_2{}^2}$. Αν προσθέσουμε κατά μέλη την $x_1<x_2$ με την τελευταία, παίρνουμε $x_1+\dfrac{4}{x_1{}^2}<x_2+\dfrac{4}{x_2{}^2} \Leftrightarrow h(x_1)<h(x_2)$, δηλαδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,\ 0)$.

Έστω $0<x_1<x_2$. Τότε $h(x_1)-h(x_2)=x_1+\dfrac{4}{x_1{}^2}-x_2-\dfrac{4}{x_2{}^2}=(x_1-x_2)\left(1-\dfrac{4(x_1+x_2)}{x_1{}^2x_2{}^2}\right)$.

Αν $x_1<x_2\le 2$, τότε $\dfrac{x_1}{2}<\dfrac{x_2}{2}\le 1$. Αλλά, $x_1+x_2\ge 2\sqrt{x_1x_2} \Rightarrow \dfrac{x_1+x_2}{4}\ge\dfrac{\sqrt{x_1x_2}}{2}=\sqrt{\dfrac{x_1x_2}{4}}=$ $=\sqrt{\dfrac{x_1}{2}\cdot\dfrac{x_2}{2}}$. Αλλά $\dfrac{x_1}{2}<\dfrac{x_2}{2}\le 1$ και επομένως $\sqrt{\dfrac{x_1}{2}}\sqrt{\dfrac{x_2}{2}}>\dfrac{x_1}{2}\dfrac{x_2}{2}>\left(\dfrac{x_1}{2}\right)^2\left(\dfrac{x_2}{2}\right)^2=\dfrac{x_1^2x_2^2}{16}$. (Αν $0<\theta<1$, τότε $\sqrt{\theta}>\theta>\theta^2$). Άρα $\dfrac{x_1+x_2}{4}>\dfrac{x_1^2x_2^2}{16}\Rightarrow 1-\dfrac{4(x_1+x_2)}{x_1^2x_2^2}<0$. Επειδή $x_1-x_2<0$, έπεται ότι $h(x_1)-h(x_2)>0$, ήτοι $h(x_1)>h(x_2)$. Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,2]$.

Έστω τώρα ότι $2\le x_1<x_2$. Τότε $(x_1-1)x_2\ge(2-1)x_2=x_2$, ήτοι $x_1x_2-x_2\ge x_2 \Leftrightarrow x_1x_2\ge 2x_2>$ $>x_1+x_2$. Επομένως $4x_1x_2>4(x_1+x_2)$. Αλλά $x_1^2x_1^2=x_1x_2x_1x_2>2\cdot 2x_1x_2>4x_1x_2$. Επομένως $x_1^2x_1^2>4(x_1+x_2)\Leftrightarrow 1-\dfrac{4(x_1+x_2)}{x_1^2x_1^2}>0$. Εφόσον $x_1-x_2<0$, παίρνουμε $h(x_1)-h(x_2)=$ $=(x_1-x_2)\left(1-\dfrac{4(x_1+x_2)}{x_1{}^2x_2{}^2}\right)<0$.

Άρα $h(x_1)<h(x_2)$, δηλαδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2,\ +\infty)$. Το 2 είναι λοιπόν θέση τοπικού ελαχίστου.



2. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^3-3x^2+1$.

Υπόδειξη: Εξετάστε τη συμπεριφορά της στα διαστήματα $(-\infty,0]$, $[0,2]$ και $[2,+\infty)$.

Λύση: Έστω $x_1<x_2\le 0$. Τότε $f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-3x_1^2-x_2^3+3x_2^2=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)-$ $-3(x_1-x_2)(x_1+x_2)=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2-3(x_1+x_2))=(x_1-x_2)\left(\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2+\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2-\right.$ $\left.-3(x_1+x_2)\right)$. Επειδή $x_1<x_2\le 0$, η ποσότητα $-3(x_1+x_2)$ είναι θετική. Επομένως, $\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2+\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2-3(x_1+x_2)\big)>0$. Εφόσον $x_1-x_2<0$, έπεται $f(x_1)<f(x_2)$, δηλαδή η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$.

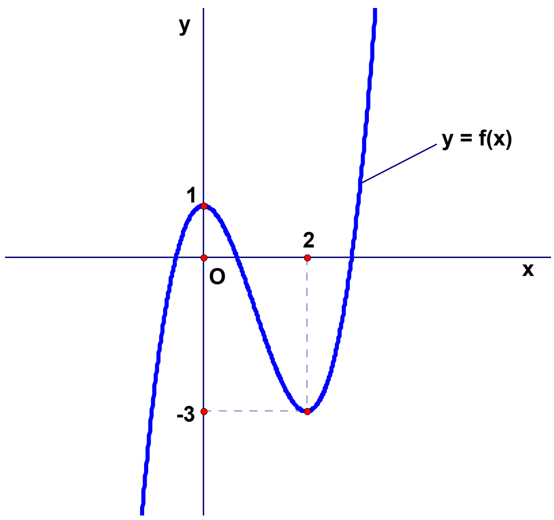
Έστω $0\le x_1<x_2\le 2$. Τότε $f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2-3(x_1+x_2))=$ $=(x_1-x_2)(x_1(x_1+x_2-4)+x_2(x_2-2)+x_1-x_2)$. Επειδή $x_1<x_2\le 2$, έπεται ότι $x_1+x_2-4<0$ και συνεπώς $x_1(x_1+x_2-4)\le 0$ (επειδή $0\le x_1$). Ακόμη, $x_2-2<0$ και άρα $x_2(x_2-2)<0$. Τέλος, $x_1-x_2<0$. Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι $x_1(x_1+x_2-4)+x_2(x_2-2)+$ $+x_1-x_2<0$ και επειδή $x_1-x_2<0$, προκύπτει ότι $f(x_1)>f(x_2)$, ήτοι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,2]$.

Τέλος, εξετάζουμε την περίπτωση $2\le x_1<x_2$. Έχουμε $f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+$ $+x_2^2-3(x_1+x_2))=(x_1-x_2)(x_1(x_1+x_2)+x_2^2-3(x_1+x_2))$.

Παρατηρούμε ότι $x_1(x_1+x_2)+x_2^2-3(x_1+x_2)\ge 2(x_1+x_2)+x_2^2-3(x_1+x_2)=x_2^2-(x_1+x_2)>$ $>x_2^2-(x_2+x_2)=x_2^2-2x_2=x_2(x_2-2)>0$, γιατί $x_2>2$. Επομένως $f(x_1)<f(x_2)$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2,+\infty)$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το 0 είναι θέση τοπικού μεγίστου και το 2 θέση τοπικού ελαχίστου.

Η γραφική παράσταση της f είναι η ακόλουθη:



Όπως στις ακολουθίες, έτσι και στις συναρτήσεις ορίζουμε την έννοια του **φράγματος**.

4.2.7 Ορισμός

(i) *Μια συνάρτηση* $f : A \to \mathbb{R}$ *λέγεται* ***άνω φραγμένη*** *αν υπάρχει αριθμός s με την ιδιότητα* $f(x) \le s$*, για κάθε* $x \in A$*. Ο αριθμός s λέγεται* ***άνω φράγμα*** *της f.*

(ii) *Μια συνάρτηση* $f : A \to \mathbb{R}$ *λέγεται* ***κάτω φραγμένη*** *αν υπάρχει αριθμός m με την ιδιότητα* $m \le f(x)$*, για κάθε* $x \in A$*. Ο αριθμός m λέγεται* ***κάτω φράγμα*** *της f.*

(iii) *Μια συνάρτηση* $f : A \to \mathbb{R}$ *λέγεται* ***φραγμένη*** *αν είναι άνω και κάτω φραγμένη.*

Όπως στις ακολουθίες, έτσι και στις συναρτήσεις αποδεικνύεται εύκολα ότι μια συνάρτηση είναι φραγμένη αν υπάρχει ένας θετικός αριθμός *r* με την ιδιότητα $|f(x)| \le r$, για κάθε $x \in A$.

4.2.8 Παραδείγματα

1. Οι συναρτήσεις των παραδειγμάτων 4.1.6, πλην της πρώτης, είναι φραγμένες γιατί τα σύνολα τιμών τους είναι φραγμένα.

2. Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \dfrac{x \sin x}{x^2+1}$ είναι φραγμένη.

Λύση: Παρατηρούμε ότι $|f(x)| = \dfrac{|x||\sin x|}{x^2+1} \le \dfrac{|x|}{x^2+1}$. Αν τώρα $|x| \le 1$, τότε $|f(x)| \le \dfrac{1}{x^2+1} \le$ ≤ 1. Αν $|x| > 1$, τότε $|x| < x^2 < x^2+1$, οπότε $|f(x)| \le \dfrac{1}{x^2+1} < 1$. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν παίρνουμε $|f(x)| \le 1$ και επομένως η *f* είναι φραγμένη.

4.3 Σύνθεση συναρτήσεων

Θεωρούμε τη συνάρτηση *f* με τύπο $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ και τη συνάρτηση *g* με τύπο $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

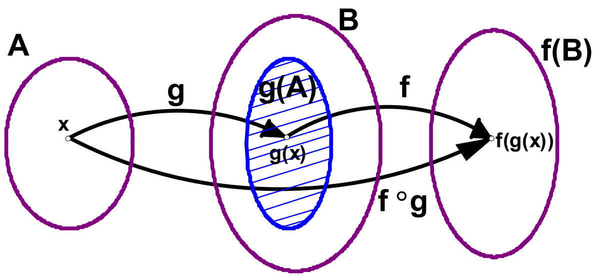
Το πεδίο ορισμού της *f* είναι το διάστημα $[-1,\ 1]$. Το σύνολο τιμών της *g* περιέχεται στο διάστημα $[-1,\ 1]$, γιατί $|g(x)| = \dfrac{2|x|}{x^2+1} \le 1 \Leftrightarrow 2|x| \le x^2+1 \Leftrightarrow (|x|-1)^2 \ge 0$. (Συγκεκριμένα, ταυτίζεται με το $[-1,\ 1]$).

Μπορούμε λοιπόν στον τύπο της *f*, να αντικαταστήσουμε το x με το $g(x)$ και να πάρουμε την παράσταση $f(g(x)) = \sqrt{1 - \frac{4x^2}{(x^2+1)^2}} = \sqrt{\frac{(x^2+1)^2 - 4x^2}{(x^2+1)^2}} = \frac{|x^2-1|}{x^2+1}$. Η παράσταση αυτή είναι ο τύπος μιας νέας συνάρτησης, η οποία συμβολίζεται με $f \circ g$ και διαβάζεται **«*f* σύνθεση *g*»**.

4.3.1 Ορισμός

Έστω $g: A \to \mathbb{R}$ και $f: B \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι το σύνολο τιμών $g(A)$ της g περιέχεται στο πεδίο ορισμού B της f.

Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση που συμβολίζεται με $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το A, ως εξής: $f \circ g(x) = f(g(x))$*, για κάθε $x \in A$. Η $f \circ g$ λέγεται **σύνθεση** των f και g.*



4.3.2 Παραδείγματα

1. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{2x}$ και $g(x) = \sin^2 x$. Να βρεθούν οι τύποι των συναρτήσεων $f \circ g$ και $g \circ f$.

Λύση: $f \circ g(x) = f(g(x)) = e^{2g(x)} = e^{2\sin^2 x}$ και $g \circ f(x) = g(f(x)) = \sin^2 f(x) = \sin^2(e^{2x})$.

2. Να ορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης *g* στις ακόλουθες περιπτώσεις ώστε να ορίζεται η συνάρτηση $f \circ g$: **(i)** $f(x) = \sqrt{4-x}$, $x \in (-\infty,\ 4]$ και $g(x) = x^2 + 3x$ και **(ii)** $f(x) = \tan x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ και $g(x) = x^2$.

Λύση: Θα πρέπει το σύνολο τιμών της *g* να περιέχεται στο πεδίο ορισμού της *f*.

Έχουμε: **(i)** $g(x) \in (-\infty, 4] \Leftrightarrow x^2 + 3x \le 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \le 0$. Το τριώνυμο $x^2 + 3x - 4$ έχει ρίζες τους αριθμούς -4 και 1. Επομένως, θα πρέπει $-4 \le x \le 1$. Είναι λοιπόν $D_g = [-4, 1]$.

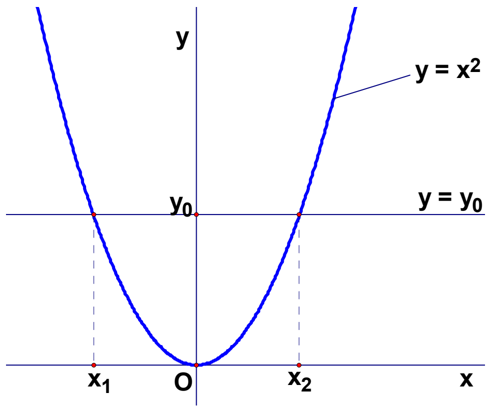
(ii) Θα πρέπει $g(x) = x^2 \ne k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Αν $k < 0$ τότε προφανώς $g(x) = x^2 \ne k\pi$. Έστω $k \ge 0$, δηλαδή $k \in \{0,1,2,3,\ldots\}$. Τότε $x \ne \pm\sqrt{k\pi}$. Επομένως, το πεδίο ορισμού της *g* είναι το σύνολο $D_g = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{k\pi} \mid k = 0,1,2\ldots\}$.

3. θεωρούμε δύο γνησίως μονότονες συναρτήσεις $g: A \to B \subseteq \mathbb{R}$ και $f: B \to \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η σύνθεση $f \circ g$ είναι: **(i)** Γνησίως αύξουσα αν και μόνον αν οι δύο συναρτήσεις έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας. **(ii)** Γνησίως φθίνουσα αν και μόνον αν οι δύο συναρτήσεις έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας.

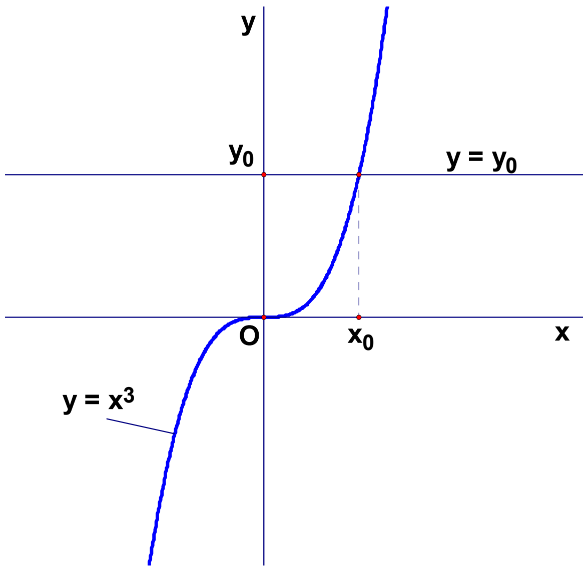
Λύση: Υποθέτουμε ότι και οι δυο είναι γνησίως αύξουσες. Έστω $x_1 < x_2$ δύο σημεία του A. Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα, $g(x_1) < g(x_2)$ και, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, θα έχουμε $f(g(x_1)) < f(g(x_2))$, ήτοι $f \circ g(x_1) < f \circ g(x_2)$. Επομένως η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα. Όλες οι άλλες περιπτώσεις προκύπτουν κατά τον ίδιο τρόπο.

4.4 Συναρτήσεις 1-1. Αντίστροφη συνάρτησης

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ με $f(x) = x^2$. Όπως έχουμε παρατηρήσει (σχόλιο μετά τον ορισμό 4.1.5), το σύνολο τιμών της είναι το διάτημα $[0, +\infty)$. Ας πάρουμε ένα μη μηδενικό σημείο y_0 του συνόλου τιμών. Υπάρχουν δύο διαφορετικά σημεία $x_1 = -\sqrt{y_0}$ και $x_2 = \sqrt{y_0}$ του πεδίου ορισμού με την ιδιότητα $f(x_1) = f(x_2) = y_0$. Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι η οριζόντια ευθεία $y = y_0$ τέμνει τη γραφική παράσταση σε **δύο σημεία**, τα σημεία (x_1, y_0) και (x_2, y_0).



Ας δούμε τώρα μια άλλη περίπτωση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x^3$. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης αυτής είναι όλο το $\mathbb{R}$. Πιο συγκεκριμένα, αν $y_0 \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει **μοναδικό** $x_0 \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $g(x_0) = x_0^3 = y_0$. Πράγματι, αν $y_0 < 0$, τότε $x_0 = -\sqrt[3]{-y_0}$ και αν $y_0 \geq 0$, τότε $x_0 = \sqrt[3]{y_0}$. Γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης **σε ένα ακριβώς** σημείο.



4.4.1 Ορισμός

Μια συνάρτηση $f: A \to f(A) \subseteq \mathbb{R}$ *λέγεται **«ένα προς ένα»** (συντ. **«1-1»**) αν, για κάθε* $y \in f(A)$ *υπάρχει **μοναδικό*** $x \in A$ *με την ιδιότητα* $y = f(x)$.

*Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης **σε ένα το πολύ σημείο**.*

Η έκφραση «το πολύ» προστίθεται για να καλύψει την περίπτωση που το σημείο *y* δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης.

Από τον ορισμό προκύπτουν άμεσα τα εξής:

(i) Η *f* είναι 1-1 αν και μόνον αν ισχύει: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, για κάθε $x_1, x_2 \in A$.

(ii) Η *f* είναι 1-1 αν και μόνον αν ισχύει: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, για κάθε $x_1, x_2 \in A$.

4.4.2 Παράδειγμα

Να εξεταστεί ποιες από τις ακόλουθες συναρτήσεις είναι 1-1: **(i)** $f(x) = \dfrac{4x-3}{x-2}$, **(ii)** $g(x) = x^2 - 4x + 3$ και **(iii)** $h(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

Λύση: (i) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Υποθέτουμε ότι $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε $\dfrac{4x_1-3}{x_1-2} = \dfrac{4x_2-3}{x_2-2} \Rightarrow (4x_1-3)(x_2-2) = (4x_2-3)$ $(x_1-2) \Leftrightarrow 4x_1x_2 - 3x_1 - 8x_2 + 6 = 4x_1x_2 - 3x_2 - 8x_1 + 6 \Leftrightarrow 5(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Επομένως, η *f* είναι 1-1.

(ii) Το πεδίο ορισμού της *g* είναι όλο το $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $g(x) = (x-2)^2 - 1$. Επομένως, $g(1) = (1-2)^2 - 1 = 0$ και $g(3) = (3-2)^2 - 1 = 0$. Άρα η *g* δεν είναι 1-1.

(iii) Το πεδίο ορισμού της *h* είναι όλο το $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $h(x_1) = h(x_2)$. Τότε $x_1 + \sqrt{x_1^2+1} = x_2 + \sqrt{x_2^2+1} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = \sqrt{x_2^2+1} - \sqrt{x_1^2+1} \Rightarrow (x_1-x_2)^2 = \Big(\sqrt{x_2^2+1} -$ $-\sqrt{x_1^2+1}\Big)^2 \Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_2^2 + 1 + x_1^2 + 1 - 2\sqrt{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} \Leftrightarrow -x_1x_2 = 1 -$ $-\sqrt{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} \Leftrightarrow \sqrt{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} = 1 + x_1x_2 \Rightarrow (x_1^2+1)(x_2^2+1) = 1 + x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_1^2x_2^2 + 1 + x_1^2 + x_2^2 = 1 + x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 0 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Επομένως, η *h* είναι 1-1.

Αν $f: A \to f(A) \subseteq \mathbb{R}$ είναι μια 1-1 συνάρτηση τότε μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση , την οποία συμβολίζουμε με f^{-1}, με πεδίο ορισμού το $f(A)$ και σύνολο τιμών το *A*, ως εξής:

Αν $y \in f(A)$, τότε υπάρχει μοναδικό $x \in A$ με $y = f(x)$. Το μοναδικό αυτό σημείο x ορίζουμε να είναι το $f^{-1}(y)$.

4.4.3 Ορισμός

Έστω $f: A \to f(A) \subseteq \mathbb{R}$ μια 1-1 συνάρτηση. Η συνάρτηση $f^{-1}: f(A) \to A$, η οποία ορίζεται με βάση τον κανόνα

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$$

*λέγεται **αντίστροφη** της f.*

4.4.4 Παράδειγμα

Να βρεθούν οι αντίστροφες των συναρτήσεων του παραδείγματος 4.4.2, οι οποίες είναι 1-1.

Λύση: Οι συναρτήσεις που αντιστρέφονται είναι οι *f* και *h*. Θα βρούμε πρώτα τα σύνολα τιμών τους.

Θέτουμε $y = f(x) = \dfrac{4x-3}{x-2}$. Παίρνουμε $yx - 2y = 4x - 3 \Leftrightarrow (y-4)x = 2y - 3$. Αν $y = 4$, τότε $0 = 5$, άτοπο. Άρα το 4 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της *f*.

Έστω $y \neq 4$. Τότε $x = \dfrac{2y-3}{y-4}$.

Γνωρίζουμε ότι το 2 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της *f*. Αν $\dfrac{2y-3}{y-4} = 2$, τότε $2y - 3 = 2y - 8 \Leftrightarrow -3 = -8$, άτοπο. Άρα, για κάθε $y \neq 4$, υπάρχει $x = \dfrac{2y-3}{y-4} \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ με την ιδιότητα: $f(x) = f\left(\dfrac{2y-3}{y-4}\right) = \dfrac{4 \cdot \dfrac{2y-3}{y-4} - 3}{\dfrac{2y-3}{y-4} - 2} = \dfrac{8y - 12 - 3y + 12}{2y - 3 - 2y + 8} = \dfrac{5y}{5} = y$.

Επομένως, $f^{-1}(y) = \dfrac{2y-3}{y-4}$, για κάθε $y \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Σημείωση: Επειδή την ανεξάρτητη μεταβλητή την παριστάνουμε συνήθως με το σύμβολο *x*, είναι προτιμότερο να γράψουμε $f^{-1}(x) = \dfrac{2x-3}{x-4}$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Για την *h* τώρα: Από τη σχέση $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$ παίρνουμε $x + \sqrt{x^2+1} > 0$. Επομένως το σύνολο τιμών της *h* περιέχεται στο διάστημα $(0, +\infty)$. Αντίστροφα, έστω $y \in (0, +\infty)$. Αναζητούμε $x \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $y = x + \sqrt{x^2+1}$.

Έχουμε: $y = x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow y - x = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow (y-x)^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow y^2 + x^2 - 2xy = x^2 + 1 \underset{y>0}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{y^2-1}{2y}$. Παρατηρούμε ότι $h\left(\dfrac{y^2-1}{2y}\right) = \dfrac{y^2-1}{2y} + \sqrt{\left(\dfrac{y^2-1}{2y}\right)^2 + 1} = \dfrac{y^2-1}{2y} +$

$+\sqrt{\frac{y^4+1-2y^2}{4y^2}+1}=\frac{y^2-1}{2y}+\sqrt{\frac{(y^2+1)^2}{4y^2}}=\frac{y^2-1}{2y}+\frac{y^2+1}{2y}=y$.

Επομένως, $h^{-1}(y)=\frac{y^2-1}{2y}$, για κάθε $y\in(0,+\infty)$ η καλύτερα, $h^{-1}(x)=\frac{x^2-1}{2x}$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

4.4.5 Πρόταση

Έστω $f:A\to f(A)\subseteq\mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Τότε η f είναι 1-1 αν και μόνον αν υπάρχει συνάρτηση $g:f(A)\to A$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) *$g\circ f(x)=x$, για κάθε $x\in A$ και*

(ii) *$f\circ g(y)=y$, για κάθε $y\in f(A)$.*

Η συνάρτηση g είναι τότε η f^{-1}.

Απόδειξη: Αν η *f* είναι 1-1, τότε προφανώς η f^{-1} ικανοποιεί τις συνθήκες **(i)** και **(ii)**. Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση *g* που ικανοποιεί τις ιδιότητες **(i)** και **(ii)**. Θα δείξουμε ότι η *f* είναι 1-1. Έστω ότι $f(x_1)=f(x_2)$, όπου $x_1,x_2\in A$. Τότε $g(f(x_1))=g(f(x_2))$ και, με βάση την ιδιότητα **(i)**, παίρνουμε $x_1=x_2$.

Θα δείξουμε τώρα ότι $g=f^{-1}$. Έστω $y\in f(A)$. Τότε υπάρχει μοναδικό $x\in A$ με την ιδιότητα $y=f(x)$. Από τον ορισμό της f^{-1} προκύπτει ότι $f^{-1}(y)=x$.

Αλλά, $g(y)=g(f(x))=g\circ f(x)=x$, σύμφωνα με την ιδιότητα **(i)**.

Σημείωση: Στην απόδειξη της προηγούμενης πρότασης δεν χρησιμοποιήσαμε πουθενά τη συνθήκη **(ii)**. Επομένως ισχύει:

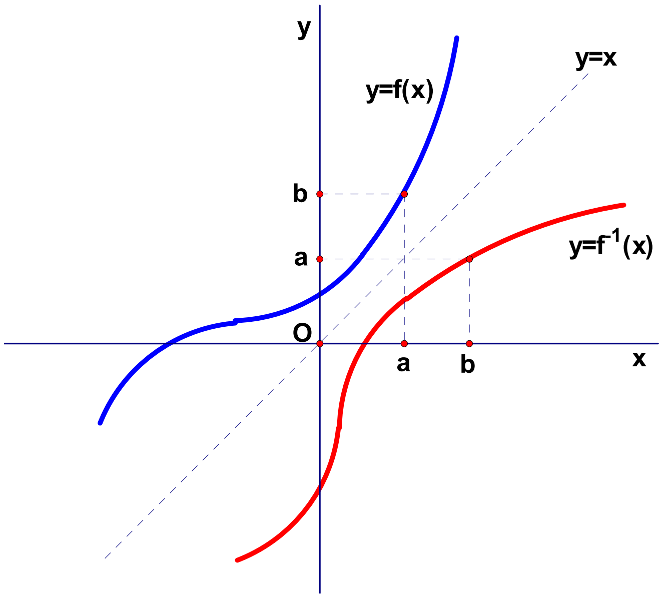
Έστω $f:A\to f(A)\subseteq\mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Τότε η f είναι 1-1 αν και μόνον αν υπάρχει συνάρτηση $g:f(A)\to A$ με την ακόλουθη ιδιότητα: $g\circ f(x)=x$, για κάθε $x\in A$.

Η συνάρτηση g είναι τότε η f^{-1}.

Θα ασχοληθούμε τώρα με τη σχέση που υπάρχει μεταξύ των γραφικών παραστάσεων μιας 1-1 συνάρτησης *f* και της αντίστροφής της f^{-1}.

Αν το σημείο (a,b) ανήκει στη γραφική παράσταση της *f*, τότε θα έχουμε $b=f(a)$. Επομένως, $a=f^{-1}(b)$, δηλαδή το σημείο (b,a) ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}. Αλλά τα σημεία (a,b) και (b,a) είναι συμμετρικά ως προς της ευθεία

$y = x$ (διχοτόμος της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων). Επομένως καταλήγουμε στο επόμενο συμπέρασμα:



4.4.6 Πρόταση

Έστω $f: A \to f(A) \subseteq \mathbb{R}$ μια 1-1 συνάρτηση και $f^{-1}: f(A) \to A$ η αντίστροφή της. Τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς της ευθεία $y = x$.