# Σημειώσεις στους πραγματικούς και μιγαδικούς αριθμούς

## 1.1 Τα βασικά αριθμητικά σύνολα

Οι πρώτοι αριθμοί που διδάσκεται ο μαθητής στο δημοτικό σχολείο είναι οι **φυσικοί αριθμοί**. Αυτοί είναι οι 0, 1, 2, 3, 4, κτλ.[1] Το σύνολό τους συμβολίζεται με το γράμμα $\mathbb{N}$. Έχουμε δηλαδή $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$. Η χρήση των φυσικών γίνεται κυρίως σε προβλήματα που αναφέρονται στο **πλήθος** αντικειμένων και όχι σε οποιαδήποτε ποσότητα.

Με κάποιο άλμα μερικών μαθητικών χρόνων μεταβαίνουμε στο Γυμνάσιο, όπου ο μαθητής μαθαίνει για τους **ακέραιους αριθμούς**. Αυτοί είναι οι φυσικοί και οι αντίθετοί τους. Η εισαγωγή των ακεραίων γίνεται για να διαχωριστούν μεγέθη τα οποία εμπλέκουν έννοιες, όπως φορά, κέρδος ή ζημία κτλ. Το σύνολο των ακεραίων συμβολίζεται με $\mathbb{Z}$. Έτσι, $\mathbb{Z} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$. Είναι προφανές ότι τόσο το σύνολο των φυσικών, όσο και το υπερσύνολό του των ακεραίων είναι **άπειρα** σύνολα.

Ήδη όμως από το δημοτικό οι μαθητές έρχονται σε επαφή και με ένα άλλο είδος αριθμών, τους **ρητούς**, δηλαδή τα **κλάσματα**. Συγκεκριμένα, τα κλάσματα με αριθμητή και παρονομαστή φυσικούς ή γενικότερα ακεραίους. Η εισαγωγή των κλασμάτων υπαγορεύεται από την ανάγκη να περιγραφούν ποσότητες που δεν μπορούν να παρασταθούν ως ακέραιες μονάδες. Έτσι, ο ρητός $\frac{2}{3}$ παριστάνει τα δύο από τα τρία ίσα μέρη της μονάδας, ο $\frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}$ την ποσότητα που είναι ίση με μία μονάδα συν ένα από τα πέντε ίσα μέρη της και ο $-\frac{6}{5}$ τον αντίθετο του $\frac{6}{5}$. Το σύνολο των ρητών παριστάνεται με το γράμμα $\mathbb{Q}$.

Έτσι, $\mathbb{Q} = \{\frac{\kappa}{\lambda} \mid \kappa, \lambda \in \mathbb{Z}, \lambda \neq 0\}$.

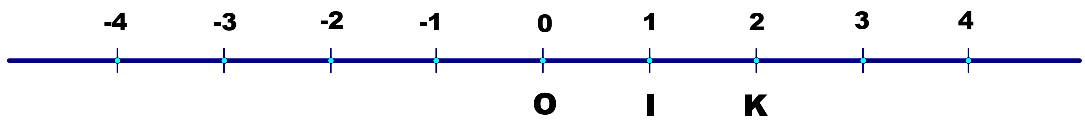
Τώρα, θα πρέπει να τονιστεί ότι οι δεκαδικοί αριθμοί δεν αποτελούν ένα ιδιαίτερο σύνολο αριθμών αλλά είναι ένα **είδος γραφής** των αριθμών με τη χρήση δεκαδικών ψηφίων.

Στις εφαρμογές χρησιμοποιούμε δεκαδικές προσεγγίσεις των διαφόρων μεγεθών οι οποίες είναι ρητοί αριθμοί. Αυτό αρχικά μπορεί να δημιουργήσει την αντίληψη ότι όλα τα φυσικά μεγέθη, δηλαδή ο,τιδήποτε μπορεί να μετρηθεί, μπορεί να παρασταθεί με τη βοήθεια των ρητών αριθμών. Η αντίληψη αυτή είχε αναχθεί σε φιλοσοφικό δόγμα από τη σχολή των

[1] Το μηδέν συνήθως εισάγεται αργότερα, για να συμβολίσει το αποτέλεσμα της αφαίρεσης ίσων αριθμών.

Πυθαγορείων. Προτού σχολιάσουμε την αντίληψη αυτή ας δούμε πως οι ρητοί αριθμοί παριστάνονται γεωμετρικά ως σημεία μιας ευθείας.

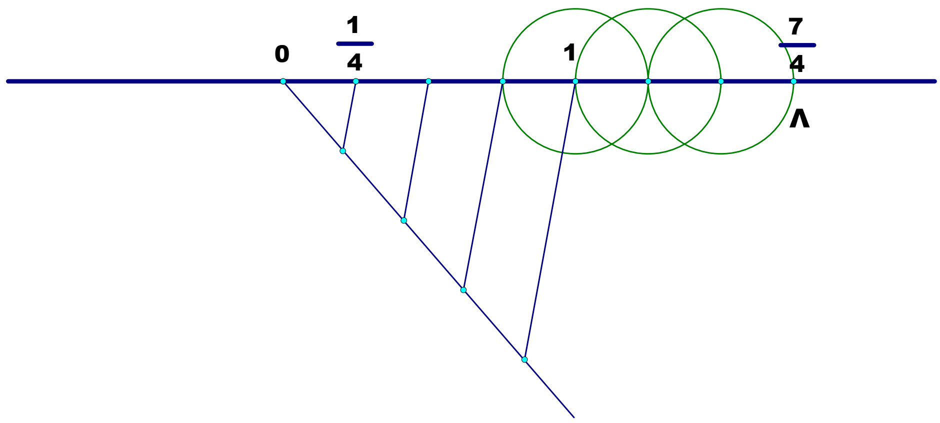
Αρχικά επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο O το οποίο παριστάνει το μηδέν. Το ίδιο αυθαίρετα, επιλέγουμε ένα δεύτερο σημείο I, το οποίο παριστάνει το 1. Επιλέγουμε δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα OI να έχει μοναδιαίο μήκος. Από τη στιγμή που επιλέξαμε τα δύο σημεία O και I, κάθε ρητός αριθμός κατέχει πια μια μοναδική θέση στην ευθεία.




Στην ημιευθεία OI και εκτός του τμήματος OI ορίζεται ένα μοναδικό σημείο K, τέτοιο ώστε OI=IK. Αναγκαστικά το K θα παριστάνει τον αριθμό 2. Σε ίση απόσταση (ίση με τη μονάδα OI) και προς το μέρος του K έχουμε ένα άλλο σημείο που παριστάνει τον 3. Προχωρώντας κατ' αυτόν τον τρόπο τοποθετούμε στην ευθεία όλους τους φυσικούς αριθμούς.

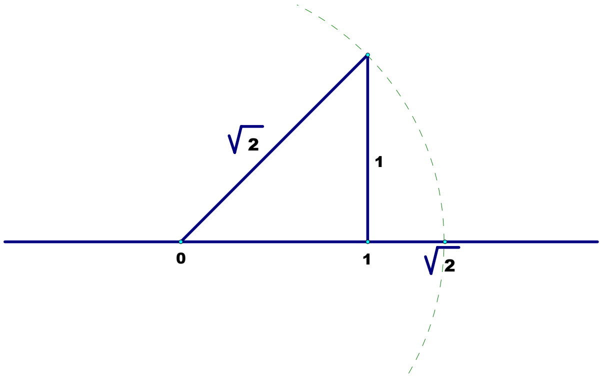
Αν τώρα πάρουμε τα συμμετρικά των εικόνων των φυσικών αριθμών ως προς το σημείο O βρίσκουμε τις εικόνες των αντιθέτων τους. Έτσι έχουμε όλο το σύνολο των ακεραίων.

Η κατασκευή των ρητών σημείων γίνεται εύκολα. Αν για παράδειγμα θέλουμε να παραστήσουμε στην ευθεία τον ρητό $\frac{7}{4}$, κάνουμε το εξής:




Χωρίζουμε, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Θαλή, το μοναδιαίο τμήμα σε 4 ίσα μέρη. Με ακτίνα το $\frac{1}{4}$ και δεξιά του 1 γράφουμε τρεις ίσους κύκλους. Το σημείο Λ παριστάνει το $\frac{7}{4}$.

Επανερχόμαστε τώρα στην αντίληψη των Πυθαγορείων: «Όλα τα μεγέθη είναι σύμμετρα», δηλαδή κλάσματα με αριθμητή και παρονομαστή ακεραίους. Σύμφωνα με την αντίληψη αυτή, κάθε τι που μπορεί να μετρηθεί παριστάνεται με έναν ρητό αριθμό. Ο αριθμός $\sqrt{2}$, δηλαδή ο θετικός αριθμός του οποίου το τετράγωνο είναι ο 2, είναι μια υπαρκτή οντότητα. Πράγματι, είναι το μήκος της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου του οποίου το μήκος κάθε κάθετης πλευράς είναι 1. Ένα τέτοιο τρίγωνο είναι εύκολο να κατασκευαστεί με κανόνα (χάρακα) και διαβήτη.




Αν δεχτούμε την άποψη των Πυθαγορείων, τότε ο αριθμός $\sqrt{2}$ θα ισούται με ένα κλάσμα της μορφής $\frac{\kappa}{\lambda}$, όπου τα $\kappa$ και $\lambda$ είναι θετικοί ακέραιοι. Από τη σχέση $\sqrt{2}=\frac{\kappa}{\lambda}$ παίρνουμε $\kappa^2 = 2\lambda^2$. Το τετράγωνο λοιπόν του $\kappa$ είναι αριθμός άρτιος (ζυγός). Μιας και μόνον οι ζυγοί αριθμοί δίνουν ζυγά τετράγωνα, (μπορείτε να σκεφτείτε έναν μονό αριθμό με ζυγό τετράγωνο;) ο $\kappa$ θα είναι ζυγός. Άρα $\kappa = 2\kappa'$, όπου $\kappa'$ ακέραιος. Τότε όμως θα πάρουμε $2\kappa'^2 = \lambda^2$ και επιχειρηματολογώντας όπως προηγουμένως, συμπεραίνουμε ότι και το $\lambda$ θα είναι ζυγός της μορφής $2\lambda'$. Οι αριθμοί $\kappa'$ και $\lambda'$ είναι μικρότεροι απ' τους $\kappa$ και $\lambda$ αντίστοιχα και το κλάσμα $\sqrt{2}=\frac{\kappa}{\lambda}$ γράφεται απλούστερα: $\sqrt{2}=\frac{\kappa'}{\lambda'}$. Με την ίδια λογική, το κλάσμα $\frac{\kappa'}{\lambda'}$ θα απλουστευθεί και αυτό με τη σειρά του και θα μας δώσει ένα νέο κλάσμα. Συνεχώς θα παίρνουμε όλο και απλούστερα κλάσματα και η διαδικασία αυτή δεν σταματάει ποτέ. Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβαίνει, γιατί οι όροι του κλάσματος είναι (θετικοί) ακέραιοι και δεν μπορούν να μειώνονται επ' άπειρον, αφού δεν μπορούν να γίνουν μικρότεροι της μονάδας.

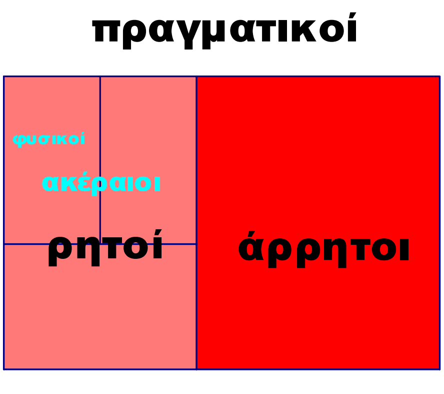
Έτσι προκύπτει αντίφαση. Η υπόθεσή μας λοιπόν ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός καταρρέει και μαζί της καταρρέει και το δόγμα των Πυθαγορείων. Η δυσάρεστη αυτή αλήθεια ανακαλύφθηκε από τους ίδιους τους Πυθαγόρειους, ίσως από τον ίδιο τον Πυθαγόρα. Ο θρύλος θέλει τον Ίππασο τον Μεταπόντιο, μαθητή του Πυθαγόρα ως τον ένοχο. Λέγεται ότι για να τον τιμωρήσουν τα άλλα μέλη της Σχολής, σ' ένα ταξίδι από την Κόρινθο προς την έδρα τους τον Κρότωνα, τον έριξαν στη θάλασσα με τραγικό γι' αυτόν τέλος.

Ο $\sqrt{2}$ =1,4142135623730950488016887242097...... φαίνεται ότι είναι ο πρώτος μη ρητός που ανακαλύφθηκε. Οι μη ρητοί λέγονται **άρρητοι** αριθμοί. Η δεκαδική μορφή ενός άρρητου περιέχει άπειρα ψηφία που δεν επαναλαμβάνονται κατά περιοδικό τρόπο. Αν επαναλαμβάνονταν, ο αριθμός αυτός θα ήταν ρητός. Έτσι, ο ρητός $\frac{5}{21}$ γράφεται στη δεκαδική μορφή ως 0,**238095**23809523809523809523809524........, ενώ ο $\sqrt{2}$ δεν έχει αυτή την ιδιότητα. Οι ρητοί και οι άρρητοι αριθμοί, μαζί, αποτελούν το σύνολο των **πραγματικών** αριθμών, δηλαδή των αριθμών που αντιπροσωπεύουν κάθε ποσότητα που μπορεί να μετρηθεί. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με το σύμβολο $\mathbb{R}$. Οι πραγματικοί αριθμοί παριστάνονται γεωμετρικά με όλα τα σημεία της ευθείας που θεωρήσαμε προηγουμένως. Γι' αυτό και η ευθεία μας θα λέγεται στο εξής **ευθεία των πραγματικών** ή **πραγματική ευθεία**.

Ο $\sqrt{2}$, αν και άρρητος παρουσιάζει μια ομαλή συμπεριφορά. Συγκεκριμένα είναι ρίζα του πολυωνύμου $x^2-2=x^2+0x-2$, το οποίο έχει ακέραιους συντελεστές. Τέτοιοι αριθμοί λέγονται **αλγεβρικοί**. Υπάρχουν μη αλγεβρικοί, **υπερβατικοί** όπως λέγονται αριθμοί; Τέτοιοι αριθμοί θα αναζητηθούν ανάμεσα στους άρρητους αριθμούς, μιας και οι ρητοί είναι αλγεβρικοί. Από τις εργασίες του Joseph Liouville, οι μαθηματικοί γνώριζαν την ύπαρξη τέτοιων αριθμών. Για παράδειγμα, ο άρρητος αριθμός 0,110001000000000000000001......, ο οποίος έχει παντού μηδενικά εκτός από τις θέσεις 1=1!, $2=2!=1\cdot 2$, $6=3!=1\cdot 2\cdot 3$, $24=4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$ κ.ο.κ., είναι υπερβατικός. Το 1882 ο Γερμανός μαθηματικός Karl Lindemann απέδειξε ότι ο γνωστός αριθμός π = 3,1415926535897932384626433832795....., δηλαδή ο λόγος της περιφέρειας κύκλου προς τη διάμετρό του, είναι αριθμός υπερβατικός. Έτσι αποδείχτηκε ότι ο κύκλος δεν τετραγωνίζεται! Δηλαδή, αν έχουμε έναν κύκλο, δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε μόνο με το χάρακα και το διαβήτη τετράγωνο που να έχει εμβαδόν ίσο με αυτό του κύκλου.

Ήδη από τα τέλη του 19ου αιώνα, χάρις στις εργασίες του Georg Cantor, ξέρουμε ότι οι άρρητοι αριθμοί, και ακόμα περισσότερο οι υπερβατικοί, δεν είναι η εξαίρεση του κανόνα αλλά ο ίδιος ο κανόνας! Δηλαδή το σύνολο των ρητών αριθμών φαντάζει απειροελάχιστο μπροστά στο σύνολο των αρρήτων, το οποίο κατακλύζει την ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Η σχέση ανάμεσα στα διάφορα σύνολα αριθμών περιγράφεται στο παρακάτω διάγραμμα:



## 1.2 Οι αλγεβρικές ιδιότητες των πραγματικών

Η επίλυση πολλών μαθηματικών προβλημάτων απαιτεί ευχέρεια στο χειρισμό αλγεβρικών παραστάσεων. Οι ιδιότητες των αλγεβρικών παραστάσεων απορρέουν από λίγες βασικές παραδοχές (αξιώματα) που κάνουμε σχετικά με τους πραγματικούς αριθμούς.

### 1.2.1 Αξίωμα

*Ισχύουν τα ακόλουθα:*

***i)*** $(a+b)+c = a+(b+c)$, *για κάθε* $a,b,c \in \mathbb{R}$.

***ii)*** $a+b = b+a$, *για κάθε* $a,b \in \mathbb{R}$.

***iii)*** *Υπάρχει ένας πραγματικός που λέγεται* ***μηδέν*** *και συμβολίζεται με* ***0*** *με την ιδιότητα* $a+0=a$, *για κάθε* $a \in \mathbb{R}$.

***iv)*** *Για κάθε πραγματικό αριθμό a, υπάρχει ένας πραγματικός* $-a$ *που λέγεται* ***αντίθετος*** *του a, με την ιδιότητα* $a+(-a)=0$.

***v)*** $(ab)c = a(bc)$, *για κάθε* $a,b,c \in \mathbb{R}$.

***vi)*** $ab = ba$, *για κάθε* $a,b \in \mathbb{R}$.

***vii)*** *Υπάρχει ένας πραγματικός που λέγεται* ***ένα*** *και συμβολίζεται με* ***1*** *με την ιδιότητα* $a \cdot 1 = a$, *για κάθε* $a \in \mathbb{R}$.

***viii)*** *Για κάθε* ***μη μηδενικό*** *πραγματικό αριθμό a, υπάρχει ένας πραγματικός* $a^{-1}$ *που λέγεται* ***αντίστροφος*** *του a, με την ιδιότητα* $aa^{-1}=1$.

***ix)*** $(a+b)c = ac+bc$, *για κάθε* $a,b,c \in \mathbb{R}$*.(Επιμεριστική ιδιότητα).*

Οι παραπάνω ιδιότητες είναι προφανείς σε κάθε απόφοιτο του γυμνασίου. Το ίδιο προφανείς είναι και οι ιδιότητες που αναφέρονται στα επόμενα παραδείγματα. Κάθε μαθητής του γυμνασίου και του λυκείου έχει μάθει να χρησιμοποιεί σχεδόν μηχανικά τις ιδιότητες αυτές κατά την επίλυση προβλημάτων. Εδώ δεν επιχειρούμε να παρουσιάσουμε μια αξιωματική θεμελίωση της αλγεβρικής δομής των πραγματικών. Απλώς προσπαθούμε να δώσουμε, στον ενδιαφερόμενο μόνον αναγνώστη, το πώς μέσω της αποδεικτικής διαδικασίας, κάποιες ιδιότητες προκύπτουν από άλλες, στοιχειωδέστερες. Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται μόνον για τις εφαρμογές μπορεί να παραλήψει τα παραδείγματα αυτά.

### 1.2.2 Παραδείγματα

**1.** Δείξτε ότι οι αριθμοί **0** (**μηδέν**) και **1** (**ένα**) που ορίζονται στα **(iii)** και **(vii)** του παραπάνω αξιώματος είναι μοναδικοί.

**Απόδειξη:** Ας υποθέσουμε ότι ο μηδέν δεν είναι μοναδικός. Τότε υπάρχει κάποιος πραγματικός αριθμός $\theta \neq 0$ με την ιδιότητα $a+\theta=a$, για κάθε $a\in\mathbb{R}$.

Ειδικά για $a=0$ θα έχουμε $0+\theta=0$. Αλλά ο αριθμός $0+\theta=\theta+0$ θα πρέπει να είναι ίσος με $\theta$, σύμφωνα με το **(iii)** του αξιώματος 1.2.1. Άρα $0=\theta$, αντίφαση. Επομένως ο αριθμός 0 είναι μοναδικός. Αν μιμηθούμε την προηγούμενη απόδειξη μπορούμε να αποδείξουμε την μοναδικότητα του **ένα**. Αρκεί τα αθροίσματα να γίνουν γινόμενα και το μηδέν να αντικατασταθεί από το ένα.

**2.** Δείξτε ότι κάθε πραγματικός αριθμός έχει **μοναδικό αντίθετο** και κάθε μη μηδενικός πραγματικός έχει **μοναδικό αντίστροφο**.

**Απόδειξη:** Αν $a'$ και $a''$ είναι δύο αντίθετοι του $a$, τότε θα έχουμε:

$$a' \underset{\text{(iii)}}{=} a'+0 = a'+(a+a'') \underset{\text{(i)}}{=} (a'+a)+a'' = 0+a'' = a''.$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται η μοναδικότητα του αντιστρόφου.

**3.** Δείξτε ότι: **(i)** $-(a+b)=(-a)+(-b)$, για κάθε $a,b\in\mathbb{R}$, **(ii)** $a\cdot 0=0$, για κάθε $a\in\mathbb{R}$ και **(iii)** $(-a)b=a(-b)=-ab$, για κάθε $a,b\in\mathbb{R}$.

**Απόδειξη: (i)** $(a+b)+((-a)+(-b))=(a+b)+((-b)+(-a))=((a+b)+(-b))+(-a)=$

$=(a+(b+(-b)))+(-a)=(a+0)+(-a)=a+(-a)=0$. Άρα $(-a)+(-b)=-(a+b)$.

**(ii)** $a\cdot 0=a\cdot(0+0)\underset{\text{(ix)}}{=}a\cdot 0+a\cdot 0$. Προσθέτουμε και στα δύο μέλη της σχέσης $a\cdot 0=a\cdot 0+a\cdot 0$ τον αντίθετο του $a\cdot 0$.

$$a\cdot 0=a\cdot 0+a\cdot 0 \Rightarrow a\cdot 0+(-a\cdot 0)=(a\cdot 0+a\cdot 0)+(-a\cdot 0) \Leftrightarrow 0=a\cdot 0+(a\cdot 0+(-a\cdot 0)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0=a\cdot 0+0 \Leftrightarrow 0=a\cdot 0$$

**(iii)** $ab+(-a)b=(a+(-a))b=0\cdot b=0$. Άρα $(-a)b=-ab$.

Όμοια, $ab+a(-b)=a(b+(-b))=a\cdot 0=0$. Άρα $a(-b)=-ab$.

**4.** Δείξτε ότι αν $ab=0$, τότε $a=0$ ή $b=0$.

**Απόδειξη:** Έστω ότι $a\neq 0$. Τότε ο $a$ έχει αντίστροφο, τον $a^{-1}$.

Επομένως, $ab=0 \Rightarrow a^{-1}(ab)=a^{-1}\cdot 0 \Rightarrow (a^{-1}a)b=0 \Rightarrow 1\cdot b=0 \Rightarrow b=0$.

Το τελευταίο παράδειγμα μπορεί να γενικευτεί για περισσότερους από δύο αριθμούς. Έτσι, **αν το γινόμενο *n* αριθμών είναι μηδέν, τότε κάποιος απ' αυτούς είναι μηδέν**. Αυτό αποτελεί και το κλειδί για την επίλυση εξισώσεων. Δείτε το επόμενο παράδειγμα:

**5.** Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - 3x + 2 = 0$.

**Λύση:** Έχουμε: $x^2 - 3x + 2 = x^2 - 2x - x + 2 = x(x-2) - (x-2) = (x-2)(x-1)$. Επομένως $(x-2)(x-1) = 0$. Επειδή το γινόμενο των $x-2$ και $x-1$ είναι μηδέν, κάποιος από αυτούς θα είναι μηδέν. Άρα $x-2=0$ ή $x-1=0$, δηλαδή $x=2$ ή $x=1$.

Από το παράδειγμα αυτό προκύπτει πόσο σημαντικό είναι να μπορούμε να μετατρέπουμε μια παράσταση σε γινόμενο παραγόντων.

## 1.3 Ταυτότητες-παραγοντοποίηση

Η γνώση των αλγεβρικών ταυτοτήτων μας παρέχει ευχέρεια στον χειρισμό αλγεβρικών παραστάσεων. Οι ταυτότητες προκύπτουν με εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας **(ix)** του αξιώματος 1.2.1. Έτσι, η γνωστή από το γυμνάσιο ταυτότητα $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ προκύπτει ως εξής: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b = aa + ba + ab + bb =$
$= a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Παρακάτω καταγράφουμε μερικές χρήσιμες ταυτότητες.

**1)** $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ και αν θέσουμε $-b$ αντί $b$,

**2)** $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

**3)** $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ και, αν θέσουμε $-b$ αντί $b$,

**4)** $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

**5)** $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ *(διαφορά τετραγώνων).*

**6)** $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

**7)** $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

Η ταυτότητα **1)** γενικεύεται για περισσότερους από δύο προσθετέους.

### 1.3.1 Πρόταση

*Αν $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι n αριθμοί, τότε*

$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2 \cdot$ *άθροισμα όλων των όρων της μορφής* $(a_i a_j)$, *όπου* $i < j$

Έτσι, $(a_1 + a_2 + a_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2 + 2a_2a_3 + 2a_1a_3$.

**Απόδειξη:** Είναι $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$. Αν κάνουμε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς παίρνοντας έναν όρο από κάθε παρένθεση και πολλαπλασιάζοντάς τους μεταξύ τους, θα καταλήξουμε σε ένα άθροισμα της μορφής

$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2 = a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 +$ άθροισμα όλων των όρων της μορφής $(a_i a_j)$, όπου $i \neq j$

Ο όρος $a_i a_j$ προκύπτει δύο φορές. Τη μία όταν παίρνουμε από την πρώτη παρένθεση το $a_i$ και από τη δεύτερη το $a_j$ και την άλλη, όταν από την πρώτη παρένθεση παίρνουμε το $a_j$ και από τη δεύτερη το $a_i$. Έτσι, εμφανίζεται ο συντελεστής 2.

Η ταυτότητα αυτή γράφεται πιο σύντομα με τη χρήση του συμβόλου $\Sigma$ που δηλώνει το άθροισμα. Έτσι, έχουμε: $(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2 = a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+2\sum\limits_{1\le i<j\le n} a_i a_j$ . ■

Η ταυτότητα **6)** γενικεύεται ως εξής:

### 1.3.2 Πρόταση

*Αν n είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε ισχύει:*

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

Έτσι, $a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$, $a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$ κτλ.

**Απόδειξη:** $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}) = a(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}) -$

$-b(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}) = a^n + \cancel{a^{n-1}b}+\cdots+\cancel{a^2b^{n-2}}+\cancel{ab^{n-1}}-\cancel{a^{n-1}b}-$

$-\cancel{a^{n-2}b^2}-\cdots-\cancel{ab^{n-1}}-b^n = a^n-b^n$. ■

Ειδικά για $a=1$, παίρνουμε $(1-b)(1+b+b^2+\cdots+b^{n-2}+b^{n-1})=1-b^n$, οπότε αν $b\neq 1$ θα έχουμε: $1+b+b^2+\cdots+b^{n-1}=\dfrac{1-b^n}{1-b}$.

Η ταυτότητα **7)** γενικεύεται και αυτή, αλλά μόνον για τους **περιττούς** *n*. Συγκεκριμένα:

### 1.3.3 Πρόταση

*Αν n είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος, τότε ισχύει:*

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\cdots+a^2b^{2n-2}-ab^{2n-1}+b^{2n}).$$

**Απόδειξη:**

$(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+\cdots-ab^{2n-1}+b^{2n}) = a(a^{2n}-a^{2n-1}b+\cdots-ab^{2n-1}+b^{2n})+$

$+b(a^{2n}-a^{2n-1}b+\cdots-ab^{2n-1}+b^{2n}) = a^{2n+1}-\cancel{a^{2n}b}+\cancel{a^{2n-1}b^2}-\cdots-\cancel{a^2b^{2n-1}}+\cancel{ab^{2n}}+$

$+\cancel{a^{2n}b}-\cancel{a^{2n-1}b^2}+\cancel{a^{2n-1}b^3}-\cdots-\cancel{ab^{2n}}+b^{2n+1}=a^{2n+1}+b^{2n+1}$. ■

Σε ορισμένες περιπτώσεις η παραπάνω ταυτότητα μας επιτρέπει να παραγοντοποιήσουμε παραστάσεις της μορφής $a^n+b^n$ ακόμα και όταν το *n* δεν είναι περιττός. Αρκεί να διαιρείται

με έναν περιττό. Για παράδειγμα, $a^6+b^6=(a^2)^3+(b^2)^3=(a^2+b^2)((a^2)^2-a^2b^2+(b^2)^2)=$
$=(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$.

Μια άλλη γνωστή ταυτότητα είναι η **ταυτότητα των τριών κύβων του Euler**:

### 1.3.4 Πρόταση

*Ισχύει η ακόλουθη ταυτότητα:*

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$$

**Απόδειξη:** $a^3+b^3+c^3-3abc=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2+c^3-3abc-3a^2b-3ab^2=$
$=(a+b)^3+c^3-3abc-3a^2b-3ab^2=(a+b)^3+c^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2-$
$-3abc-3a^2b-3ab^2-3(a+b)^2c-3(a+b)c^2=(a+b+c)^3-3abc-3a^2b-3ab^2-$
$-3(a+b)^2c-3(a+b)c^2=(a+b+c)^3-3ab(a+b+c)-3(a+b)c(a+b+c)=$
$=(a+b+c)((a+b+c)^2-3ab-3(a+b)c)=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+$
$+2ca-3ab-3ac-3bc)=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

Η δεύτερη μορφή της παράστασης $a^3+b^3+c^3-3abc$ επιτυγχάνεται με το να δείξουμε ότι
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=\frac{1}{2}((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$.

Έχουμε: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=a^2+b^2-2ab+b^2+c^2-2bc+c^2+a^2-2ca=$
$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

Επομένως $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=\frac{1}{2}((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$. ■

### 1.3.5 Πρόταση (ταυτότητα του Lagrange)

*Ισχύει η ακόλουθη ταυτότητα:*

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)-(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2=\sum_{1\le i<j\le n}\begin{vmatrix}a_i & b_i\\ a_j & b_j\end{vmatrix}^2$$

**Απόδειξη:** Το γινόμενο $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$ θα μας δώσει όρους της μορφής $a_i^2b_i^2$, καθώς και όρους της μορφής $a_i^2b_j^2$ με $i\neq j$.

Το τετράγωνο $(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$ θα μας δώσει τα τετράγωνα $a_i^2b_i^2$, τα οποία θα μηδενίσουν τα αντίστοιχα που προκύπτουν απ' το προηγούμενο γινόμενο, καθώς και όρους της μορφής $2a_ib_ia_jb_j$, με $i<j$.

Για ένα ζεύγος δεικτών $(i,j)$, με $i<j$ θα πάρουμε τους εξής όρους: $+a_i^2b_j^2$, $+a_j^2b_i^2$ και $-2a_ib_ia_jb_j$.

Το άθροισμά τους είναι $a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2 - 2a_i b_i a_j b_j = (a_i b_j - a_j b_i)^2 = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix}^2$. Αθροίζοντας για όλα τα δυνατά ζεύγη παίρνουμε το αποτέλεσμα. ■

Για παράδειγμα, $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$,

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}^2 =$$

$= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2$ κτλ.

### 1.3.1 Παραδείγματα

**1.** Να τραπούν σε γινόμενο παραγόντων οι ακόλουθες αλγεβρικές παραστάσεις:

**(i)** $x^m y^m + x^{m-1} y^{m+1} - x^{m+1} y^{m-1}$, όπου *m* και *n* θετικοί ακέραιοι.

**(ii)** $ax^2 + bx^2 + a + b + ax + bx$.

**(iii)** $x^2 y^2 (a^2 + b^2) + ab(x^4 + y^4)$.

**(iv)** $(m^2 x + n^2 y)^2 + (n^2 x - m^2 y)^2$.

**Λύση:** **(i)** $x^m y^m + x^{m-1} y^{m+1} - x^{m+1} y^{m-1} = x^{m-1} y^{m-1} xy + x^{m-1} y^{m-1} y^2 - x^{m-1} y^{m-1} x^2 =$

$= x^{m-1} y^{m-1} (xy + y^2 - x^2)$.

**(ii)** $ax^2 + bx^2 + a + b + ax + bx = a(x^2 + x + 1) + b(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(a + b)$.

**(iii)** $x^2 y^2 (a^2 + b^2) + ab(x^4 + y^4) = a^2 x^2 y^2 + b^2 x^2 y^2 + abx^4 + aby^4 =$

$= ay^2 (ax^2 + by^2) + bx^2 (ax^2 + by^2) = (ax^2 + by^2)(ay^2 + bx^2)$.

**(iv)** $(m^2 x + n^2 y)^2 + (n^2 x - m^2 y)^2 = m^4 x^2 + n^4 y^2 + 2m^2 x n^2 y + n^4 x^2 + m^4 y^2 - 2n^2 x m^2 y =$

$= m^4 x^2 + n^4 y^2 + n^4 x^2 + m^4 y^2 = x^2 (m^4 + n^4) + y^2 (m^4 + n^4) = (m^4 + n^4)(x^2 + y^2)$.

Στο επόμενο παράδειγμα γίνεται χρήση της διαφοράς τετραγώνων.

**2.** Να τραπούν σε γινόμενο παραγόντων οι ακόλουθες αλγεβρικές παραστάσεις:

**(i)** $144x^2 y^2 - 121a^2 b^2$, **(ii)** $x^2 - (a - b)^2$, **(iii)** $(ax + by)^2 - 1$,

**(iv)** $(x^2 + xy + y^2)^2 - (x^2 - xy + y^2)^2$.

**Λύση:** **(i)** $144x^2 y^2 - 121a^2 b^2 = (12xy)^2 - (11ab)^2 = (12xy + 11ab)(12xy - 11ab)$.

**(ii)** $x^2 - (a - b)^2 = (x + a - b)(x - a + b)$.

**(iii)** $(ax + by)^2 - 1 = (ax + by + 1)(ax + by - 1)$.

**(iv)** $(x^2 + xy + y^2)^2 - (x^2 - xy + y^2)^2 = (x^2 + xy + y^2 + x^2 - xy + y^2) \cdot (x^2 + xy + y^2 -$

$-x^2+xy-y^2)=4(x^2+y^2)xy$.

Στο επόμενο παράδειγμα γίνεται χρήση της διαφοράς τετραγώνων και του αναπτύγματος τετραγώνων.

**3.** Να τραπούν σε γινόμενο παραγόντων οι ακόλουθες αλγεβρικές παραστάσεις:

**(i)** $64x^2y^4-160x^2y^2+100x^2$, **(ii)** $169x^2y^2z^2-286xy^2z^2+121y^2z^2$,

**(iii)** $4y^2\omega^2\beta^2+361x^2y^2\omega^2\alpha^2\pm 76\alpha\beta xy^2\omega^2$, **(iv)** $\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma-\gamma^2$,

**(v)** $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-4\gamma^2+12\gamma\delta-9\delta^2$, **(vi)** $9x^2-6\alpha x+\alpha^2-\beta^2$

**Λύση:** **(i)** $64x^2y^4-160x^2y^2+100x^2=4x^2(16y^4-40y^2+25)=4x^2((4y^2)^2-2\cdot 4y^2\cdot 5+5^2)=$

$=4x^2(4y^2-5)^2$.

**(ii)** $169x^2y^2z^2-286xy^2z^2+121y^2z^2=y^2z^2(13^2x^2-2\cdot 13x\cdot 11+11^2)=y^2z^2(13x-11)^2$.

**(iii)** $4y^2\omega^2\beta^2+361x^2y^2\omega^2\alpha^2\pm 76\alpha\beta xy^2\omega^2=y^2\omega^2(2^2\beta^2+19^2x^2\alpha^2\pm 2\cdot 2\beta\cdot 19\alpha x)=$

$=y^2\omega^2(2\beta\pm 19\alpha x)^2$.

**(iv)** $\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma-\gamma^2=\alpha^2-(\beta^2+2\beta\gamma+\gamma^2)=\alpha^2-(\beta+\gamma)^2=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$.

**(v)** $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-4\gamma^2+12\gamma\delta-9\delta^2=(\alpha-\beta)^2-(2\gamma-3\delta)^2=(\alpha-\beta+2\gamma-3\delta)(\alpha-$

$-\beta-2\gamma+3\delta)$.

**(vi)** $9x^2-6\alpha x+\alpha^2-\beta^2=(3x-\alpha)^2-\beta^2=(3x-\alpha+\beta)(3x-\alpha-\beta)$.

**4.** Να τραπούν σε γινόμενο παραγόντων οι ακόλουθες αλγεβρικές παραστάσεις:

**(i)** $x^2+4x-21$, **(ii)** $x^2-7\alpha x+12\alpha^2$, **(iii)** $x^2+2xy-3y^2$.

**Λύση:** **(i)** $x^2+4x-21=x^2+7x-3x-21=x(x+7)-3(x+7)=(x+7)(x-3)$.

**(ii)** $x^2-7\alpha x+12\alpha^2=x^2-3\alpha x-4\alpha x+12\alpha^2=x(x-3\alpha)-4\alpha(x-3\alpha)=(x-3\alpha)\ (x\pm 4\alpha)$.

**(iii)** $x^2+2xy-3y^2=x^2+2xy+y^2-4y^2=(x+y)^2-(2y)^2=(x+y+2y)(x+y-2y)=$

$=(x+3y)(x-y)$.

**5.** Να απλοποιηθούν τα κλάσματα:

**(i)** $\dfrac{x^4-y^4}{(x+y)(x^3-y^3)}$, **(ii)** $\dfrac{x^2+4x-5}{x^2+3x-10}$.

**Λύση:** **(i)** $\dfrac{x^4-y^4}{(x+y)(x^3-y^3)}=\dfrac{(x^2)^2-(y^2)^2}{(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)}=\dfrac{\cancel{(x^2-y^2)}\,(x^2+y^2)}{\cancel{(x+y)(x-y)}\,(x^2+xy+y^2)}$

$=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}$.

**(ii)** $\dfrac{x^2+4x-5}{x^2+3x-10}=\dfrac{x^2+5x-x-5}{x^2+5x-2x-10}=\dfrac{x(x+5)-(x+5)}{x(x+5)-2(x+5)}=\dfrac{\cancel{(x+5)}(x-1)}{\cancel{(x+5)}(x-2)}=\dfrac{x-1}{x-2}$.

**6.** Να επιλυθεί η εξίσωση

$$(2x-1)^3+(x+y)^3+8y^3=6(2x-1)(x+y)y$$

ως προς $x$ και $y$.

**Λύση:** Η εξίσωση γράφεται: $(2x-1)^3+(x+y)^3+8y^3=6(2x-1)(x+y)y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x-1)^3+(x+y)^3+(2y)^3-3(2x-1)(x+y)(2y)=0$.

Από την ταυτότητα του Euler παίρνουμε

$\frac{1}{2}(2x-1+x+y+2y)((2x-1-x-y)^2+(x+y-2y)^2+(2y-2x+1)^2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3x+3y-1)((x-y-1)^2+(x-y)^2+(2y-2x+1)^2)=0$

Επομένως $3x+3y-1=0$ ή $(x-y-1)^2+(x-y)^2+(2y-2x+1)^2=0$.

Η εξίσωση $3x+3y-1=0$ μας δίνει $x=-y+\frac{1}{3}$ και επομένως παίρνουμε ως λύσεις τα άπειρα ζεύγη της μορφής $\left(-y+\frac{1}{3},\ y\right),\quad y\in\mathbb{R}$.

Από την εξίσωση $(x-y-1)^2+(x-y)^2+(2y-2x+1)^2=0$ παίρνουμε το σύστημα

$\begin{cases} x-y-1=0 \\ x-y=0 \\ 2y-2x+1=0 \end{cases}$ Από την πρώτη και τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος (με αφαίρεση κατά μέλη) παίρνουμε $-1=0$, άτοπο. Άρα οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης είναι μόνον τα ζεύγη $\left(-y+\frac{1}{3},\ y\right),\quad y\in\mathbb{R}$.

## Άλυτες ασκήσεις

**1.** Να κάνετε τις ακόλουθες πράξεις εφαρμόζοντας τις γνωστές ταυτότητες:

**(i)** $\left(2x^3-\frac{1}{3}y^2\right)^2$, **(ii)** $\left(-3x-2y^3\right)^2$, **(iii)** $\left(-2x^2-3y^5\right)\left(-2x^2+3y^5\right)$, **(iv)** $\left(a^2x-\frac{1}{2}ay^3\right)^3$.

**2.** Να παραγοντοποιήσετε τις ακόλουθες παραστάσεις:

**(i)** $4x^5y^3-6x^7y^2+8x^3y^4$

**(ii)** $2a^5-6a^4b+2a^3b^2$

**(iii)** $(x-1)(x^2+2)-2(1-x)(x^2-1)-4(x-1)$

**(iv)** $6x^2+3\lambda^2x+8\lambda x+4\lambda^3$

**(v)** $5x^3y+10xy^3+5x^2y^2-2x^2-4y^2-2xy$

**(vi)** $6x^2-4ax-9bx+6ab$

**(vii)** $ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$

**(viii)** $ax^{n+1}+ay^mx+bx^{n+1}+by^mx$, $m,n>0$

**(ix)** $a^2-36b^2c^4$

**(x)** $a^3b^3-a^3-b^3+1$

**(xi)** $x^2+10x+9$

**(xii)** $6x^2+17x+12$

**(xiii)** $y^2+4xy-96x^2$

**(xiv)** $x^3-3x+2$

**(xv)** $a^2x^2+2a^2xy+a^2y^2-(a+b)^2$

**(xvi)** $(a-ab)^2+(a-ab)^4-(1-b)^4$

**(xvii)** $a^2-8ab-2ac+16b^2+8bc$

**(xviii)** $(x^2+9)(a^2+4)-(ax+6)^2$

**3.** Να απλοποιήσετε τα ακόλουθα κλάσματα:

**(i)** $\dfrac{6xy-3x^2}{4xy^2-2x^2y}$

**(ii)** $\dfrac{(2x+y)^2}{xy^2-4x^3}$

**(iii)** $\dfrac{a^3+a^2}{a^3+1}$

**(iv)** $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$

**(v)** $\dfrac{x^2y-5xy}{x^2y-4xy-5y}$

**(vi)** $\dfrac{a^2-5a+6}{a^2-6a+9}$

**(vii)** $\dfrac{x^2-4ax-21a^2}{(x^2+3ax)^2}$

**(viii)** $\dfrac{x^3+y^3}{x^2-xy-2y^2}$

**4.** Να αποδείξετε τα ακόλουθα:

**(i)** Αν $x=a^3+3abc$, $y=b^3+3abc$, $z=c^3+3abc$ και $a+b+c=0$, τότε $x+y+z=12abc$

**(ii)** Αν $3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2$, τότε $a=b=c$.

**(iii)** Αν $xyz\neq 0$ και $x+\dfrac{1}{y}=y+\dfrac{1}{z}=z+\dfrac{1}{x}$, τότε $x=y=z$ ή $xyz=\pm 1$.

**(iv)** Αν $a\neq b$, $b\neq c$ και $b(a+c)=2ac$, τότε $\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{b-a}+\dfrac{1}{b-c}$.

**(v)** Αν $2b=a+c$ και $2c=b+d$, τότε η παράσταση $abcd+(b-a)^4$ είναι τέλειο τετράγωνο.

## 1.4 Διάταξη των πραγματικών αριθμών

Γνωρίζουμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί είναι διατεταγμένοι μέσω της σχέσης «<» ή της «>». Οι βασικές ιδιότητες των ανισοτικών σχέσεων απορρέουν από λίγες βασικές παραδοχές. Δεχόμαστε το εξής:

### 1.4.1 Αξίωμα

*Υπάρχει ένα υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών, που το συμβολίζουμε με* $\mathbb{R}^+$ *με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

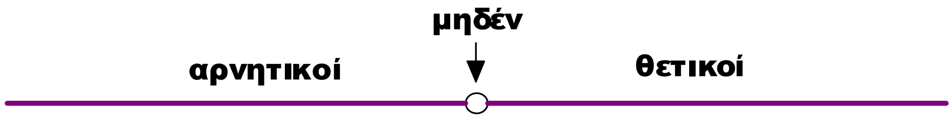
***i)*** *Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει* ***μία και μόνον μία*** *από τις ακόλουθες σχέσεις:*

*α)* $x=0$, *β)* $x\in\mathbb{R}^+$, *γ)* $-x\in\mathbb{R}^+$.

***ii)*** *Για κάθε* $x,y\in\mathbb{R}^+$, *ισχύει* $x+y\in\mathbb{R}^+$ *και* $xy\in\mathbb{R}^+$.

*Τα στοιχεία του* $\mathbb{R}^+$ *λέγονται* ***θετικοί αριθμοί***. *Τα στοιχεία του συνόλου* $\mathbb{R}^- = \{-x \mid x \in \mathbb{R}^+\}$ *λέγονται* ***αρνητικοί αριθμοί***.

Έτσι το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών χωρίζεται σε τρία ξένα μεταξύ τους υποσύνολα: τους αρνητικούς $\mathbb{R}^-$, τους θετικούς $\mathbb{R}^+$ και το μονοσύνολο $\{0\}$ που περιέχει το μηδέν.




*Δύο ή περισσότεροι μη μηδενικοί αριθμοί λέγονται* ***ομόσημοι*** *αν είναι όλοι θετικοί ή όλοι αρνητικοί. Δύο μη μηδενικοί αριθμοί που δεν είναι ομόσημοι λέγονται* ***ετερόσημοι***.

**1.4.2 Ορισμός**

*Έστω* $x, y \in \mathbb{R}$. *Θα λέμε ότι* ***ο x είναι μεγαλύτερος του y*** *και αυτό θα το συμβολίζουμε με* $x > y$, *αν* $x - y \in \mathbb{R}^+$. *Ισοδύναμη έκφραση είναι «****ο y είναι μικρότερος του x****». Αυτό συμβολίζεται με* $y < x$. *Προφανώς,* $x > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^+$ *και* $x < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^-$.

Από το (i) του αξιώματος 1.4.1 προκύπτει ότι μόνον μία από τις σχέσεις

α) $x = y$, β) $x > y$, γ) $y > x$

ισχύει.

**1.4.3 Παραδείγματα**

**1.** Δείξτε ότι αν $x > y$ και $y > z$, τότε $x > z$.

**Απόδειξη:** $x > y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{R}^+$ και $y > z \Leftrightarrow y - z \in \mathbb{R}^+$. Από το (ii) του αξιώματος 1.4.1 προκύπτει ότι $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{R}^+$. Επομένως, $x > z$.

**2.** Δείξτε ότι αν $x > y$ και $z > w$, τότε $x + z > y + w$. (Δηλαδή μπορούμε να προσθέτουμε κατά μέλη ανισότητες που έχουν την ίδια φορά).

**Απόδειξη:** Έχουμε $(x + z) - (y + w) = (x - y) + (z - w)$. Αλλά $x - y \in \mathbb{R}^+$ (γιατί $x > y$) και $z - w \in \mathbb{R}^+$ (γιατί $z > w$). Από την ιδιότητα (ii) του αξιώματος 1.4.1 προκύπτει ότι $(x + z) - (y + w) = (x - y) + (z - w) \in \mathbb{R}^+$ και επομένως $x + z > y + w$.

**1.4.4 Πρόταση**

***i)*** *Το γινόμενο δύο ομόσημων αριθμών είναι θετικός.*

***ii)*** *Το γινόμενο δύο ετερόσημων αριθμών είναι αρνητικός.*

**Απόδειξη:** Έστω ότι $x>0$ και $y>0$. Από το (ii) του αξιώματος 1.4.1 παίρνουμε ότι $xy>0$. Αν $x<0$ και $y>0$, τότε $-x>0$ και $y>0$. Από το (ii) του αξιώματος 1.4.1 παίρνουμε ότι $-xy=(-x)y>0$. Επομένως (από το (i) του ίδιου αξιώματος), $xy<0$. Αν $x>0$ και $y<0$ σκεφτόμαστε παρόμοια.

Έστω τώρα ότι $x<0$ και $y<0$. Τότε $x<0$ και $-y>0$ και, σύμφωνα με τα προηγούμενα, $-xy=x(-y)<0$. Επομένως, $xy>0$. ■

**1.4.5 Πόρισμα**

*Για κάθε μη μηδενικό πραγματικό αριθμό* $x$ *ισχύει:* $x^2>0$. *Ειδικότερα (όσο και αν αυτό φαίνεται αστείο)* $1=1^2>0$.

**Απόδειξη:** Άμεση, αφού ο $x$ είναι ομόσημος με τον εαυτό του. ■

**1.4.6 Ορισμός**

*Θέτουμε* $x\geq y$ *και διαβάζουμε «**x μεγαλύτερο ή ίσο του y**» αν* $x>y$ *ή* $x=y$.

*Ακόμη, θέτουμε* $x\leq y$ *αν και μόνον αν* $y\geq x$. *Προφανώς* $x\geq y \Leftrightarrow x-y\geq 0$.

**1.4.7 Πρόταση**

*Ισχύουν τα εξής:* ***(i)*** $x\geq x$, *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$, ***(ii)*** *Αν* $x\geq y$ *και* $y\geq x$, *τότε* $x=y$,

***(iii)*** *Αν* $x\geq y$ *και* $y\geq z$, *τότε* $x\geq z$. ■

Η απόδειξη της πρότασης αυτής είναι προφανής.

Το πόρισμα 1.4.5 διατυπώνεται τώρα (καλύπτοντας και τη μηδενική περίπτωση) ως εξής:

$$x^2\geq 0,\ \textit{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}.$$

Γενικότερα, $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\geq 0$, για κάθε $n$-άδα $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ πραγματικών αριθμών.

Σημειώνουμε ακόμα ότι αν $x>0$ και $y\geq 0$, τότε $x+y>0$. (Αν $y=0$ τότε $x+y=x>0$ ενώ αν $y>0$, χρησιμοποιούμε το (ii) του αξιώματος 1.4.1).

**1.4.8 Πόρισμα**

*Έστω* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. *Τότε ισχύει* $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

**Απόδειξη:** Αρκεί να αποδείξουμε ότι αν $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 0$ τότε $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. Πράγματι, αν $a_1 \neq 0$, τότε $a_1^2 > 0$. Επειδή $a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$, θα έχουμε $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 > 0$, άτοπο. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι και $a_2 = \cdots = a_n = 0$. ■

**1.4.9 Πόρισμα**

***i)*** *Αν* $x \neq 0$, *τότε οι αριθμοί x και* $x^{-1}$ *είναι ομόσημοι.*

***ii)*** *Το πηλίκο δύο ομόσημων αριθμών είναι θετικός.*

**Απόδειξη: i)** Αν οι αριθμοί *x* και $x^{-1}$ ήσαν ετερόσημοι, τότε από το (ii) της πρότασης 1.4.4, ο $1 = xx^{-1}$ θα ήταν αρνητικός.

**ii)** Αν οι μη μηδενικοί αριθμοί $a, b$ είναι ομόσημοι, τότε $ab > 0$. Επίσης ξέρουμε ότι $b^2 > 0$. Από το (i) προκύπτει ότι $(b^2)^{-1} > 0$. Επομένως $\frac{a}{b} = (ab)(b^2)^{-1} > 0$. ■

**1.4.10 Πρόταση**

***i)*** *Αν* $a > 0$ *και* $x > y$, *τότε* $ax > ay$ *και* $\frac{x}{a} > \frac{y}{a}$. *Δηλαδή,* ***μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με έναν θετικό αριθμό, χωρίς να αλλάξει φορά η ανισότητα.***

***ii)*** *Αν* $a < 0$ *και* $x > y$, *τότε* $ax < ay$ *και* $\frac{x}{a} < \frac{y}{a}$. *Δηλαδή,* ***μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με έναν αρνητικό αριθμό, αλλάζοντας όμως φορά στην ανισότητα.***

**Απόδειξη: i)** Αν $x > y$, τότε $x - y > 0$. Επομένως οι αριθμοί $a$ και $x - y$ είναι ομόσημοι. Άρα το γινόμενό τους $a(x-y) = ax - ay$ και το πηλίκο τους $\frac{x-y}{a} = \frac{x}{a} - \frac{y}{a}$ είναι θετικοί αριθμοί. Επομένως, $ax > ay$ και $\frac{x}{a} > \frac{y}{a}$. Η απόδειξη του (ii) είναι ανάλογη. ■

**1.4.11 Πρόταση**

*Αν οι αριθμοί* $x, y$ *είναι ομόσημοι, τότε ισχύει:* $x > y \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ *δηλαδή,* ***αν αντιστρέψουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας, όταν αυτά είναι ομόσημοι αριθμοί, παίρνουμε μια ανισότητα με αντίστροφη φορά.***

**Απόδειξη:** Εφόσον οι $x, y$ είναι ομόσημοι, έχουμε $xy > 0$.

Άρα, με βάση την προηγούμενη πρόταση, $x > y \Leftrightarrow \frac{x}{xy} > \frac{y}{xy} \Leftrightarrow \frac{1}{y} > \frac{1}{x}$. ■

**1.4.12 Πρόταση**

*Έστω $x \geq 0$ και $y \geq 0$. Για κάθε $n = 1,2,\ldots$ ισχύει: $x^n > y^n \Leftrightarrow x > y$.*

**Απόδειξη:** Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

Έστω $x > y \geq 0$. Εφόσον $x > 0$, έχουμε $x^{n-1} > 0$ και με βάση την τελευταία παρατήρηση πριν από το πόρισμα 1.4.8, $x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1} > 0$. Επειδή $x - y > 0$, έπεται ότι $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}) > 0$, δηλαδή $x^n > y^n$.

Αντίστροφα, έστω $x^n > y^n (\geq 0)$. Τότε $x^n > 0$ και επομένως $x \neq 0$. Επειδή $x \geq 0$, έπεται $x > 0$. Όπως προηγουμένως προκύπτει ότι $x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1} > 0$. Συνεπώς $x - y = \frac{x^n - y^n}{x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}} > 0$, δηλαδή $x > y$. ■

**1.4.13 Παραδείγματα**

**1.** Αν $a > 0$ και $b > -1$, δείξτε ότι $a(1+b) > a - b$.

**Απόδειξη:** $a(1+b) > a - b \Leftrightarrow a + ab > a - b \Leftrightarrow a(b+1) > 0$, που ισχύει γιατί $a > 0$ και $b > -1 \Leftrightarrow b + 1 > 0$.

**2.** Δείξτε ότι $a^2 + b^2 \geq 2ab$, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$. Πότε ισχύει το «ίσον»;

**Απόδειξη:** $a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$, και η τελευταία σχέση ισχύει. Τώρα, $a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$.

**3.** Δείξτε ότι: **(i)** Αν ο $a$ είναι θετικός, τότε $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

**(ii)** Αν ο $a$ είναι αρνητικός, τότε $a + \frac{1}{a} \leq -2$.

**Απόδειξη: (i)** $a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow$ (πολλαπλασιάζοντας επί τον θετικό $a$-πρόταση 1.4.11)

$a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$.

**(ii)** $a + \frac{1}{a} \leq -2 \Leftrightarrow$ (πολλαπλασιάζοντας επί τον αρνητικό $a$-πρόταση 1.4.11)

$a^2 + 1 \geq -2a \Leftrightarrow (a+1)^2 \geq 0$.

**4.** Δείξτε ότι $a^2 - ab + b^2 \geq 0$ και $a^2 + ab + b^2 \geq 0$, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$. Πότε ισχύει το «ίσον» στις παραπάνω σχέσεις;

**Απόδειξη:** $a^2 - ab + b^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 2ab) = \frac{1}{2}[a^2 + b^2 + (a-b)^2]$ και

$a^2 + ab + b^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + 2ab) = \frac{1}{2}[a^2 + b^2 + (a+b)^2]$.

Οι ποσότητες $\frac{1}{2}[a^2 + b^2 + (a \pm b)^2]$ είναι προφανώς $\geq 0$, ως αθροίσματα τετραγώνων επί τον θετικό $\frac{1}{2}$.

Τώρα, αν $a^2 - ab + b^2 = \frac{1}{2}[a^2 + b^2 + (a-b)^2] = 0$ θα έχουμε $a = b = 0$ (πόρισμα 1.4.8).

Όμοια, $a^2 + ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

**5.** Δείξτε την ***ανισότητα Cauchy-Schwarz***:

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2,$$

για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.

**Απόδειξη:** Με βάση την ταυτότητα Lagrange (πρόταση 1.3.5), έχουμε

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 = \sum_{i<j} \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix}^2$$

και το δεύτερο μέλος είναι $\geq 0$, ως άθροισμα τετραγώνων.

**6.** Δείξτε ότι αν $a + b \geq 1$, τότε $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$.

**Απόδειξη:** Έχουμε $(a+b)^2 \geq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \geq 1$ και

$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$. Προσθέτοντας κατά μέλη,

$2a^2 + 2b^2 \geq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$.

Ακόμη, $(a^2 + b^2)^2 \geq \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a^4 + b^4 + 2a^2b^2 \geq \frac{1}{4}$ και

$(a^2 - b^2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^4 + b^4 - 2a^2b^2 \geq 0$. Προσθέτοντας κατά μέλη,

$2a^4 + 2b^4 \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$.

**7.** Δείξτε ότι αν *a*, *b* είναι θετικοί αριθμοί με $a + b = 1$, τότε

**(i)** $ab \leq \frac{1}{4}$ και **(ii)** $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq 9$.

**Απόδειξη:** **(i)** Έχουμε $(a+b)^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab = 1 - 4ab \Leftrightarrow$

$1-4ab=(a-b)^2\geq 0$. Επομένως, $1\geq 4ab \Leftrightarrow ab\leq \frac{1}{4}$.

**(ii)** $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\geq 9 \Leftrightarrow 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}\geq 9 \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab}+\frac{1}{ab}\geq 8 \underset{a+b=1}{\Leftrightarrow} \frac{2}{ab}\geq 8 \Leftrightarrow ab\leq \frac{1}{4}$, που την αποδείξαμε προηγουμένως.

**8.** Δείξτε ότι $2a^4+1\geq 2a^3+a^2$, για κάθε $a\in\mathbb{R}$.

**Απόδειξη:** $2a^4+1\geq 2a^3+a^2 \Leftrightarrow 2a^4-2a^3-a^2+1\geq 0 \Leftrightarrow 2a^3(a-1)-(a-1)(a+1)\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-1)(2a^3-a-1)\geq 0 \Leftrightarrow (a-1)(a^3-a+a^3-1)\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-1)(a(a^2-1)+(a-1)(a^2+a+1))\geq 0 \Leftrightarrow (a-1)(a(a-1)(a+1)+(a-1)(a^2+a+1))\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-1)^2(a(a+1)+a^2+a+1)\geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2(2a^2+2a+1)\geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2(a^2+(a+1)^2)\geq 0$

που ισχύει.

**9.** Έστω $a>2$. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $a^3$ και $a^2+a+2$.

**Λύση:** $a^3-a^2-a-2=a^3-2a^2+a^2-a-2=a^2(a-2)+a^2-2a+a-2=$

$=a^2(a-2)+a(a-2)+a-2=(a-2)(a^2+a+1)$. Από υπόθεση έχουμε $a-2>0$. Επίσης, με βάση το παράδειγμα 4 προκύπτει ότι $a^2+a+1>0$. Άρα $a^3>a^2+a+2$.

**10.** Δείξτε ότι $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\geq 6abc$.

**Απόδειξη:** $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\geq 6abc \Leftrightarrow a^2+a^2b^2+b^2+b^2c^2+c^2+$
$+c^2a^2\geq 6abc \Leftrightarrow a^2+a^2b^2+b^2+b^2c^2+c^2+c^2a^2\geq 6abc$.

Έχουμε $a^2+b^2c^2-2abc=(a-bc)^2\geq 0 \Rightarrow a^2+b^2c^2\geq 2abc$. Ομοίως, $b^2+c^2a^2\geq 2abc$ και $c^2+a^2b^2\geq 2abc$. Προσθέτοντας τις σχέσεις $a^2+b^2c^2\geq 2abc$, $b^2+c^2a^2\geq 2abc$ και $c^2+a^2b^2\geq 2abc$ κατά μέλη παίρνουμε την αποδεικτέα $a^2+a^2b^2+b^2+b^2c^2+c^2+$
$+c^2a^2\geq 6abc$.

**11.** Αν $a,b,c>0$, δείξτε ότι $\frac{3}{a+b+c}<\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$.

**Απόδειξη:** $a+b<a+b+c \Leftrightarrow \frac{1}{a+b}>\frac{1}{a+b+c}$ (πρόταση 1.4.11).

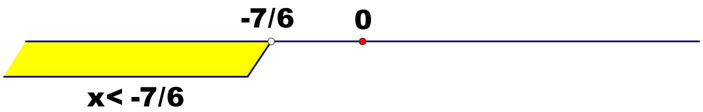
Όμοια $\frac{1}{b+c}>\frac{1}{a+b+c}$ και $\frac{1}{c+a}>\frac{1}{a+b+c}$. Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε την αποδεικτέα.

**12.** Να λύσετε τις ανισώσεις: **(i)** $\frac{2x+1}{3}-\frac{x}{6}>\frac{3x-1}{2}+2$ και **(ii)** $\frac{1}{3x+2}-\frac{1}{x+1}\geq 0$.

**Λύση: (i)** $\frac{2x+1}{3}-\frac{x}{6}>\frac{3x-1}{2}+2 \underset{\varepsilon\pi\acute{\iota}\ 6>0}{\Leftrightarrow} 6\cdot\frac{2x+1}{3}-x>6\cdot\frac{3x-1}{2}+12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(2x+1)-x>3(3x-1)+12 \Leftrightarrow 4x+2-x>9x-3+12 \Leftrightarrow 3x-9x>-2+9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6x>7 \underset{-6<0}{\Leftrightarrow} x<-\frac{7}{6}$.



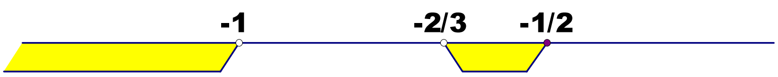

**(ii)** Κατ' αρχάς θα πρέπει $3x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -\frac{2}{3}$ και $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$.

Με τους περιορισμούς αυτούς έχουμε: $\frac{1}{3x+2}-\frac{1}{x+1}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-3x-2}{(3x+2)(x+1)}\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{2x+1}{(3x+2)(x+1)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{(3x+2)(x+1)}\leq 0$. Διατάσσουμε τις ρίζες $-\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$ και $-1$ των παραγόντων $2x+1$, $3x+2$ και $x+1$ αντίστοιχα, σε αύξουσα σειρά και παίρνουμε τον παρακάτω πίνακα: (ο κανόνας είναι: «περιττό πλήθος αρνητικών σημείων κάνει πλήν»).

| x | -∞ | | -1 | | -2/3 | | -1/2 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2x+1 | | - | | - | | - | 0 | + | |
| 3x+2 | | - | | - | | + | | + | |
| x+1 | | - | | + | | + | | + | |
| παράσταση | | - | | + | | - | | + | |

Στα σημεία $x=-1$ και $x=-\frac{2}{3}$ έχουμε φέρει διακεκομμένες γραμμές, αφού σ' αυτά δεν ορίζεται η παράσταση. Από τον πίνακα βρίσκουμε ότι η παράσταση $\frac{2x+1}{(3x+2)(x+1)}$ είναι μη θετική αν και μόνον αν $x<-1$ ή $-\frac{2}{3}<x\leq -\frac{1}{2}$.




**13.** Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{(3x+2)(x+1)}\leq 0 \\ \dfrac{12x+7}{x+2}<0 \end{cases}$

**Λύση:** Η πρώτη ανίσωση έχει λυθεί στο προηγούμενο παράδειγμα. Οι λύσεις της είναι όλοι οι αριθμοί $x$ με $x<-1$ ή $-\frac{2}{3}<x\leq -\frac{1}{2}$.

Για τη δεύτερη ανίσωση παρατηρούμε ότι πρέπει και αρκεί οι αριθμοί $12x+7$ και $x+2$ να είναι ετερόσημοι. Έχουμε τον πίνακα:

| x | -∞ | | -2 | | -7/12 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12x+7 | | - | | - | 0 | + | |
| x+2 | | - | | + | | + | |
| $\frac{12x+7}{x+2}$ | | + | | - | | + | |

Θα πρέπει λοιπόν $-2 < x < -\dfrac{7}{12}$. Οι λύσεις αυτές σε συνδυασμό με τις λύσεις της προηγούμενης ανίσωσης παριστάνονται στο ακόλουθο σχήμα:


Το μπλέ τμήμα παριστάνει τις λύσεις της $\dfrac{12x+7}{x+2} < 0$. Τα υπόλοιπα τμήματα (κίτρινο και πράσινο) είναι οι λύσεις της $\dfrac{2x+1}{(3x+2)(x+1)} \leq 0$. Τα πράσινα τμήματα είναι οι κοινές λύσεις.

Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι: $-2 < x < -1$ ή $-\dfrac{2}{3} < x < -\dfrac{7}{12}$.

## Άλυτες ασκήσεις

**1.** Να αποδείξετε τα ακόλουθα:

**(i)** Αν $a,b>0$, τότε $\dfrac{a+b}{1+a+b} < \dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b}$.

**(ii)** $3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2$, για κάθε $x,y,z \in \mathbb{R}$.

**(iii)** Αν $0<a<1$, τότε $1-a^3 > 3a(1-a)$.

**(iv)** Αν $a,b>0$ και $a \neq b$, τότε $a^4+b^5-a^4b-ab^4>0$.

**(v)** Αν $a+b+c=1$, τότε $a^2+b^2+c^2 \geq \dfrac{1}{3}$.

**2.** Αν $0<a<b$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $A=b^3-a^3$ και $B=(b-a)^3$.

**3.** Να βρείτε τις τιμές του $x$ για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις: **(i)** $\dfrac{x+5}{4} - \dfrac{x-3}{6} > \dfrac{x}{3}$ και

**(ii)** $(x+1)^2 - x - 1 \geq 2$.

Κατά την επίλυση ανισώσεων είναι όπως είδαμε χρήσιμο να επικαλούμαστε τη γεωμετρική εποπτεία. Οι λύσεις τις περισσότερες φορές, αν όχι όλες, αποτελούν **διαστήματα** του συνόλου των πραγματικών. Έτσι ορίζουμε:

### 1.4.14 Ορισμός

*Έστω* $a,b \in \mathbb{R}$. *Θέτουμε:*

***i)*** $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.


***ii)*** $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$.


***iii)*** $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$.


***iv)*** $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$.


***v)*** $(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$.


***vi)*** $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$.

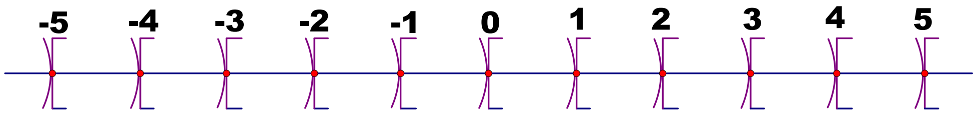

***vii)*** $(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$.


***viii)*** $(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$.


Αν $a = b$, τότε καθένα από τα διαστήματα των περιπτώσεων i), ii) και iii) είναι το κενό σύνολο. Το διάστημα $[a,a]$ είναι το μονοσύνολο $\{a\}$.

Αν $a > b$, τότε καθένα από τα διαστήματα των περιπτώσεων i), ii), iii) και iv) είναι το κενό σύνολο.

Αν παρατηρήσουμε το επόμενο σχήμα θα διαπιστώσουμε ότι η πραγματική ευθεία είναι ένωση ξένων ανά δύο διαστημάτων της μορφής $[k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Με άλλα λόγια, για κάθε πραγματικό αριθμό $x$ υπάρχει **μοναδικός** ακέραιος με την ιδιότητα $x \in [k, k+1)$, δηλαδή $k \le x < k+1$.




(Φυσικά αυτή η παρατήρηση δεν αποτελεί και μαθηματική απόδειξη του γεγονότος αυτού, η οποία, όσο και αν αυτό φαίνεται παράξενο, δεν είναι τετριμένη).

**1.4.15 Ορισμός**

*Ο ακέραιος k λέγεται* ***ακέραιο μέρος*** *του x και συμβολίζεται με* $[x]$, *δηλαδή ο* $[x]$ *είναι ο* ***μοναδικός ακέραιος*** *με την ιδιότητα* $[x] \le x < [x]+1$.

Πρακτικά, για να βρούμε το ακέραιο μέρος ενός θετικού αριθμού, παραλείπουμε τα δεκαδικά του ψηφία. Έτσι, [2,34]=2, [π]=[3,14159....]=3 κ.ο.κ. Αυτό όμως δεν ισχύει όταν θεωρούμε αρνητικούς αριθμούς. Εκεί παραλείπουμε τα δεκαδικά ψηφία, αλλά στη συνέχεια αφαιρούμε το 1. Έτσι, $[-7,593] = -8$, $[-3,76666...] = -4$ κ.ο.κ.

**1.4.16 Παραδείγματα**

**1.** Δείξτε ότι για κάθε ακέραιο $k$ ισχύει $[x+k]=[x]+k$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

**Απόδειξη:** Έχουμε $[x] \le x < [x]+1 \Leftrightarrow [x]+k \le x+k < ([x]+k)+1$. Επειδή ο ακέραιος $[x]+k$ έχει την χαρακτηριστική ιδιότητα του ακεραίου μέρους του $x+k$, έπεται ότι $[x+k]= \ =[x]+k$.

**2.** Αν $a$, $b$ είναι δύο θετικοί ακέραιοι, δείξτε ότι ο ακέραιος $\left[\frac{a}{b}\right]$ ισούται με το πηλίκο της ευκλείδειας διαίρεσης $a:b$.

**Απόδειξη:** Η ευκλείδεια διαίρεση $a:b$ μας δίνει ένα (μοναδικό) πηλίκο $\pi$ και ένα (μοναδικό) υπόλοιπο $\upsilon$ με την ιδιότητα $a = \pi b + \upsilon$, όπου $0 \le \upsilon < b$. Επομένως, $\frac{a}{b} = \pi + \frac{\upsilon}{b}$. Με βάση το προηγούμενο παράδειγμα, $\left[\frac{a}{b}\right]=\pi+\left[\frac{\upsilon}{b}\right]$. Αλλά, $0\le\frac{\upsilon}{b}<1$ και επομένως $\left[\frac{\upsilon}{b}\right]=0$. Άρα $\left[\frac{a}{b}\right]=\pi$.

### Άλυτες ασκήσεις

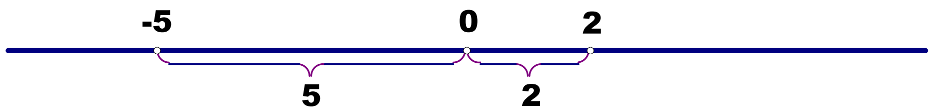
**1.** Να αποδείξετε ότι: **(i)** $x-[x]\in[0,1)$, **(ii)** $[x]+[-x]=\begin{cases}0, & \text{αν } x\in\mathbb{Z}\\ -1, & \text{αν } x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$,

**(iii)** $\left[\frac{x}{n}\right]=\left[\frac{[x]}{n}\right]$, όπου $n=1,2,\ldots$, **(iv)** $[2x]-2[x]=\begin{cases}0, & \text{αν } x-[x]<\frac{1}{2}\\ 1, & \text{αν } x-[x]\ge\frac{1}{2}\end{cases}$,

**(v)** $[2x]+[2y]\ge[x]+[x+y]+[y]$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

## 1.5 Απόλυτες τιμές

Η **απόλυτη τιμή** ενός αριθμού, στην ευθεία των πραγματικών αριθμών είναι η απόστασή του από το μηδέν.




Πιο αυστηρά, ορίζουμε:

### 1.5.1 Ορισμός

*Έστω* $x\in\mathbb{R}$. *Θέτουμε* $|x|=\begin{cases}x & \text{αν } x\ge 0,\\ -x & \text{αν } x<0\end{cases}$

*Ο αριθμός* $|x|$ *ονομάζεται* ***απόλυτη τιμή*** *του x.*

Στη συνέχεια μελετάμε τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής. Μια πρώτη παρατήρηση είναι ότι η απόλυτη τιμή $|x|$ είναι ο μεγαλύτερος (ο μη αρνητικός) από τους αριθμούς $x$ και $-x$. (Αυτοί οι αριθμοί μπορεί να είναι ίσοι αν και μόνον αν $x=0$).

### 1.5.2 Πρόταση

***(i)*** $|x|\ge 0$, *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$. *Επιπλέον, ισχύει* $|x|=0\Leftrightarrow x=0$

***(ii)*** $|x|=|-x|$, *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$.

***(iii)*** $|x|^2 = x^2$, *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

***(iv)*** $|xy| = |x||y|$, *για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}$.

***(v)*** $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, *για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}$ *με* $y \neq 0$.

***(vi)*** $x^2 = y^2 \Leftrightarrow |x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$.

**Απόδειξη:** Οι **(i)** και **(ii)** προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό 1.4.1.

**(iii)** Από τον ορισμό 1.5.1 έχουμε ότι $|x| = x$ ή $|x| = -x$. Σε κάθε περίπτωση, $|x|^2 = (\pm x)^2 =$

$= x^2$.

**(iv)** Η απόδειξη βασίζεται στο γεγονός ότι αν $a$, $b$ είναι δύο μη αρνητικοί αριθμοί, τότε ισχύει $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$. [Αρκεί να αποδείξουμε το "$\Rightarrow$". Αν $a > b$, τότε από την πρόταση 1.4.13 παίρνουμε $a^2 > b^2$, άτοπο. Αν $a < b$, τότε από την πρόταση 1.4.13 παίρνουμε $a^2 < b^2$, άτοπο και πάλι]. Οι αριθμοί $|xy|$ και $|x||y|$ είναι προφανώς μη αρνητικοί.
Ακόμη, $|xy|^2 \underset{(iii)}{=} (xy)^2 = x^2y^2 \underset{(iii)}{=} |x|^2|y|^2 = (|x||y|)^2$ και επομένως $|xy| = |x||y|$.

**(v)** $\left|\dfrac{x}{y}\right|^2 \underset{(iii)}{=} \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 = \dfrac{x^2}{y^2} \underset{(iii)}{=} \dfrac{|x|^2}{|y|^2} = \left(\dfrac{|x|}{|y|}\right)^2$ και άρα $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

**(vi)** $x^2 = y^2 \underset{(ii)}{\Leftrightarrow} |x|^2 = |y|^2 \Leftrightarrow |x| = |y|$. Ακόμη, $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = y$ ή $x = -y$. ■

Η επόμενη ανισότητα είναι ιδιαίτερα χρήσιμη:

### 1.5.2 Πρόταση (τριγωνική ανισότητα)

*Για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}$ *ισχύει:* $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$.

**Απόδειξη:** Έχουμε $|x+y| \leq |x| + |y| \Leftrightarrow |x+y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 \Leftrightarrow (x+y)^2 \leq |x|^2 + |y|^2 +$
$+ 2|x||y| \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \leq x^2 + y^2 + 2|xy| \Leftrightarrow xy \leq |xy|$. Η τελευταία σχέση προφανώς ισχύει.

Ακόμη, $|x| - |y| = |x + y - y| - |y| \leq |x+y| + |-y| - |y| \leq |x+y|$, γιατί $|-y| = |y|$.

Παρόμοια, $|y| - |x| = |x + y - x| - |x| \leq |x+y| + |-x| - |x| \leq |x+y|$.

Εφόσον η απόλυτη τιμή $|x+y|$ είναι μεγαλύτερη ή ίση από κάθε έναν από τους αντίθετους αριθμούς $|x| - |y|$ και $|y| - |x|$, θα είναι μεγαλύτερη ή ίση από την απόλυτη τιμή τους $||x| - |y||$. ■

**Σχόλιο:** Η ονομασία «τριγωνική» γίνεται φανερή στις δύο ή τρεις διαστάσεις, όπου η ανισότητα αυτή αναφέρεται στα μήκη διανυσμάτων τα οποία σχηματίζουν πλευρές τριγώνου.

Αν $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, συμβολίζουμε με $\max A$ το μεγαλύτερο στοιχείο του $A$ και με $\min A$ το μικρότερο στοιχείο αυτού.

**1.5.3 Πρόταση**

*Ισχύουν τα εξής:* ***(i)*** $\max\{x,y\}=\dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ *και* ***(ii)*** $\min\{x,y\}=\dfrac{x+y-|x-y|}{2}$.

**Απόδειξη:** **(i)** Έστω $x\geq y$. Τότε $\max\{x,y\}=x$. Ακόμη, $x-y\geq 0$ και άρα $|x-y|=x-y$. Επομένως, $\dfrac{x+y+|x-y|}{2}=\dfrac{x+y+x-y}{2}=x$ δηλαδή, $\max\{x,y\}=\dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ σ' αυτή την περίπτωση.

Έστω $x<y$. Τότε $\max\{x,y\}=y$. Ακόμη, $x-y<0$ και άρα $|x-y|=y-x$. Επομένως, $\dfrac{x+y+|x-y|}{2}=\dfrac{x+y+y-x}{2}=y$ δηλαδή, $\max\{x,y\}=\dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ και σ' αυτή την περίπτωση.

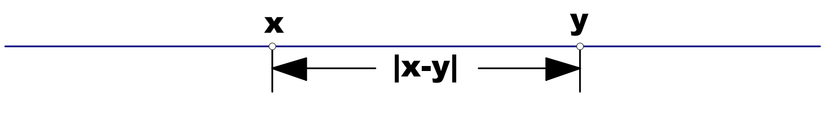
**(ii)** Έστω $x\geq y$. Τότε $\min\{x,y\}=y$. Επομένως, $\dfrac{x+y-|x-y|}{2}=\dfrac{x+y-(x-y)}{2}=y$ δηλαδή, $\min\{x,y\}=\dfrac{x+y-|x-y|}{2}$ σ' αυτή την περίπτωση. ■

Έστω $x<y$. Τότε $\min\{x,y\}=x$. Επομένως, $\dfrac{x+y-|x-y|}{2}=\dfrac{x+y-(y-x)}{2}=x$ δηλαδή, $\min\{x,y\}=\dfrac{x+y-|x-y|}{2}$ και σ' αυτή την περίπτωση.

**1.5.4 Ορισμός**

*Έστω* $x,y\in\mathbb{R}$. *Η* ***απόσταση*** *των αριθμών x και y στην πραγματική ευθεία είναι η διαφορά του μικρότερου από τον μεγαλύτερο.*

Αν χρησιμοποιήσουμε τους τύπους της πρότασης 1.5.3 θα βρούμε ότι η απόσταση μεταξύ των $x$ και $y$ είναι ίση με $\max\{x,y\}-\min\{x,y\}=\dfrac{x+y+|x-y|}{2}-\dfrac{x+y-|x-y|}{2}=|x-y|$.



Η επόμενη πρόταση είναι πολύ σημαντική για τα επόμενα κεφάλαια.

### 1.5.5 Πρόταση

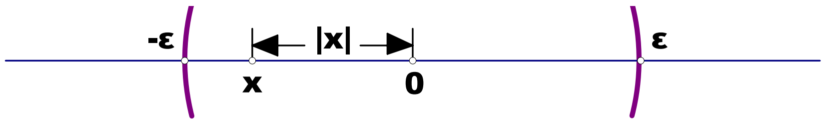
*Έστω* $\varepsilon > 0$. *Τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:*

***(i)*** $|x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$ *και*

***(ii)*** $|x| > \varepsilon \Leftrightarrow x > \varepsilon$ ή $x < -\varepsilon$.

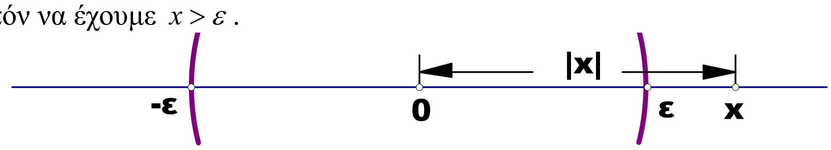
**Απόδειξη: (i)** $|x| < \varepsilon \Leftrightarrow |x|^2 < \varepsilon^2 \Leftrightarrow x^2 < \varepsilon^2 \Leftrightarrow 0 < \varepsilon^2 - x^2 \Leftrightarrow 0 < (\varepsilon - x)(\varepsilon + x)$. Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι οι αριθμοί $\varepsilon - x$ και $\varepsilon + x$ είναι ομόσημοι.

Αν και οι δύο ήσαν αρνητικοί, τότε $\begin{cases} \varepsilon - x < 0 \\ \varepsilon + x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon < x \\ x < -\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \varepsilon < -\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon < 0$, άτοπο. Άρα $\begin{cases} \varepsilon - x > 0 \\ \varepsilon + x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$.

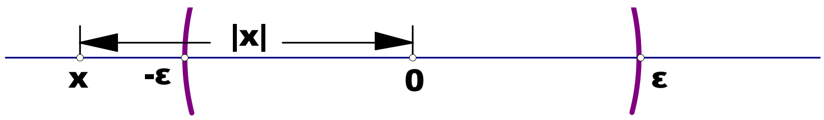



**(ii)** $|x| > \varepsilon \Leftrightarrow |x|^2 > \varepsilon^2 \Leftrightarrow x^2 > \varepsilon^2 \Leftrightarrow 0 < x^2 - \varepsilon^2 \Leftrightarrow 0 < (x - \varepsilon)(x + \varepsilon)$. Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι οι αριθμοί $x - \varepsilon$ και $x + \varepsilon$ είναι ομόσημοι. Επομένως θα είναι και οι δύο θετικοί ή και οι δύο αρνητικοί.

Για να είναι και οι δύο θετικοί αρκεί να είναι θετικός ο μικρότερος, δηλαδή ο $x - \varepsilon$. Θα πρέπει λοιπόν να έχουμε $x > \varepsilon$.




Για να είναι και οι δύο αρνητικοί αρκεί να είναι αρνητικός ο μεγαλύτερος, δηλαδή ο $x + \varepsilon$. Θα πρέπει λοιπόν να έχουμε $x < -\varepsilon$.




■

### 1.5.6 Παραδείγματα

**1.** Να λυθούν οι εξισώσεις: **(i)** $|x - 4| = |3x - 2|$ και **(ii)** $\frac{2|x+1|}{3} + \frac{3|x+1| - 1}{2} = |x+1|$.

**Λύση: (i)** $|x-4|=|3x-2| \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=3x-2 \\ \text{ή} \\ x-4=-3x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \text{ή} \\ x=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

**(ii)** Λύνουμε την εξίσωση θεωρώντας ως άγνωστο το $|x+1|$.

Έχουμε: $\dfrac{2|x+1|}{3}+\dfrac{3|x+1|-1}{2}=|x+1| \Leftrightarrow 4|x+1|+9|x+1|-3=6|x+1| \Leftrightarrow 7|x+1|=3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |x+1|=\frac{3}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=\dfrac{3}{7} \\ \text{ή} \\ x+1=-\dfrac{3}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{4}{7} \\ \text{ή} \\ x=-\dfrac{10}{7} \end{cases}$$

**2.** Αν $|x|\leq 1$, $|y|\leq 5$ και $|z|\leq 4$, να βρεθεί το διάστημα στο οποίο κείται η τιμή της παράστασης $A=2x+3y+5z$.

**Λύση:** Έχουμε $|x|\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$. Όμοια, $-5\leq y\leq 5$ και $-4\leq z\leq 4$. Επομένως, $-2\leq 2x\leq 2$, $-15\leq 3y\leq 15$ και $-20\leq 5z\leq 20$. Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε $-2-15-20\leq A=2x+3y+5z\leq 2+15+20 \Leftrightarrow -37\leq A\leq 37$. Το ζητούμενο διάστημα είναι το $[-37,37]$.

**3.** Να λυθούν οι ανισώσεις: **(i)** $\dfrac{3|x-2|-1}{2}<\dfrac{2|x-2|+2}{3}$ και **(ii)** $\dfrac{5|x|-3}{7}-\dfrac{3|x|+2}{5}\geq 0$.

**Λύση: (i)** $\dfrac{3|x-2|-1}{2}<\dfrac{2|x-2|+2}{3} \Leftrightarrow 9|x-2|-3<4|x-2|+4 \Leftrightarrow 5|x-2|<7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x-2|<\dfrac{7}{5} \Leftrightarrow -\dfrac{7}{5}<x-2<\dfrac{7}{5} \Leftrightarrow \dfrac{3}{5}<x<\dfrac{17}{5}$ ή $x\in\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{17}{5}\right)$.

**(ii)** $\dfrac{5|x|-3}{7}-\dfrac{3|x|+2}{5}\geq 0 \Leftrightarrow 25|x|-15-21|x|-17\geq 0 \Leftrightarrow 4|x|\geq 32 \Leftrightarrow |x|\geq 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 8 \\ \text{ή} \\ x\leq -8 \end{cases}$

**4.** Έστω $\left|\dfrac{x+4}{x+1}\right|=2$. Να βρεθεί το $|x|$.

**Λύση:** Θα πρέπει $x\neq -1$. Έχουμε:

$$\left|\frac{x+4}{x+1}\right|=2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+4}{x+1}=2 \\ \text{ή} \\ \dfrac{x+4}{x+1}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4=2x+2 \\ \text{ή} \\ x+4=-2x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \text{ή} \\ x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow |x|=2.$$

**5.** Να δειχθούν οι ισοδυναμίες: **(i)** $|a+b|>|a-b| \Leftrightarrow ab>0$ και **(ii)** $|a+b|<|a-b| \Leftrightarrow ab<0$.

**Απόδειξη:** **(i)** $|a+b|>|a-b| \Leftrightarrow |a+b|^2>|a-b|^2 \Leftrightarrow (a+b)^2>(a-b)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab>a^2+b^2-2ab \Leftrightarrow 4ab>0 \Leftrightarrow ab>0$. Η απόδειξη της **(ii)** είναι παρόμοια.

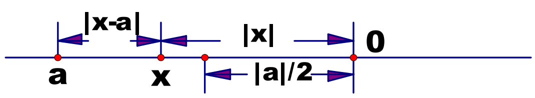
**6.** Αν $|a|>1$ και $b=\dfrac{a}{1-|a|}$, να δειχθεί ότι $a=\dfrac{b}{1-|b|}$.

**Απόδειξη:** Οι αριθμοί $a$ και $b$ είναι ετερόσημοι γιατί $ab=\dfrac{a^2}{1-|a|}<0$ (αφού $1-|a|<0$ και $a^2>0$). Επίσης, $|b|=\dfrac{|a|}{1-|a|}\neq 1 \Leftrightarrow |a|\neq 1-|a| \Leftrightarrow |a|\neq \dfrac{1}{2}$ (γιατί $|a|>1$).

Ακόμη, $b=\dfrac{a}{1-|a|} \Rightarrow |b|=\dfrac{|a|}{|a|-1} \Leftrightarrow |ab|-|b|=|a| \Leftrightarrow |ab|-|a|=|b| \Leftrightarrow |a|(|b|-1)=|b| \Leftrightarrow$

$\underset{|b|\neq 1}{\Leftrightarrow} |a|=\dfrac{|b|}{|b|-1}$. Από τη σχέση $|a|=\dfrac{|b|}{|b|-1}$ προκύπτει ότι $|b|>1$ (γιατί $|a|>0$ και $|b|>0$) και, επειδή οι $a$ και $b$ είναι ετερόσημοι, $a=-\dfrac{b}{|b|-1}=\dfrac{b}{1-|b|}$.

**7.** Αν $a\neq 0$ και $|x-a|<\dfrac{|a|}{2}$, δείξτε ότι $|x|>\dfrac{|a|}{2}$.




**Απόδειξη:** Έχουμε $|a|-|x|\leq ||a|-|x|| \underset{\text{πρόταση 1.5.2}}{\leq} |a-x|<\dfrac{|a|}{2}$. Από τη σχέση $|a|-|x|<\dfrac{|a|}{2}$ παίρνουμε $|x|>|a|-\dfrac{|a|}{2}=\dfrac{|a|}{2}$.

## Άλυτες ασκήσεις

1. Αν $|a|<1$ και $|b|<1$, να δειχθεί ότι $\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1$.

2. Να αποδείξετε ότι $|a+b+c|+|a-b+c|+|-a+b+c|\geq|a|+|b|+|c|$.

3. Αν $ab\neq 0$, να δειχθεί η ισοδυναμία $\dfrac{\big|a|b|+b|a|\big|}{|a||b|}=2 \Leftrightarrow ab>0$.

4. Αν $b(1+|a|)=1+|a|+a$, να δείξετε ότι $|b-1|<1$ και $a(1-|b-1|)=b-1$.

5. Να λύσετε τις ανισώσεις: **(i)** $\dfrac{-2|x-2|+3}{5}-\dfrac{|x-2|}{2}\geq\dfrac{1+|x-2|}{4}$ και **(ii)** $\dfrac{|x+1|-1}{3}+\dfrac{1-|x+1|}{2}<\dfrac{|x+1|}{12}$.

## 1.6 Ρίζες

Ξεκινάμε με μία πρόταση:

### 1.6.1 Πρόταση

*Έστω* $a \geq 0$ *και n θετικός ακέραιος. Τότε υπάρχει* ***μοναδικός μη αρνητικός αριθμός*** *x με την ιδιότητα:* $x^n = a$.

*Ο μοναδικός αυτός αριθμός x ονομάζεται* ***n-στή ρίζα*** *του a και συμβολίζεται με* $\sqrt[n]{a}$.

**Απόδειξη:** Η απόδειξη της ύπαρξης της *n*-στής ρίζας απαιτεί μια βαθύτερη γνώση του συνόλου των πραγματικών αριθμών και γι' αυτό αναβάλλεται για το κεφάλαιο 5.

Θα αποδείξουμε τώρα την μοναδικότητα. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο διαφορετικοί μη αρνητικοί αριθμοί $x_1$ και $x_2$ με $x_1^n = x_2^n = a$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_1 < x_2$. Τότε, από την πρόταση 1.4.13 παίρνουμε $x_1^n < x_2^n$, δηλαδή $a < a$, άτοπο. ■

Όσον αφορά την ορολογία που θα χρησιμοποιήσουμε, το *n* λέγεται **τάξη** της ρίζας, το σύμβολο $\sqrt{\ }$ **ριζικό** και το *a* **υπόρριζο**. Η τάξη της τετραγωνικής ρίζας ($n = 2$) δεν αναγράφεται. Συνήθως το σύμβολο $\sqrt[1]{a} = a$ δεν χρησιμοποιείται.

Ας δούμε τώρα μερικές ιδιότητες των ριζών.

### 1.6.2 Πρόταση

*Ισχύουν τα ακόλουθα:*

***(i)*** $\sqrt[n]{1} = 1$, *για κάθε* $n = 1, 2, \ldots$

***(ii)*** $\sqrt[n]{a^n} = a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n$, *για κάθε* $a \geq 0$.

***(iii)*** $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$, *για κάθε* $a, b \geq 0$. *Ειδικότερα* $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$, *για κάθε ακέραιο k.*

***(iv)*** $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, *για κάθε* $a \geq 0$ *και* $b > 0$.

***(v)*** $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$, *για κάθε* $a \geq 0$.

***(vi)*** $\sqrt[nr]{a^{mr}} = \sqrt[n]{a^m}$, *για κάθε* $a \geq 0$.

**Απόδειξη:** Τα **(i)** και **(ii)** προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό της *n*-στής ρίζας. Για το **(iii)** παρατηρούμε πρώτα ότι ο αριθμός $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ είναι μη αρνητικός. Ακόμη, $\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = a \cdot b$. Από τον ορισμό της *n*-στής ρίζας του $a \cdot b$ προκύπτει ότι $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

Ακόμη, $\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^k\right]^n = \left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right]^k = a^k$ και, από τον ορισμό της $\sqrt[n]{a^k}$, προκύπτει ότι $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$.

**(iv)** Παρατηρούμε ότι $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \geq 0$. Ακόμη, $\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \dfrac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \dfrac{a}{b}$. Από τον ορισμό της *n*-στής ρίζας του $\dfrac{a}{b}$ προκύπτει ότι $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$.

**(v)** Παρατηρούμε ότι $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} \geq 0$. Ακόμη, $\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{nm} = \left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^n\right]^m = \left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a$. Από τον ορισμό της *nm*-στής ρίζας του *a* προκύπτει ότι $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$.

**(vi)** $\sqrt[nr]{a^{mr}} = \sqrt[n]{a^m} \Leftrightarrow \left(\sqrt[nr]{a^{mr}}\right)^{nr} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nr} \Leftrightarrow a^{mr} = \left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right]^r \Leftrightarrow a^{mr} = \left(a^m\right)^r \Leftrightarrow a^{mr} = a^{mr}$,

που ισχύει. ■

**Σχόλια:** **1.** Από τις προηγούμενες ιδιότητες μπορούμε να συμπεράνουμε και άλλες. Έτσι, ισχύει $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$, για κάθε $a, b \geq 0$. Δηλαδή, μπορούμε να βάλουμε μέσα στη ρίζα έναν μη αρνητικό παράγοντα, υψώνοντάς τον στην τάξη της ρίζας. Πράγματι, $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$.

**2.** Αν η τάξη της ρίζας είναι άρτια και ο *a* είναι αρνητικός, είναι λάθος να γράψουμε $\sqrt[n]{a^n} = a$. Π.χ. είναι λάθος να γράψουμε $\sqrt[4]{(-2)^4} = -2$, γιατί η ρίζα είναι εξ ορισμού μη αρνητική. Το σωστό είναι $\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2 = |-2|$, δηλαδή, αν ο *a* είναι αρνητικός πρέπει να γράφουμε $\sqrt[n]{a^n} = |a|$. Ειδικότερα, $\sqrt{a^2} = |a|$.

### 1.6.3 Παραδείγματα

**1.** Θα αποδείξουμε τη γενίκευση της τριγωνικής ανισότητας σε περισσότερες διαστάσεις. Συγκεκριμένα ισχύει:

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2} + \sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2},$$

για κάθε $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.

**Παρατήρηση:** Αν $n = 1$, τότε $\sqrt{(a_1+b_1)^2} \leq \sqrt{a_1^2} + \sqrt{b_1^2} \Leftrightarrow |a_1+b_1| \leq |a_1| + |b_1|$ είναι η γνωστή ανισότητα της πρότασης 1.5.2.

**Απόδειξη:** Έχουμε

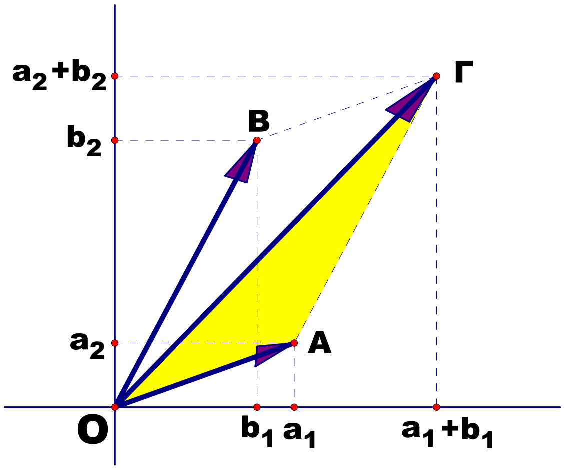
$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2} + \sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2 \leq \left(\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2} + \sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a_1^2+b_1^2+2a_1b_1)+(a_2^2+b_2^2+2a_2b_2)+\cdots+(a_n^2+b_n^2+2a_nb_n)\le$$
$$\le a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2+2\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cancel{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}+\cancel{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}+2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)\le \cancel{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}+$$
$$+\cancel{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}+2\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\le\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$$

Η τελευταία σχέση ισχύει γιατί, σύμφωνα με την ανισότητα Cauchy-Schwarz, έχουμε
$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\le|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n|\le\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}.$$

Είναι ενδιαφέρον να μελετήσουμε τη γεωμετρική σημασία της τριγωνικής ανισότητας για $n=2$, δηλαδή της ανισότητας $\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2}\le\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}$.




Στο παραπάνω σχήμα τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ έχουν συντεταγμένες $(a_1,a_2)$ και $(b_1,b_2)$ αντίστοιχα. Το άθροισμά τους $\overrightarrow{O\Gamma}$ έχει συντεταγμένες $(a_1+b_1,a_2+b_2)$. Τα μήκη των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}$ είναι $\sqrt{a_1^2+a_2^2}$, $\sqrt{b_1^2+b_2^2}$ και $\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2}$ αντίστοιχα. Από το τρίγωνο ΟΑΓ παίρνουμε $\|\overrightarrow{O\Gamma}\|\le\|\overrightarrow{OA}\|+\|\overrightarrow{A\Gamma}\|=\|\overrightarrow{OA}\|+\|\overrightarrow{OB}\|$, δηλαδή $\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2}\le\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}$.

**2.** Να γραφεί η παράσταση $\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{4\sqrt[4]{8}}}{\sqrt[3]{16}}}}{\sqrt{2}}$ με τη χρήση ενός μόνον ριζικού.

**Λύση:** $$\frac{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{4\sqrt[4]{8}}}{\sqrt[3]{16}}}}{\sqrt2}=\frac{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\sqrt[4]{4^4\cdot8}}}{\sqrt[3]{16}}}}{\sqrt2}=\frac{\sqrt[3]{\frac{\sqrt[8]{4^4\cdot8}}{\sqrt[3]{16}}}}{\sqrt2}=\frac{\sqrt[3]{\frac{\sqrt[8]{(2^2)^4\cdot2^3}}{\sqrt[3]{2^4}}}}{\sqrt2}=\frac{\sqrt[3]{\frac{\sqrt[8]{2^8\cdot2^3}}{\sqrt[3]{2^4}}}}{\sqrt2}=\frac{\sqrt[3]{\frac{\sqrt[8]{2^{11}}}{\sqrt[3]{2^4}}}}{\sqrt2}=$$
$$=\frac{\sqrt[3]{\frac{\sqrt[24]{2^{33}}}{\sqrt[24]{2^{32}}}}}{\sqrt2}=\frac{\sqrt[3]{\sqrt[24]{\frac{2^{33}}{2^{32}}}}}{\sqrt2}=\frac{\sqrt[3]{\sqrt[24]{2}}}{\sqrt2}=\frac{\sqrt[3\cdot24]{2}}{\sqrt2}=\frac{\sqrt[72]{2}}{\sqrt2}=\frac{\sqrt[72]{2}}{\sqrt[72]{2^{36}}}=\sqrt[72]{\frac{2}{2^{36}}}=\sqrt[72]{\frac{1}{2^{35}}}=\frac{1}{\sqrt[72]{2^{35}}}.$$

**3.** Να απλοποιηθεί η παράσταση: $\sqrt{54a^3}-3\sqrt{24a^3}+7\sqrt{96a^3}$ .

**Λύση:** $\sqrt{54a^3}-3\sqrt{24a^3}+7\sqrt{96a^3}=\sqrt{2\cdot 3^3 a^3}-3\sqrt{3\cdot 2^3 a^3}+7\sqrt{2^5\cdot 3a^3}=$

$=\sqrt{3^2\cdot 6a^3}-3\sqrt{2^2\cdot 6a^3}+7\sqrt{2^4\cdot 6a^3}=3\sqrt{6a^3}-6\sqrt{6a^3}+7\cdot 2^2\sqrt{6a^3}=$

$=-3\sqrt{6a^3}+28\sqrt{6a^3}=25\sqrt{6a^3}$

**4.** Να γραφούν οι ακόλουθες παραστάσεις χωρίς επάλληλα ριζικά:

**(i)** $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ και **(ii)** $\sqrt{2}\cdot\sqrt{11-\sqrt{110}}$ .

**Λύση:** **(i)** $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3+1-2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2-2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\sqrt{3}-1$, γιατί $\sqrt{3}-1>0$ .

**(ii)** $\sqrt{2}\cdot\sqrt{11-\sqrt{110}}=\sqrt{22-2\sqrt{110}}=\sqrt{11+10-2\sqrt{11}\cdot\sqrt{10}}=$

$=\sqrt{\left(\sqrt{11}\right)^2+\left(\sqrt{10}\right)^2-2\sqrt{11}\cdot\sqrt{10}}=\sqrt{\left(\sqrt{11}-\sqrt{10}\right)^2}=\sqrt{11}-\sqrt{10}$ .

**5.** Να μετατρέψετε τα ακόλουθα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

**(i)** $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}$, **(ii)** $\dfrac{5}{\sqrt{3}+1}$ και **(iii)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$ .

**Λύση:** **(i)** $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\left(\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ .

**(ii)** $\dfrac{5}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{5\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\dfrac{5\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1}=\dfrac{5\left(\sqrt{3}-1\right)}{3-1}=\dfrac{5\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$ .

**(iii)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\dfrac{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\left(\sqrt[3]{3}\right)^2+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right)}=\dfrac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}=\dfrac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{3-2}=$

$=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$ .

**6.** Δείξτε ότι $\left(\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)^{13}+\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)^{13}<1$.

**Απόδειξη:** Παρατηρούμε ότι $\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5}=1$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\left(\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)^{13}<\dfrac{2}{5}$ και $\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)^{13}<\dfrac{3}{5}$.

Πράγματι, $\left(\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)^{13}<\dfrac{2}{5}\Leftrightarrow\left(\dfrac{2}{5}\right)^{13}<\left(\dfrac{2}{5}\right)^{2}\Leftrightarrow\left(\dfrac{2}{5}\right)^{11}<1\Leftrightarrow 2^{11}<5^{11}$, που ισχύει γιατί $2<5$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $\left(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)^{13}<\dfrac{3}{5}$.

Γνωρίζουμε ότι οι ρητοί αριθμοί είναι τα κλάσματα με αριθμητή και παρονομαστή ακεραίους. Ένα τέτοιο κλάσμα μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχει θετικό παρονομαστή, αφού μπορούμε να αλλάξουμε τα πρόσημα και στους δύο όρους του, χωρίς το κλάσμα να αλλάξει.

**1.6.4 Ορισμός**

*Έστω* $x=\dfrac{m}{n}$ *ένας ρητός αριθμός με* $m,n\in\mathbb{Z}$ *και* $n>0$. *Θέτουμε* $a^x=\sqrt[n]{a^m}$ *, όπου* $a>0$.

Ο ορισμός που δώσαμε φαίνεται να εξαρτάται από τη γραφή του ρητού ως πηλίκο συγκεκριμένων ακεραίων. Τα πράγματα (ευτυχώς) δεν είναι έτσι. Αν λοιπόν $x=\dfrac{m'}{n'}$ είναι μια άλλη γραφή του ρητού $x$ με $m',n'\in\mathbb{Z}$ και $n'>0$, τότε $\dfrac{m'}{n'}=\dfrac{m}{n}\Leftrightarrow nm'=n'm$.

Έτσι, $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{n'}=\sqrt[n]{\left(a^m\right)^{n'}}=\sqrt[n]{a^{mn'}}\underset{mn'=m'n}{=}\sqrt[n]{a^{m'n}}=\sqrt[n]{\left(a^{m'}\right)^{n}}=a^{m'}$. Από τον ορισμό της $n'$-στης ρίζας του $a^{m'}$ προκύπτει ότι $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n']{a^{m'}}$.

Ο ορισμός που δώσαμε γενικεύει την γνωστή έννοια της δύναμης με εκθέτη ακέραιο. Πράγματι, αν $x\in\mathbb{Z}$, τότε το $x$ γράφεται σαν κλάσμα ως $\dfrac{x}{1}$ και επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό που μόλις προηγουμένως δώσαμε, η τιμή της δύναμης θα είναι ίση με $\sqrt[1]{a^x}=a^x$, δηλαδή με τη γνωστή δύναμη με εκθέτη το $x$.

Οι γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων γενικεύονται και στην περίπτωση που έχουμε ρητό εκθέτη.

**1.6.5 Πρόταση**

*Στα επόμενα υποθέτουμε ότι οι αριθμοί x και y είναι ρητοί.*

*Ισχύουν τα ακόλουθα:*

***(i)*** $a^0=1$*, για κάθε* $a>0$.

***(ii)*** $a^{x+y}=a^xa^y$*, για κάθε* $a>0$.

***(iii)*** $a^{x-y}=\dfrac{a^x}{a^y}$*, για κάθε* $a>0$*.Ειδικότερα* $a^{-y}=\dfrac{1}{a^y}$.

***(iv)*** $\left(a^x\right)^y=a^{xy}$*, για κάθε* $a>0$.

***(v)*** $a^xb^x=(ab)^x$*, για κάθε* $a,b>0$.

***(vi)*** $\dfrac{a^x}{b^x}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x$*, για κάθε* $a,b>0$.

**Απόδειξη:** **(i)** Προφανής. **(ii)** Έστω $x=\dfrac{m}{n}$ και $y=\dfrac{s}{t}$, όπου $m,n,s,t\in\mathbb{Z}$ και $n,t>0$. Έχουμε

$$a^x a^y = a^{m/n}a^{s/t} = \sqrt[n]{a^m}\,\sqrt[t]{a^s} \underset{\text{πρόταση 1.6.2 (vi)}}{=} \sqrt[nt]{a^{mt}}\,\sqrt[nt]{a^{ns}} = \sqrt[nt]{a^{mt}a^{ns}} = \sqrt[nt]{a^{mt+ns}} = a^{(mt+ns)/nt} =$$

$$= a^{m/n+s/t} = a^{x+y}.$$

.**(ii)** Έχουμε

$$\frac{a^x}{a^y}=\frac{a^{m/n}}{a^{s/t}}=\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[t]{a^s}} \underset{\text{πρόταση 1.6.2 (vi)}}{=} \frac{\sqrt[nt]{a^{mt}}}{\sqrt[nt]{a^{ns}}}=\sqrt[nt]{\frac{a^{mt}}{a^{ns}}}=\sqrt[nt]{a^{mt-ns}}=a^{(mt-ns)/nt}=a^{m/n-s/t}=a^{x-y}.$$

**(iii)** Έχουμε

$$\left(a^x\right)^y=\left(a^{m/n}\right)^{s/t}=\sqrt[t]{\left(a^{m/n}\right)^s}=\sqrt[t]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^s}=\sqrt[t]{\sqrt[n]{a^{ms}}}=\sqrt[nt]{a^{ms}}=a^{ms/nt}=a^{(m/n)(s/t)}=a^{xy}.$$

**(iv)** Έχουμε $a^xb^x=a^{m/n}b^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}\,\sqrt[n]{b^m}=\sqrt[n]{a^mb^m}=\sqrt[n]{(ab)^m}=(ab)^{m/n}=(ab)^x$.

**(v)** Έχουμε $\dfrac{a^x}{b^x}=\dfrac{a^{m/n}}{b^{m/n}}=\dfrac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}}=\sqrt[n]{\dfrac{a^m}{b^m}}=\sqrt[n]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^m}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{m/n}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x$. ■

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τις λεγόμενες **διωνυμικές** εξισώσεις, δηλαδή με εξισώσεις της μορφής $x^n=a$, όπου $a\in\mathbb{R}$ και $n$ θετικός ακέραιος. Προφανώς, αν $a=0$ η εξίσωση αυτή έχει μόνο τη μηδενική ρίζα. Έτσι υποθέτουμε ότι $a\neq 0$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

**(i)** $a>0$. Από τη σχέση $x^n=a$ παίρνουμε τη σχέση $|x|^n=a$. Επειδή $|x|>0$, από τη μοναδικότητα της $n$-στής ρίζας του $a$ προκύπτει ότι $|x|=\sqrt[n]{a}$. Επομένως $x=\pm\sqrt[n]{a}$.

Έχουμε δύο υποπεριπτώσεις:

**(iα)** ***n*=2*r*, άρτιος**. Τότε $\left(\pm\sqrt[n]{a}\right)^n=\left(\pm\sqrt[n]{a}\right)^{2r}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^{2r}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$, δηλαδή και οι δύο ρίζες $x=\sqrt[n]{a}$ και $x=-\sqrt[n]{a}$ είναι δεκτές.

**(iβ)** ***n*=2*r*+1, περιττός**. Τότε $\left(-\sqrt[n]{a}\right)^n=\left(-\sqrt[n]{a}\right)^{2r+1}=-\left(\sqrt[n]{a}\right)^{2r+1}=-\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=-a$ και επομένως η $x=-\sqrt[n]{a}$ δεν είναι δεκτή. Η μοναδική λοιπόν ρίζα της $x^n=a$ είναι, στην περίπτωση αυτή η $x=\sqrt[n]{a}$.

**(ii)** $a<0$. Από τη σχέση $x^n=a$ παίρνουμε τη σχέση $|x|^n=|a|$. Επειδή $|x|>0$, από τη μοναδικότητα της $n$-στής ρίζας του $|a|$ προκύπτει ότι $|x|=\sqrt[n]{|a|}$. Επομένως $x=\pm\sqrt[n]{|a|}$.

Έχουμε δύο υποπεριπτώσεις:

**(iiα)** ***n*=2*r*, άρτιος**. Τότε $x^n\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και επομένως, η εξίσωση $x^n=a$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$.

**(iiβ)** ***n*=2*r*+1, περιττός**. Η θετική λύση $x=\sqrt[n]{|a|}$ απορρίπτεται. Ακόμη, $\left(-\sqrt[n]{|a|}\right)^n=\left(-\sqrt[n]{|a|}\right)^{2r+1}=-\left(\sqrt[n]{|a|}\right)^{2r+1}=-\left(\sqrt[n]{|a|}\right)^n=-|a|=a$ και επομένως η μόνη δεκτή λύση είναι η $x=-\sqrt[n]{|a|}$.

**1.6.6 Παράδειγμα**

Να λυθούν στο $\mathbb{R}$ οι διωνυμικές εξισώσεις: **(i)** $x^3+8=0$, **(ii)** $x^4-16=0$, **(iii)** $x^3-27=0$ και **(iv)** $x^2+25=0$.

**Λύση: (i)** $x^3+8=0 \Leftrightarrow x^3=-8 \Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{|-8|}=-2$, **(ii)** $x^4-16=0 \Leftrightarrow x^4=16 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt[4]{16}=$ $=\pm 2$, **(iii)** $x^3-27=0 \Leftrightarrow x^3=27 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{27}=3$ και **(iv)** $x^2+25=0 \Leftrightarrow x^2=-25<0$ και η εξίσωση αυτή δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.

### Άλυτες ασκήσεις

**1.** Να υπολογιστούν οι ακόλουθες παραστάσεις: **(i)** $\sqrt{18}\cdot 3\cdot\sqrt{8}$, **(ii)** $\sqrt[4]{24}\cdot\sqrt[4]{48}\cdot\sqrt[4]{18}$, **(iii)** $\sqrt{a}\cdot\sqrt[5]{a^3}\cdot\sqrt[10]{a^4}$, $a>0$.

**2.** Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις: **(i)** $\sqrt{\sqrt[6]{a^2}}$, $a>0$, **(ii)** $\sqrt[3]{\frac{1}{3}x\sqrt{\frac{x}{3}}}$, $x>0$, **(iii)** $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}\sqrt[4]{\frac{b^3}{a^3}}}}$, $a,b>0$.

**3.** Να μετατραπούν τα ακόλουθα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή: **(i)** $\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$, **(ii)** $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$, **(iii)** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$, **(iv)** $\frac{5}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$, **(v)** $\frac{11}{\sqrt[3]{4}-\sqrt{3}}$.

**4.** Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις: **(i)** $\frac{a-b}{a^{3/4}+a^{1/2}b^{1/4}}\cdot\frac{a^{1/2}b^{1/4}+a^{1/4}b^{1/2}}{a^{1/2}+b^{1/2}}$, $a,b>0$, **(ii)** $\frac{a^{1/2}-2a^{1/4}+1}{a^{1/4}-2a^{1/8}+1}$, $a>0$ και $a\neq 1$.

## 1.7 Το τριώνυμο ax²+bx+c, a≠0

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις, δηλαδή με τις πολυωνυμικές εξισώσεις της μορφής $ax^2+bx+c=0$, όπου $a\neq 0$.

Θα ξεκινήσουμε μετασχηματίζοντας το τριώνυμο $ax^2+bx+c$ σε μια χρήσιμη μορφή που θα μας επιτρέψει να υπολογίσουμε τις ρίζες του. Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή ως **συμπλήρωμα τετραγώνου** και είναι επίσης ιδιαίτερα χρήσιμη στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων ρητών συναρτήσεων, όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο.

Έχουμε λοιπόν: $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)$.

Παρατηρούμε ότι οι τρεις πρώτοι όροι της παρένθεσης αποτελούν το ανάπτυγμα του

τετραγώνου $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$. Επομένως έχουμε: $ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=$
$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$.

Η ποσότητα $\Delta=b^2-4ac$ λέγεται **διακρίνουσα** του τριωνύμου $ax^2+bx+c$.

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

**(i)** $\Delta>0$. Στην περίπτωση αυτή το τριώνυμο γράφεται ως διαφορά τετραγώνων επί το $a$.
$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$. Οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί $\rho_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ και $\rho_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ οι οποίοι μηδενίζουν τους παράγοντες $x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ και $x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, αντίστοιχα. Οι ρίζες $\rho_1$ και $\rho_2$ είναι διαφορετικοί αριθμοί, γιατί $\Delta>0$.

Το τριώνυμο γράφεται $ax^2+bx+c=a(x-\rho_1)(x-\rho_2)$. Αν τώρα $\rho_1<x<\rho_2$, το γινόμενο $(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ είναι αρνητικό και το τριώνυμο είναι **ετερόσημο** του $a$. Αν $x<\rho_1<\rho_2$ ή $\rho_1<\rho_2<x$, το γινόμενο $(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ είναι θετικό και το τριώνυμο είναι **ομόσημο** του $a$. Ανάλογα συμπεράσματα προκύπτουν στην περίπτωση που $\rho_2<\rho_1$.

**(ii)** $\Delta=0$. Στην περίπτωση αυτή το τριώνυμο γράφεται ως τετράγωνο επί το $a$.
$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$. Στην περίπτωση αυτή το τριώνυμο έχει μια μοναδική (διπλή) ρίζα $\rho=-\frac{b}{2a}$. Αν λοιπόν $x\neq-\frac{b}{2a}$, ο παράγοντας $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ είναι θετικός και επομένως το τριώνυμο είναι **ομόσημο** του $a$.

**(iii)** $\Delta<0$. Στην περίπτωση αυτή το τριώνυμο γράφεται ως άθροισμα τετραγώνων επί το $a$.
$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4a^2}\right)$. Επειδή $\frac{|\Delta|}{4a^2}>0$, η ποσότητα $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4a^2}$ είναι θετική και επομένως το τριώνυμο είναι πάντα **ομόσημο** του $a$, άρα δεν γίνεται ποτέ μηδέν. Η εξίσωση λοιπόν $ax^2+bx+c=0$ δεν έχει στην περίπτωση αυτή ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε την ακόλουθη πρόταση:

### 1.7.1 Πρόταση

*Θεωρούμε το τριώνυμο* $f(x)=ax^2+bx+c$*, όπου* $a\neq0$.

**(i)** *Αν η διακρίνουσα $\Delta = b^2 - 4ac$ είναι θετική, τότε το τριώνυμο έχει δύο διακεκριμένες ρίζες $\rho_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.*

*Αν το x βρίσκεται **μεταξύ των ριζών**, το τριώνυμο είναι **ετερόσημο του a**.*

*Αν το x βρίσκεται **εκτός των ριζών**, το τριώνυμο είναι **ομόσημο του a**.*

**(ii)** *Αν η διακρίνουσα $\Delta = b^2 - 4ac$ είναι μηδέν, τότε το τριώνυμο έχει μία **διπλή** ρίζα $\rho = -\dfrac{b}{2a}$.*

*Αν $x \neq -\dfrac{b}{2a}$, το τριώνυμο είναι **ομόσημο του a**.*

**(iii)** *Αν η διακρίνουσα $\Delta = b^2 - 4ac$ είναι αρνητική, τότε το τριώνυμο δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$. Στην περίπτωση αυτή το τριώνυμο είναι **πάντοτε ομόσημο του a**.* ■

**Σχόλια: 1.** Από την προηγούμενη συζήτηση προκύπτει ότι αν $\rho_1$ και $\rho_2$ είναι οι ρίζες του τριωνύμου $ax^2 + bx + c$ (αυτές πιθανώς και να ταυτίζονται) τότε $ax^2 + bx + c =$ $= a(x - \rho_1)(x - \rho_2)$. Επομένως η εύρεση των ριζών μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην **παραγοντοποίηση** του τριωνύμου.

**2.** Με βάση την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι αν το τριώνυμο είναι πάντοτε ομόσημο του *a* ή μηδέν, τότε η διακρίνουσά του είναι μικρότερη ή ίση του μηδενός.

### 1.7.2 Παραδείγματα

**1.** Να παραγοντοποιηθούν τα τριώνυμα: **(i)** $2x^2 - 3x - 2$, **(ii)** $-9x^2 + 12x - 4$ και **(iii)** $-3x^2 + x + 4$.

**Λύση: (i)** Βρίσκουμε τις ρίζες του τριωνύμου $2x^2 - 3x - 2$. Είναι $\dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \dfrac{3 \pm 5}{4} =$

$$= \begin{cases} \dfrac{3+5}{4} = 2 \\ \text{ή} \\ \dfrac{3-5}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$ Επομένως, $2x^2 - 3x - 2 = 2\left(x + \dfrac{1}{2}\right)(x-2) = (2x+1)(x-2)$.

**(ii)** Το τριώνυμο $-9x^2 + 12x - 4$ έχει διπλή ρίζα το $\dfrac{2}{3}$. Επομένως, $-9x^2 + 12x - 4 =$ $= -9\left(x - \dfrac{2}{3}\right)^2 = -(3x-2)^2$.

**(iii)** Το τριώνυμο $-3x^2+x+4$ έχει ρίζες τους αριθμούς $\dfrac{-1\pm\sqrt{1+48}}{-6}=\dfrac{-1\pm 7}{-6}=$

$$=\begin{cases}\dfrac{-1+7}{-6}=-1\\ \dfrac{-1-7}{-6}=\dfrac{4}{3}\end{cases}$$. Επομένως, $-3x^2+x+4=-3\left(x-\dfrac{4}{3}\right)(x+1)=-(3x-4)(x+1)$.

**2.** Να γίνουν γινόμενο παραγόντων οι παραστάσεις: **(i)** $x^2-xy-2y^2$ και **(ii)** $a^2+ab-6b^2$.

**Λύση:** **(i)** Η παράσταση $x^2-xy-2y^2$ είναι ένα τριώνυμο ως προς *x*. Οι ρίζες του είναι $\dfrac{y\pm\sqrt{y^2+8y^2}}{2}=\dfrac{y\pm 3|y|}{2}$. Επειδή μπροστά από το απόλυτο έχουμε και τα δύο πρόσημα, το απόλυτο δεν χρειάζεται. Άρα οι ρίζες είναι το $\dfrac{y+3y}{2}=2y$ και το $\dfrac{y-3y}{2}=-y$. Επομένως, $x^2-xy-2y^2=(x-2y)(x+y)$.

Το ίδιο αποτέλεσμα θα βρίσκαμε αν θεωρούσαμε την παράσταση $x^2-xy-2y^2=$ $=-2y^2-xy+x^2$ ως τριώνυμο του *y*. Οι ρίζες τότε είναι $\dfrac{x\pm\sqrt{x^2+8x^2}}{-4}=\dfrac{x\pm 3x}{-4}=$

$$=\begin{cases}\dfrac{x+3x}{-4}=-x\\ \text{και}\\ \dfrac{x-3x}{-4}=\dfrac{x}{2}\end{cases}$$ Επομένως, $-2y^2-xy+x^2=-2(y+x)\left(y-\dfrac{x}{2}\right)=(x+y)(x-2y)$.

**(ii)** Θεωρούμε την παράσταση $a^2+ab-6b^2$ ως τριώνυμο του *a*. Οι ρίζες τότε είναι

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2+24b^2}}{2}=\frac{-b\pm 5b}{2}=\begin{cases}\dfrac{-b+5b}{2}=2b\\ \text{και}\\ \dfrac{-b-5b}{2}=-3b\end{cases}$$ Επομένως, $a^2+ab-6b^2=(a-2b)(a+3b)$.

**3.** Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases}x^2+y^2=29\\ x+y=7\end{cases}$

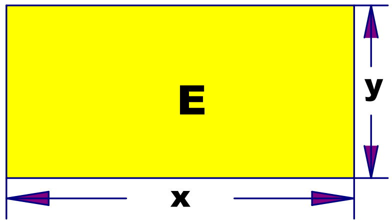
**Λύση:** Από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος παίρνουμε: $y=7-x$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση παίρνουμε: $x^2+(7-x)^2=29 \Leftrightarrow 2x^2-14x+20=0 \Leftrightarrow x^2-7x+10=0$.

Η εξίσωση $x^2-7x+10=0$ έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και 5.

Αν $x=2$, τότε $y=5$. Αν $x=5$, τότε $y=2$. Οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη $(2,5)$ και $(5,2)$.

**4.** Δείξτε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο *κ*, το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

**Απόδειξη:** Έστω *x* και *y* οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου με περίμετρο *κ*. Είναι $\kappa = 2x + 2y \Leftrightarrow y = \frac{\kappa}{2} - x$. Επομένως το εμβαδόν του είναι $E = x\left(\frac{\kappa}{2} - x\right) = -x^2 + \frac{\kappa}{2}x$.




Η εξίσωση $E = -x^2 + \frac{\kappa}{2}x \Leftrightarrow -x^2 + \frac{\kappa}{2}x - E = 0$ έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνον αν $\frac{\kappa^2}{4} - 4E \geq 0 \Leftrightarrow E \leq \frac{\kappa^2}{16}$. Η μέγιστη τιμή λοιπόν του εμβαδού είναι $\frac{\kappa^2}{16}$. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση $-x^2 + \frac{\kappa}{2}x - E = 0$ έχει μια διπλή ρίζα $x = \frac{\kappa}{4}$. Επομένως, $y = \frac{\kappa}{2} - \frac{\kappa}{4} = \frac{\kappa}{4} = x$. Άρα το ορθογώνιο είναι, στην περίπτωση αυτή, τετράγωνο.

**5. Δεύτερη απόδειξη της ανισότητας Cauchy-Schwarz**

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 .$$

**Απόδειξη:** Γνωρίζουμε ότι $(xx_i + y_i)^2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Οι σχέσεις αυτές, αν αναπτύξουμε τα τετράγωνα, γράφονται:

$$\begin{cases} x^2x_1^2 + 2x_1y_1x + y_1^2 \geq 0 \\ x^2x_2^2 + 2x_2y_2x + y_2^2 \geq 0 \\ \qquad \vdots \\ x^2x_n^2 + 2x_ny_nx + y_n^2 \geq 0 \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε:

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)x^2 + 2(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)x + (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geq 0 ,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $A = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$, $B = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ και $C = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$. Εφόσον το τριώνυμο $Ax^2 + 2Bx + C$ είναι πάντοτε $\geq 0$, θα πρέπει η διακρίνουσά του $4B^2 - 4AC$ να είναι $\leq 0$. Δηλαδή $B^2 \leq AC$, ήτοι

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) .$$

**6.** Να επιλυθεί στο $\mathbb{R}$ η ανίσωση: $\frac{(x-2)(-3x^2 + x - 4)}{x^2 + 3x - 4} \leq 0$.

**Λύση:** Για να ορίζεται η παράσταση δεν πρέπει να μηδενίζεται ο παρονομαστής. Το τριώνυμο $x^2+3x-4$ έχει ρίζες το -1 και το 4. Επομένως, $x \neq -1$ και $x \neq 4$.

Το τριώνυμο $-3x^2+x-4$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1-48 = -47 < 0$. Επομένως είναι πάντοτε ομόσημο του $-3$, δηλαδή αρνητικό. Έχουμε λοιπόν τον παρακάτω πίνακα για το πρόσημο της παράστασης $\dfrac{(x-2)(-3x^2+x-4)}{x^2+3x-4}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | | - | | - | 0 | + | | + | |
| $-3x^2+x-4$ | | - | | - | | - | | - | |
| $x^2+3x-4$ | | + | | - | | - | | + | |
| $\dfrac{(x-2)(-3x^2+x-4)}{x^2+3x-4}$ | | + | | - | 0 | + | | - | |

Από τον πίνακα αυτόν προκύπτει ότι $-1 < x \leq 2$ ή $x > 4$.


## 1.8 Η αποδεικτική μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής

Ας υπολογίσουμε την παράσταση $1+3+5+\cdots+(2n-1)$ (άθροισμα των $n$ πρώτων περιττών θετικών ακεραίων) για διάφορες τιμές του $n$. Παρατηρούμε ότι:

Για $n=1$: $1=1^2$,

για $n=2$: $1+3=4=2^2$,

για $n=3$: $1+3+5=9=3^2$,

για $n=4$: $1+3+5+7=16=4^2$,

για $n=5$: $1+3+5+7+9=25=5^2$.

Παρατηρούμε ότι στις προηγούμενες περιπτώσεις το άθροισμα που προκύπτει **είναι ίσο με $\boldsymbol{n^2}$**. Είναι λογικό να «υποπτευθούμε» ότι αυτό συμβαίνει πάντοτε, δηλαδή ότι

$$\boldsymbol{1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2},$$

για κάθε $n=1,2,3\ldots$ Κανείς όμως δεν μας εγγυάται ότι πράγματι έτσι έχουν τα πράγματα. Άλλωστε είναι μάλλον απίθανο να επαληθεύσει κανείς, κάνοντας με το χέρι τις πράξεις, ότι π.χ.

$$1+3+5+\cdots+1999999=1000000^2.$$

Ας υποθέσουμε ότι, με τον άλφα ή βήτα τρόπο, έχουμε αποδείξει ότι για κάποια τιμή $k$ του $n$, η πρόταση ισχύει, δηλαδή $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$. Τί θα συμβεί όταν μεταβούμε στο επόμενο άθροισμα $1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2(k+1)-1)$;

Παρατηρούμε ότι, εφόσον έχουμε δείξει ότι $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$, τότε

$$\underbrace{1+3+5+\cdots+(2k-1)}_{k^2}+(2(k+1)-1)=k^2+2k+2-1=k^2+2k+1=(k+1)^2,$$

δηλαδή, αν η πρόταση για $n=k$ ισχύει, τότε θα ισχύει και για $n=k+1$. Οι συνέπειες αυτού του γεγονότος είναι καταλυτικές. Ήδη γνωρίζουμε (από τον πίνακα) ότι η πρόταση ισχύει για $n=5$. Θα πρέπει λοιπόν να ισχύει και για $n=5+1=6$. Εφόσον ισχύει για $n=6$, θα ισχύει και για $n=6+1=7$ κ.ο.κ. Προφανώς η διαδικασία αυτή δεν έχει τέλος. Έτσι, ανεβαίνοντας ένα-ένα τα σκαλοπάτια των θετικών ακεραίων, μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι **για όλους** τους θετικούς ακεραίους $n$, ισχύει η σχέση: $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

Η μέθοδος που εφαρμόσαμε για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2, \text{ για όλους τους θετικούς ακεραίους } n,$$

είναι γνωστή ως **μαθηματική επαγωγή**.

Αυτή αποτελείται από δύο βήματα:

1. Αποδεικνύουμε (συνήθως με απλή αριθμητική επαλήθευση) ότι η πρόταση ισχύει για έναν ελάχιστο ακέραιο $n_0$.
2. Αποδεικνύουμε ότι αν η πρόταση ισχύει για κάποιον ακέραιο $k$, τότε θα ισχύει και για τον αμέσως επόμενό του, δηλαδή το $k$+1. Αυτό είναι και το σπουδαιότερο (και συνήθως το πιο δύσκολο) βήμα της απόδειξης και λέγεται **επαγωγικό βήμα**.

Μερικοί δεν χρησιμοποιούν το νέο σύμβολο $k$, αλλά αποδεικνύουν ότι η πρόταση ισχύει για το $n$+1, με δεδομένο ότι ισχύει για $n$.

### 1.8.1 Παραδείγματα

**1.** Να αποδείξετε ότι

**(i)** $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ και **(ii)** $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$.

**Απόδειξη:** **(i)** Για $n=1$ η σχέση $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ γράφεται $1=\dfrac{1\cdot(1+1)}{2}$, η οποία προφανώς ισχύει.

Έστω ότι $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. Τότε $1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\dfrac{n(n+1)}{2}+n+1=$

$=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}=\dfrac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$, δηλαδή, η σχέση ισχύει και για $n+1$ και επομένως τελειώσαμε.

**(ii)** Για $n=1$ η σχέση $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ γράφεται $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}$, η οποία προφανώς ισχύει.

Έστω ότι $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.

Τότε $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=$

$=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}=\frac{n+1}{(n+1)+1}$, δηλαδή, η σχέση ισχύει και για $n+1$ και επομένως τελειώσαμε.

Υπενθυμίζουμε ότι αν το $n$ είναι θετικός ακέραιος, τότε το ***n*!** (***n* παραγοντικό**) ορίζεται να είναι το γινόμενο όλων των θετικών ακεραίων που δεν υπερβαίνουν τον $n$, δηλαδή $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots n$. Για κάποιους λόγους που θα φανούν στη συνέχεια ορίζουμε **0! = 1**.

**2. (i)** Να αποδείξετε ότι $n!>3^n$, για κάθε $n\geq 7$.

**(ii)** Να αποδείξετε ότι $2^n>n^2$, για κάθε $n\geq 5$.

**Απόδειξη: (i)** Επαληθεύουμε ότι ισχύει για $n=7$. Πράγματι, $7!=5040$ και $3^7=2187$. Επομένως $7!>3^7$.

Έστω τώρα ότι $n!>3^n$. Τότε $(n+1)!=(n+1)\cdot n!>(n+1)\cdot 3^n\underset{n\geq 7}{\geq}(7+1)\cdot 3^n>3\cdot 3^n=3^{n+1}$.

Έτσι, από το 7 πάμε στο 8, από το 8 στο 9 κ.ο.κ. Άρα $n!>3^n$, για κάθε $n\geq 7$.

**(ii)** Επαληθεύουμε ότι ισχύει για $n=5$. Πράγματι, $2^5=32$ και $5^2=25$. Επομένως $2^5>5^2$.

Έστω ότι $2^n>n^2$, για κάποιο $n\geq 5$. Τότε $2^{n+1}=2\cdot 2^n=2^n+2^n>n^2+n^2=2n^2$ (γιατί υποθέσαμε ότι $2^n>n^2$).

Επίσης, $2n^2>(n+1)^2$.

Πράγματι, $2n^2>(n+1)^2\Leftrightarrow n^2-2n-1>0\Leftrightarrow (n-1)^2-2>0$. Η σχέση όμως $(n-1)^2-2>0$ ισχύει γιατί, εφόσον $n\geq 5$, έχουμε $(n-1)^2-2\geq(5-1)^2-2=14>0$. Άρα και η ισοδύναμή της $2n^2>(n+1)^2$ ισχύει.

Συνδυάζοντας τις σχέσεις $2^{n+1}>2n^2$ και $2n^2>(n+1)^2$, συμπεραίνουμε ότι $2^{n+1}>(n+1)^2$, δηλαδή, η πρόταση ισχύει και για $n+1$. Επομένως, $2^n>n^2$, για κάθε $n\geq 5$.

Η μέθοδος της τέλειας επαγωγής μοιάζει με το παιχνίδι του ντόμινο:

Έχουμε μια μεγάλη σειρά από αντικείμενα, συνήθως πλακίδια (ή στρατιωτάκια), τοποθετημένα κατά τέτοιον τρόπο, ώστε αν κάποιο απ' αυτά πέσει, τότε θα πέσει και το επόμενό του.

…………

Τί θα γίνει αν κάποιος στρατιώτης (ο $k$-στός) πέσει;

..........  …………..

$k \to k+1$

Προφανώς θα πέσει και ο επόμενός του (ο $k$+1) και ο επόμενος του $k$+1, ο $k$+2 κ.ο.κ.

Τελικά θα πέσουν όλα τα στρατιωτάκια, από τον $k$-στό και μετά (ίσως αργήσουν, αλλά θα πέσουν!).

Αν παραλείψουμε κάποιο από τα βήματα της επαγωγικής απόδειξης μπορεί να οδηγηθούμε σε εσφαλμένα συμπεράσματα. Ας δούμε την ακόλουθη «απόδειξη»:

Θα αποδείξουμε ότι $n = n + 2$, για κάθε θετικό ακέραιο $n$.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $n = n + 2$, για κάποιον ακέραιο $n$. Προσθέτοντας και στα δύο μέλη το 1 παίρνουμε $(n+1) = (n+1) + 2$, δηλαδή, η πρόταση ισχύει και για $n$+1. Με βάση την επαγωγική διαδικασία τελειώσαμε. Μάλλον όχι! Ξεχάσαμε να αποδείξουμε την πρόταση για $n = 1$. Αλλά $1 \neq 3$, το πρώτο στρατιωτάκι δεν πέφτει, άρα δεν πέφτει κανένα!

**3.** Δείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n$, η παράσταση $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ είναι (ακέραιο) πολλαπλάσιο του 11.

**Απόδειξη:** Για $n = 0$ έχουμε: $3^{2n+2} + 2^{6n+1} = 3^2 + 2^1 = 9 + 2 = 11$ και επομένως, η πρόταση ισχύει για $n = 0$.

Υποθέτουμε ότι η παράσταση $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ είναι πολλαπλάσιο του 11, για κάποιο φυσικό $n$, δηλαδή $3^{2n+2} + 2^{6n+1} = 11r$, όπου $r$ ένας ακέραιος.

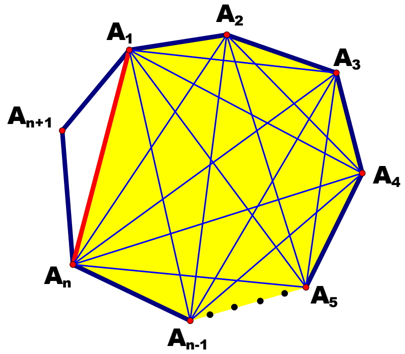
Τότε

$3^{2(n+1)+2} + 2^{6(n+1)+1} = 3^2 3^{2n+2} + 2^6 2^{6n+1} = 9 \cdot 3^{2n+2} + 64 \cdot 2^{6n+1}$. Από το 64, με διαίρεση δια του 11, αποκόπτουμε το μεγαλύτερο μέρος αυτού που είναι πολλαπλάσιο του 11. Έτσι, $64 = 5 \cdot 11 + 9$ και επομένως $9 \cdot 3^{2n+2} + (5 \cdot 11 + 9) \cdot 2^{6n+1} = 5 \cdot 11 \cdot 2^{6n+1} + 9 \cdot (3^{2n+2} + 2^{6n+1}) =$
$= 5 \cdot 11 \cdot 2^{6n+1} + 9 \cdot 11 r = 11 \cdot (5 \cdot 2^{6n+1} + 9r)$

και ο αριθμός $r' = 5 \cdot 2^{6n+1} + 9r$ είναι προφανώς ακέραιος. Επομένως το $3^{2(n+1)+2} + 2^{6(n+1)+1}$ είναι πολλαπλάσιο του 11, δηλαδή, η πρόταση ισχύει και για το $n$+1. Τελειώσαμε.

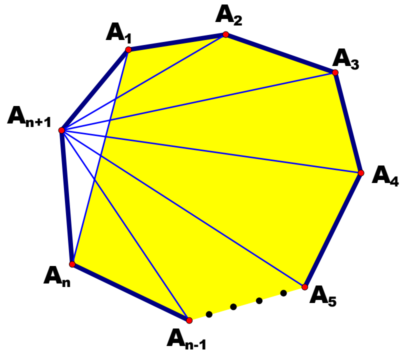
**4.** Δείξτε ότι ένα κυρτό πολύγωνο με $n$ κορυφές ($n \geq 3$) έχει $\frac{n(n-3)}{2}$ διαγωνίους.

**Απόδειξη:** Έστω $n = 3$. Παίρνουμε ένα τρίγωνο που δεν έχει διαγωνίους ή καλύτερα, έχει 0 διαγωνίους. Εφόσον $0 = \frac{3 \cdot (3-3)}{2}$, η πρόταση ισχύει για $n = 3$.




Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n$, δηλαδή ότι κάθε κυρτό πολύγωνο με $n$ κορυφές έχει $\frac{n(n-3)}{2}$ διαγωνίους. Θεωρούμε ένα κυρτό πολύγωνο $A_1A_2A_3 \cdots A_nA_{n+1}$ με $n$+1 κορυφές. Το πολύγωνο $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ έχει $n$ πλευρές. Οι διαγώνιοι του $A_1A_2A_3 \cdots A_nA_{n+1}$ είναι όλες οι διαγώνιοι του $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ (που είναι $\frac{n(n-3)}{2}$ τον αριθμόν, από την υπόθεση), συν τις διαγωνίους που ξεκινάνε από το $A_{n+1}$, συν τη διαγώνιο $A_1A_n$.

Οι διαγώνιοι που ξεκινάνε από το $A_{n+1}$ είναι $n-2$ το πλήθος. (Τα σημεία $A_1$ και $A_n$ δίνουν πλευρές). Επομένως, το πλήθος των διαγωνίων του $A_1A_2A_3 \cdots A_nA_{n+1}$ είναι ίσο με




$$\frac{n(n-3)}{2} + 1 + n - 2 = \frac{n^2 - n - 2}{2} =$$

$$= \frac{n^2 - 2n + n - 2}{2} = \frac{n(n-2) + n - 2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)-3)}{2},$$ δηλαδή η πρόταση ισχύει και για $n$+1.

Στο επόμενο παράδειγμα αποδεικνύουμε μια πολύ χρήσιμη ανισότητα, γνωστή ως **ανισότητα του Bernoulli**. Η ανισότητα Bernoulli έχει πολλές εφαρμογές, ιδίως στον υπολογισμό ορίων ακολουθιών.

**5. (Ανισότητα Bernoulli)** Υποθέτουμε ότι ο $\theta$ είναι ένας πραγματικός αριθμός με $\theta > -1$. Τότε, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ισχύει:

$$(1+\theta)^n \geq 1 + n\theta .$$

**Απόδειξη:** Για $n = 1$ η παραπάνω σχέση ισχύει (ως ισότητα).

Υποθέτουμε ότι για κάποιον θετικό ακέραιο *n* έχουμε: $(1+\theta)^n \geq 1 + n\theta$.

Τότε, $(1+\theta)^{n+1} = (1+\theta)(1+\theta)^n \geq (1+\theta)(1+n\theta) = 1 + (n+1)\theta + n\theta^2 \underset{\theta^2 \geq 0}{\geq} 1 + (n+1)\theta$,

δηλαδή η ανισότητα ισχύει και για $n+1$. Επομένως ισχύει για κάθε $n = 1, 2, \ldots$

**6. Τρίτη απόδειξη της ανισότητας Cauchy-Schwarz**

Δείξτε ότι

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2),$$

για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, όπου $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.

**Απόδειξη:** Για $n = 1$ ισχύει ως ισότητα $(a_1 b_1)^2 = a_1^2 b_1^2$.

Έστω ότι ισχύει για κάποιο *n*. Τότε έχουμε:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 + b_{n+1}^2) = a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 + a_{n+1}^2 (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) +$$
$$+ b_{n+1}^2 (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) + \underbrace{(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)}_{\geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2} \geq$$
$$\geq a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 + a_{n+1}^2 (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) + b_{n+1}^2 (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) + (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 =$$
$$= a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 + (a_{n+1}^2 b_1^2 + b_{n+1}^2 a_1^2) + (a_{n+1}^2 b_2^2 + b_{n+1}^2 a_2^2) + \cdots + (a_{n+1}^2 b_n^2 + b_{n+1}^2 a_n^2) +$$
$$+ (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$$

Για κάθε δείκτη $i = 1, 2, \ldots, n$ έχουμε:

$a_{n+1}^2 b_i^2 + b_{n+1}^2 a_i^2 \geq 2 a_{n+1} b_{n+1} a_i b_i \Leftrightarrow (a_{n+1} b_i - a_i b_{n+1})^2 \geq 0$ (η τελευταία προφανώς ισχύει).

Επομένως

$$a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 + (a_{n+1}^2 b_1^2 + b_{n+1}^2 a_1^2) + \cdots + (a_{n+1}^2 b_n^2 + b_{n+1}^2 a_n^2) + (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \geq a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 +$$
$$+ 2 a_{n+1} b_{n+1} a_1 b_1 + \cdots + 2 a_{n+1} b_{n+1} a_n b_n + (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 =$$
$$= a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 + 2 a_{n+1} b_{n+1} (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n) + (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 =$$
$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n + a_{n+1} b_{n+1})^2$$

(ανάπτυγμα τετραγώνου $(A+B)^2$ με $A = a_{n+1} b_{n+1}$ και $B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$ ).

Συνεπώς η πρόταση ισχύει και για $n+1$ και τελειώσαμε!

Στο επόμενο παράδειγμα εφαρμόζουμε μια παραλλαγή της μεθόδου της τέλειας επαγωγής. Για να γίνει το πράγμα πιο κατανοητό, ας ξαναγυρίσουμε στα στρατιωτάκια μας. Υποθέτουμε ότι έχουμε τακτοποιήσει τα στρατιωτάκια σε μια γραμμή, ώστε **αν δύο διαδοχικά**

**στρατιωτάκια πέσουν** (το $k$ και το $k$+1), τότε **θα πέσει και το αμέσως επόμενο** (το $k$+2). Στη συνέχεια, ρίχνουμε τα δύο πρώτα στρατιωτάκια. Τί θα συμβεί; Μα φυσικά, θα πέσουν όλα! Πράγματι, εφόσον το $1^o$ και το $2^o$ θα πέσουν, αυτό θα συμπαρασύρει και το $3^o$. Αλλά, εφόσον το $2^o$ και $3^o$ θα πέσουν, θα πέσει και το $4^o$ κ.ο.κ.

**7.** Έστω $\alpha_n = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$, $n = 1,2,\ldots$ Τότε οι αριθμοί $\alpha_n$ είναι ακέραιοι και μάλιστα $\alpha_n =$ πολλαπλάσιο του $2^n$, για κάθε $n = 1,2,\ldots$

**Απόδειξη:** $\alpha_1 = 3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5} = 6 = 3\cdot 2^1$ και $\alpha_2 = (3+\sqrt{5})^2 + (3-\sqrt{5})^2 = 9+5+6\sqrt{5}+$ $+9+5-\ 6\sqrt{3} = 28 = 7\cdot 2^2$. (Τα δύο πρώτα στρατιωτάκια έπεσαν!).

Παρατηρούμε ότι

$$6\alpha_{n+1} - 4\alpha_n = [(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})][(3+\sqrt{5})^{n+1}+(3-\sqrt{5})^{n+1}] - 4\cdot[(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n] =$$

$$= (3+\sqrt{5})^{n+2} + (3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^{n+1} + (3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})^{n+1} + (3-\sqrt{5})^{n+2} -$$
$$-4\cdot[(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n] =$$

$$= (3+\sqrt{5})^{n+2} + (3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})[(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n] + (3-\sqrt{5})^{n+2} -$$
$$4\cdot[(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n] =$$

$$= (3+\sqrt{5})^{n+2} + (3^2-(\sqrt{5})^2)[(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n] + (3-\sqrt{5})^{n+2} - 4\cdot[(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n] =$$

$$= (3+\sqrt{5})^{n+2} + 4\cdot[(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n] + (3-\sqrt{5})^{n+2} - 4\cdot[(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n] =$$

$$= (3+\sqrt{5})^{n+2} + (3-\sqrt{5})^{n+2} = \alpha_{n+2}\,.$$

(Οι αριθμοί 4 και 6 επιλέχτηκαν όχι τυχαία αλλά από τις σχέσεις $6 = (3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})$ και $4 = 3^2-(\sqrt{5})^2$).

Έστω λοιπόν, ότι $\alpha_n = 2^n r$ και $\alpha_{n+1} = 2^{n+1}s$, όπου $r$ και $s$ θετικοί ακέραιοι. Τότε, $4\alpha_n = 2^{n+2}r$ και $6\alpha_{n+1} = 2^{n+2}(3s)$. Επομένως $\alpha_{n+2} = 6\alpha_{n+1} - 4\alpha_n = 2^{n+2}(3s-r)$, δηλαδή το $\alpha_{n+2}$ είναι πολλαπλάσιο του $2^{n+2}$. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Το επόμενο παράδειγμα αναφέρεται σε μια σπουδαία ανισότητα, την **ανισότητα του Cauchy.** Στο παράδειγμα αυτό αποδεικνύουμε τη ζητούμενη σχέση πρώτα για τις δυνάμεις του 2 και μετά, γυρνώντας πίσω, για όλους τους ακεραίους $\geq 2$.

**8. (Ανισότητα Cauchy)** Υποθέτουμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n \geq 2$) είναι μη αρνητικοί. Τότε ισχύει

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}\,.$$

**Απόδειξη:** Πριν προχωρήσουμε, παρατηρούμε ότι αν κάποιος από τους $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι μηδέν, τότε το δεύτερο μέλος της ανισότητας είναι μηδέν και επομένως αυτή ισχύει. Άρα, μπορούμε να υποθέσουμε στη συνέχεια, ότι όλοι οι αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι θετικοί.

Τώρα, θα αποδείξουμε την ανισότητα **για τις δυνάμεις του 2**. Δηλαδή, θα δείξουμε ότι

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^n - 1} + a_{2^n}}{2^n} \geq \sqrt[2^n]{a_1 a_2 \cdots a_{2^n - 1} a_{2^n}} \,. \quad (1)$$

Για $n = 1$ έχουμε $2^n = 2^1 = 2$. Επομένως, $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} \Leftrightarrow a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2 \geq 0$, που ισχύει.

Υποθέτουμε ότι η (1) ισχύει για $n = k$, δηλαδή $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k}}$, για κάθε $2^k$ θετικούς αριθμούς $a_1, a_2, \ldots, a_{2^k}$.

Τότε, για $n = k + 1$, έχουμε: $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} = \frac{\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k}}{2^k} + \frac{a_{2^k+1} + a_{2^k+2} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^k}}{2}$

και, επειδή η ανισότητα Cauchy ισχύει $2^k$ αριθμούς, θα πάρουμε

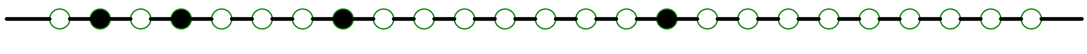
$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \geq \frac{\sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k}} + \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}}}}{2} \,.$$

Ξέρουμε επίσης, ότι η ανισότητα Cauchy ισχύει για δύο αριθμούς (εδώ παίρνουμε τους $\sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k}}$ και $\sqrt[2^k]{a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}}}$ ). Επομένως θα έχουμε:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \geq \frac{\sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k}} + \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}}}}{2} \geq \sqrt{\sqrt[2^k]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k}} \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} a_{2^k+2} \cdots a_{2^{k+1}}}} =$$

$= \sqrt[2^{k+1}]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k} a_{2^k+1} \cdots a_{2^{k+1}}}$, δηλαδή, η ανισότητα ισχύει και για $2^{k+1}$ αριθμούς.

Αυτό που δείξαμε είναι ότι $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$, όταν το *n* είναι δύναμη του 2. Αν παρατηρήσουμε το επόμενο σχήμα, θα διαπιστώσουμε ότι δημιουργούνται κενά (άσπρες μπάλλες) μεταξύ των θετικών ακεραίων. Σ' αυτά τα κενά δεν γνωρίζουμε ακόμη αν ισχύει η ανισότητα Cauchy.




Θα πάμε ανάποδα: Θα αποδείξουμε ότι αν η ανισότητα Cauchy ισχύει για κάποιον θετικό ακέραιο $n > 2$, **τότε θα ισχύει και για τον προηγούμενό του** $n - 1$. Έτσι, ξέροντας ότι ισχύει για π.χ. $n = 16$ θα ισχύει και για $n = 15$, αλλά και για $n = 14$ κ.ο.κ., κλείνοντας έτσι τα κενά στην απόδειξη.

Πράγματι, έστω ότι η ανισότητα ισχύει για κάποιο $n>2$. Θεωρούμε τώρα $n-1$ θετικούς αριθμούς $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}$. Έστω $A=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$. Θα δείξουμε ότι $A\geq\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}$.

Οι αριθμοί $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},A$ είναι *n* το πλήθος. Εφόσον η ανισότητα ισχύει για *n*, θα έχουμε

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+A}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{n-1}A}\Leftrightarrow\frac{(n-1)\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}+A}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{n-1}A}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(n-1)A+A}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{n-1}A}\Leftrightarrow A\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{n-1}A}\Leftrightarrow A^n\geq a_1a_2\cdots a_{n-1}A\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^{n-1}\geq a_1a_2\cdots a_{n-1}\Leftrightarrow A\geq\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}$$ και τελειώσαμε!!

**Σημείωση:** Ο αριθμός $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ λέγεται **αριθμητικός μέσος** των $a_1,a_2,\ldots,a_n$ και ο $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ **γεωμετρικός μέσος** αυτών. Η ανισότητα Cauchy μας λέει λοιπόν ότι ο αριθμητικός μέσος είναι μεγαλύτερος ή ίσος του γεωμετρικού μέσου.

## Άλυτες ασκήσεις

**6.** Να αποδείξετε τις ακόλουθες σχέσεις: **(i)** $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$,

**(ii)** $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$, **(iii)** $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$,

**(iii)** $\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\dfrac{1}{7\cdot11}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{3n+1}$,

**(iv)** $\dfrac{1}{a(a+1)}+\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}+\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}+\cdots+\dfrac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\dfrac{n}{a(a+n)}$, όπου $a\in(0,+\infty)$ και $n=1,2,\ldots$,

**(v)** $1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$,

**(vi)** $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{n+1}{2n}$, όπου $n\geq2$

**7.** **(i)** Αν $a,b>0$, τότε $\dfrac{a^n+b^n}{2}\geq\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n$, για κάθε $n=1,2,\ldots$

**(ii)** Να αποδείξετε ότι $3^{n-1}>n^2$ και $\sqrt[3]{3}>\sqrt[n]{n}$, για κάθε $n\geq4$.

**(iii)** Να αποδείξετε ότι $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$, για κάθε $n\geq2$.

**(iii)** Αν $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$, να αποδείξετε ότι:

(α) $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geq1+a_1+a_2+\cdots+a_n$ και

(β) $(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)\geq n^2$, για κάθε $n=1,2,\ldots$

**(iv)** Αν $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 1$, να αποδείξετε ότι: $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq \dfrac{2^n}{n+1}(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)$.

**(v)** Να αποδείξετε ότι $(n!)^3 < n^n\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{2n}$, για κάθε $n \geq 2$.

**8.** **(i)** Να αποδείξετε ότι για κάθε $n \geq 0$ ο αριθμός $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ διαιρείται με το 133.

**(ii)** Υποθέτουμε ότι $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ και $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, για κάθε $n \geq 3$. Δείξτε ότι $a_n = 2^{n-1} + 1$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$

**(iii)** Υποθέτουμε ότι $a_1 = 1$ και $a_{n+1} = a_n + 8n$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ Δείξτε ότι $a_n = (2n-1)^2$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$

## 1.9 Τα σύμβολα $\Sigma$ και $\Pi$

Ας παρατηρήσουμε το άθροισμα $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$. Αυτό αποτελείται από όρους της μορφής $k^2$, όπου το *k* παίρνει όλες τις δυνατές **ακέραιες** τιμές από 1 έως *n*. Χάριν συντομίας, το άθροισμα αυτό συμβολίζεται με $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Ας δούμε ένα άλλο παράδειγμα: $\dfrac{2}{3\cdot 4} + \dfrac{3}{4\cdot 5} + \dfrac{4}{5\cdot 6} + \cdots + \dfrac{1000}{1001\cdot 1002}$. Κάθε όρος του αθροίσματος αυτού είναι της μορφής $\dfrac{k}{(k+1)\cdot(k+2)}$, όπου το *k* παίρνει τιμές από 2 έως 1000. Γράφουμε λοιπόν $\dfrac{2}{3\cdot 4} + \dfrac{3}{4\cdot 5} + \dfrac{4}{5\cdot 6} + \cdots + \dfrac{1000}{1001\cdot 1002} = \sum_{k=2}^{1000} \dfrac{k}{(k+1)(k+2)}$.

Η χρήση του *k* δεν είναι δεσμευτική, καθώς δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$\sum_{k=0}^{5} \frac{3^k}{k!} = \sum_{r=0}^{5} \frac{3^r}{r!} = \sum_{i=0}^{5} \frac{3^i}{i!} = \frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!} = 1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6} + \frac{81}{24} + \frac{243}{120}.$$

Ας δούμε παρακάτω μερικά αθροίσματα που γράφονται πιο σύντομα με τη χρήση του συμβόλου **Σ**.

Α) $\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$,

Β) $\sum_{k=-2}^{m} \dfrac{x^k}{k+3} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^2}{5} \cdots + \dfrac{x^m}{m+3}$

Γ) $\sum_{i=4}^{r} \dfrac{1}{i\cdot(i-3)} = \dfrac{1}{4\cdot 1} + \dfrac{1}{5\cdot 2} + \dfrac{1}{6\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{r\cdot(r-3)}$

Δ) $\sum_{k=1}^{n} 1 = ?$

Στο τελευταίο άθροισμα δεν υπάρχει κάποια παράσταση του $k$. Μπορούμε να θεωρήσουμε όμως ότι π.χ. $\sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n} 1^k$ ή ότι $\sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n} k^0$. Σε κάθε περίπτωση παίρνουμε $\sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ φορές}} = n$, παρακάμπτοντας έτσι αυτόν τον συμβολικό σκόπελο.

Αν τώρα το άθροισμα λαμβάνεται ως προς δύο ή περισσότερους δείκτες που ικανοποιούν μια συνθήκη, τότε κάτω από το σύμβολο $\boldsymbol{\Sigma}$ γράφουμε τη συνθήκη και αμέσως μετά απ' αυτό τον γενικό όρο του αθροίσματος.

Έτσι, το ανάπτυγμα του τετραγώνου $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$ γράφεται

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j .$$

Επίσης, οι ταυτότητες Lagrange γράφονται

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \sum_{1\le i<j\le n} \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix}^2 .$$

Οι σχέσεις $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ και $\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k$ παριστάνουν απλώς τις σχέσεις

$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$ και

$\lambda a_1 + \lambda a_2 + \cdots + \lambda b_n) = \lambda(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ αντίστοιχα.

Ο ορισμός του συμβόλου $\boldsymbol{\Pi}$ για τα γινόμενα είναι ανάλογος.

Γράφουμε $a_1 a_2 \cdots a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$.

### 1.9.1 Παραδείγματα

**1. Ορίζουσα van der Monde**

Ισχύει η σχέση

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$$

όπου $D(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

Έτσι, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)$ κτλ.

**Απόδειξη:** Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή. Για $n$=2 η σχέση προφανώς ισχύει.

Υποθέτουμε ότι σχέση ισχύει για $n$.

Τότε έχουμε: $D(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 & x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x_{n+1}^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$. Αφαιρούμε από την τελευταία γραμμή το γινόμενο της προτελευταίας επί $x_1$. Παίρνουμε έτσι,

$$D(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 & x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x_{n+1}^{n-1} \\ 0 & x_2^{n-1}(x_2-x_1) & x_3^n(x_3-x_1) & \cdots & x_n^n(x_n-x_1) & x_{n+1}^n(x_{n+1}-x_1) \end{vmatrix}.$$

Στη συνέχεια, αφαιρούμε από την προτελευταία γραμμή το γινόμενο της προηγούμενης επί $x_1$.

Παίρνουμε έτσι,

$$D(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & x_{n+1}^{n-2} \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) & x_{n+1}^{n-2}(x_{n+1}-x_1) \\ 0 & x_2^{n-1}(x_2-x_1) & x_3^{n-1}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-x_1) & x_{n+1}^{n-1}(x_{n+1}-x_1) \end{vmatrix}.$$

Αν συνεχίσουμε έτσι, θα καταλήξουμε στη σχέση

$$D(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_{n+1}-x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_{n+1}^{n-2}(x_{n+1}-x_1) \\ 0 & x_2^{n-1}(x_2-x_1) & x_3^{n-1}(x_3-x_1) & \cdots & x_{n+1}^{n-1}(x_{n+1}-x_1) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_{n+1}-x_1 \\ x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & & x_{n+1}(x_{n+1}-x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-1}(x_2-x_1) & x_2^{n-1}(x_2-x_1) & \cdots & x_{n+1}^{n-1}(x_{n+1}-x_1) \end{vmatrix} = (x_2-x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_3-x_1 & \cdots & x_{n+1}-x_1 \\ x_2 & x_3(x_3-x_1) & & x_{n+1}(x_{n+1}-x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-1}(x_2-x_1) & \cdots & x_{n+1}^{n-1}(x_{n+1}-x_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & x_{n+1}-x_1 \\ x_2 & x_3 & & x_{n+1}(x_{n+1}-x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1}(x_{n+1}-x_1) \end{vmatrix} = \cdots = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_{n+1}-x_1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_2^{n-1} \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_{n+1}-x_1)D(x_2,x_3,\ldots,x_{n+1}) = (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_{n+1}-x_1)$$

$$\prod_{2\le i<j\le n+1}(x_j-x_i) = \prod_{1\le i<j\le n+1}(x_j-x_i).$$

***2.** Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$, όπου $n \geq 2$. Υποθέτουμε ότι $b + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 < \frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$. Να δειχθεί ότι $b < 2a_i a_j$, για κάθε $1 \leq i < j \leq n$.

**Απόδειξη:** Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος αρκεί να δείξουμε ότι $b < 2a_1a_2$.

Για $n = 2$ έχουμε τη σχέση $b + a_1^2 + a_2^2 < (a_1 + a_2)^2 \Leftrightarrow b + a_1^2 + a_2^2 < a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b < 2a_1a_2$.

Υποθέτουμε ότι $n > 2$. Έχουμε $b + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 < \frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \Leftrightarrow (n-1)b + (n-1)\sum_{k=1}^{n} a_k^2 < \sum_{k=1}^{n} a_k^2 +$

$+2\sum_{\kappa<\lambda} a_\kappa a_\lambda \Leftrightarrow (n-1)b + (n-2)\sum_{k=1}^{n} a_k^2 < 2\sum_{\kappa<\lambda} a_\kappa a_\lambda$. Θέτουμε $a_1' = a_1 + a_2$, $a_2' = a_3$, $a_3' = a_4, \ldots,$, $a_{n-1}' = a_n$.

Τότε, $2\sum_{\kappa<\lambda} a_\kappa a_\lambda = 2a_1a_2 + 2\sum_{\lambda=3}^{n} a_1a_\lambda + 2\sum_{\lambda=3}^{n} a_2a_\lambda + 2\sum_{3\leq\kappa<\lambda\leq n} a_\kappa a_\lambda = 2a_1a_2 + 2\sum_{\lambda=3}^{n}(a_1 + a_2)a_\lambda +$

$+2\sum_{3\leq\kappa<\lambda\leq n} a_\kappa a_\lambda = 2a_1a_2 + 2\sum_{\lambda=3}^{n} a_1'a_{\lambda-1}' + 2\sum_{3\leq\kappa<\lambda\leq n} a_{\kappa-1}'a_{\lambda-1}' = 2a_1a_2 + 2\sum_{\lambda=2}^{n-1} a_1'a_\lambda' + 2\sum_{2\leq\kappa<\lambda\leq n-1} a_\kappa'a_\lambda' =$

$= 2a_1a_2 + 2\sum_{1\leq\kappa<\lambda\leq n-1} a_\kappa'a_\lambda'$

Επίσης, $(n-2)\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = (n-2)(a_1^2 + a_2^2) + (n-2)\sum_{k=3}^{n} a_k^2 = (n-2)(a_1 + a_2)^2 - 2(n-2)a_1a_2 +$

$+(n-2)\sum_{k=3}^{n} a_k^2 = (n-2)a_1'^2 + (n-2)\sum_{k=2}^{n-1} a_k'^2 - 2(n-2)a_1a_2 = (n-2)\sum_{k=1}^{n-1} a_k'^2 - 2(n-2)a_1a_2$.

Επομένως η σχέση $(n-1)b + (n-2)\sum_{k=1}^{n} a_k^2 < 2\sum_{\kappa<\lambda} a_\kappa a_\lambda$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση:

$$(n-1)b + (n-2)\sum_{k=1}^{n-1} a_k'^2 - 2(n-2)a_1a_2 < 2a_1a_2 + 2\sum_{1\leq\kappa<\lambda\leq n-1} a_\kappa'a_\lambda' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n-1)b + (n-2)\sum_{k=1}^{n-1} a_k'^2 - 2\sum_{1\leq\kappa<\lambda\leq n-1} a_\kappa'a_\lambda' < 2(n-1)a_1a_2.$$

Στο άθροισμα $\sum_{1\leq\kappa<\lambda\leq n-1}(a_\kappa'^2 + a_\lambda'^2)$ κάθε όρος εμφανίζεται $n-2$ φορές. (Το $a_\kappa'^2$ εμφανίζεται $n-1-\kappa$ φορές με τα $a_\lambda'^2$, όπου $\lambda > \kappa$ και $\kappa - 1$ φορές με τα $a_\lambda'^2$, όπου $\lambda < \kappa$). Επομένως, $\sum_{1\leq\kappa<\lambda\leq n-1}(a_\kappa'^2 + a_\lambda'^2) = (n-2)\sum_{k=1}^{n-1} a_k'^2$. Άρα $(n-2)\sum_{k=1}^{n-1} a_k'^2 - 2\sum_{1\leq\kappa<\lambda\leq n-1} a_\kappa a_\lambda = \sum_{1\leq\kappa<\lambda\leq n-1}(a_\kappa'^2 + a_\lambda'^2) -$

$-2\sum_{1\leq\kappa<\lambda\leq n-1} a_\kappa a_\lambda = \sum_{1\leq\kappa<\lambda\leq n-1}(a_\kappa' - a_\lambda')^2$.

Άρα η σχέση $(n-1)b + (n-2)\sum_{k=1}^{n-1} a_k'^2 - 2\sum_{1\leq\kappa<\lambda\leq n-1} a_\kappa'a_\lambda' < 2(n-1)a_1a_2$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση $(n-1)b + \sum_{1\leq\kappa<\lambda\leq n-1}(a_\kappa' - a_\lambda')^2 < 2(n-1)a_1a_2$. Αλλά $(n-1)b \leq (n-1)b + \sum_{1\leq\kappa<\lambda\leq n-1}(a_\kappa' - a_\lambda')^2$.

Επομένως $(n-1)b < 2(n-1)a_1a_2 \Rightarrow b < 2a_1a_2$.

## Άλυτες ασκήσεις

**1.** Αν $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ και $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$, να αποδείξετε ότι $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \le n \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ .

## 1.10 Το διώνυμο του Newton

Στην παράγραφο αυτή θα γενικεύσουμε τους τύπους $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ και $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ .

Έστω *n*, *k* δύο μη αρνητικοί ακέραιοι, με $k \le n$. Θέτουμε $\boldsymbol{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$. Το σύμβολο $\binom{n}{k}$ διαβάζεται **«*n* ανά *k*»**. Έτσι, $\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!2!} = \frac{6}{2} = 3$, $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6$ κτλ.

Αν $1 \le k \le n$, τότε

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\cdot(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Ο τύπος $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ είναι προφανώς καταλληλότερος για αριθμητικές εφαρμογές. Έτσι, $\binom{7}{4} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 7\cdot5 = 35$, ενώ με βάση τον ορισμό θα είχαμε $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{5040}{24\cdot6} = \frac{5040}{144} = 35$ .

Οι επόμενες ιδιότητες προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό του $\binom{n}{k}$.

**i)** $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, και **ii)** $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ και $0 \le k \le n$ .

### 1.10.1 Πρόταση (Pascal)

*Έστω n, k θετικοί ακέραιοι, με* $k \le n-1$. *Τότε ισχύει*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

**Απόδειξη:**

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} =$$

$$=\frac{(n-1)!}{k(k-1)!(n-1-k)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)(n-k-1)!}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left[\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right]=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\frac{n-k+k}{k(n-k)}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}. \quad \blacksquare$$

Με βάση την πρόταση του Pascal, οι αριθμοί $\binom{n}{k}$ μπορούν να υπολογιστούν σύμφωνα με το επόμενο τριγωνικό σχήμα:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0}=1 & & & & \\
 & & & \binom{1}{0}=1 & & \binom{1}{1}=1 & & & \\
 & & \binom{2}{0}=1 & & \binom{2}{1}=2 & & \binom{2}{2}=1 & & \\
 & \binom{3}{0}=1 & & \binom{3}{1}=3 & & \binom{3}{2}=3 & & \binom{3}{3}=1 & \\
\binom{4}{0}=1 & & \binom{4}{1}=4 & & \binom{4}{2}=6 & & \binom{4}{3}=4 & & \binom{4}{4}=1
\end{array}$$

Το σχήμα αυτό είναι γνωστό ως **τρίγωνο του Pascal**.

Από τη σχέση του Pascal μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι αριθμοί $\binom{n}{k}$ είναι θετικοί ακέραιοι.

**1.10.2 Πρόταση**

*Έστω λοιπόν n και k μη αρνητικοί ακέραιοι, με* $k \le n$. *Τότε ο αριθμός* $\binom{n}{k}$ *είναι θετικός ακέραιος.*

**Απόδειξη:** Εφαρμόζουμε επαγωγή επί του $m=k+n$. Αν $m=0$, τότε $n=k=0$ και συνεπώς $\binom{n}{k}=\binom{0}{0}=1\in\mathbb{Z}$. Αν $m=1$, τότε $n=1$ και $k=0$ και συνεπώς $\binom{n}{k}=\binom{n}{0}=1\in\mathbb{Z}$.

Έστω ότι $m\ge 2$. Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει αν $k+n=m-2$ ή $k+n=m-1$.

Τότε, αν $k=n$, θα έχουμε $\binom{n}{k}=\binom{n}{n}=1$, ενώ αν $k<n$, παίρνουμε $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$.

Αλλά $(n-1)+k=m-1$ και $(n-1)+(k-1)=m-2$. Από την επαγωγική υπόθεση παίρνουμε $\binom{n-1}{k}\in\mathbb{Z}$ και $\binom{n-1}{k-1}\in\mathbb{Z}$. Συνεπώς και $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\in\mathbb{Z}$. $\blacksquare$

Τώρα είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου:

**1.10.3 Πρόταση (Bernoulli[2])**

*Έστω n μη αρνητικός ακέραιος. Τότε ισχύει*

$$(\alpha+\beta)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\beta^k=\alpha^n+\binom{n}{1}\alpha^{n-1}\beta+\binom{n}{2}\alpha^{n-2}\beta^2+\cdots+\binom{n}{n-2}\alpha^2\beta^{n-2}+\binom{n}{n-1}\alpha\beta^{n-1}+\beta^n$$

Έτσι, $(\alpha+\beta)^4=\alpha^4+\binom{4}{1}\alpha^3\beta+\binom{4}{2}\alpha^2\beta^2+\binom{4}{3}\alpha\beta^3+\beta^4=\alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+\beta^4$,

$(\alpha+\beta)^5=\alpha^5+\binom{5}{1}\alpha^4\beta+\binom{5}{2}\alpha^3\beta^2+\binom{5}{3}\alpha^2\beta^3+\binom{5}{4}\alpha\beta^4+\beta^5=$

$=\alpha^5+5\alpha^4\beta+10\alpha^3\beta^2+10\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^4+\beta^5$ κτλ.

**Απόδειξη:** Για $n=0$ έχουμε: $(\alpha+\beta)^0=1=\binom{0}{0}\alpha^{0-0}\beta^0$, που προφανώς ισχύει.

Έστω ότι $(\alpha+\beta)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\beta^k$. Τότε $(\alpha+\beta)^{n+1}=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^n=$

$$=(\alpha+\beta)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\beta^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n+1-k}\beta^k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\beta^{k+1}=\alpha^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n+1-k}\beta^k+$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{(k+1)-1}\alpha^{n+1-(k+1)}\beta^{k+1}$$

Το άθροισμα $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{(k+1)-1}\alpha^{n+1-(k+1)}\beta^{k+1}$ εξαρτάται από τις τιμές που παίρνει το $k+1$.

Εφόσον το $k$ παίρνει τιμές από 0 έως $n$, το $k+1$ παίρνει τιμές από 1 έως $n+1$. Έτσι, θέτοντας $k$ όπου $k+1$, το άθροισμα $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{(k+1)-1}\alpha^{n+1-(k+1)}\beta^{k+1}$ γίνεται $\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\alpha^{n+1-k}\beta^k$.

Επομένως,

$$(\alpha+\beta)^{n+1}=\alpha^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n+1-k}\beta^k+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\alpha^{n+1-k}\beta^k=\alpha^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n+1-k}\beta^k+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\alpha^{n+1-k}\beta^k+\beta^{n+1}=\alpha^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]\alpha^{n+1-k}\beta^k+\beta^{n+1}\underset{\text{πρόταση 1.10.1}}{=}$$

$$=\alpha^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}\alpha^{n+1-k}\beta^k+\beta^{n+1}=\binom{n+1}{0}\alpha^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}\alpha^{n+1-k}\beta^k+\binom{n+1}{n+1}\beta^{n+1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\alpha^{n+1-k}\beta^k.\ \blacksquare$$

---

[2] Ο Newton γενίκευσε την πρόταση αυτή στο ανάπτυγμα της δυωνυμικής σειράς.

**Παρατήρηση:** Εφόσον $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, το άθροισμα $(\alpha+\beta)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\beta^k=\alpha^n+$ $+\binom{n}{1}\alpha^{n-1}\beta+\binom{n}{2}\alpha^{n-2}\beta^2+\cdots+\binom{n}{n-2}\alpha^2\beta^{n-2}+\binom{n}{1}\alpha\beta^{n-1}+\beta^n$ μπορεί να γραφεί και ως $(\alpha+\beta)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}\alpha^{n-k}\beta^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}\alpha^{n-k}\beta^{n-(n-k)}\underset{k\text{ αντί }n-k}{=}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}$.

Από το διώνυμο του Newton προκύπτουν πολλές ταυτότητες μεταξύ των διωνυμικών συντελεστών $\binom{n}{k}$.

### 1.10.4 Παράδειγμα

Να αποδείξετε τις επόμενες σχέσεις:

**(i)** $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$

**(ii)** $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots=2^{n-1}$

**(iii)** $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$

**(iv)** $1\cdot\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+3\cdot\binom{n}{3}+\cdots+n\cdot\binom{n}{n}=n\cdot 2^{n-1}$

**(v)** $\frac{1}{1}\cdot\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\cdot\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\cdot\binom{n}{2}++\cdots+\frac{1}{n+1}\cdot\binom{n}{n}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

**Απόδειξη: i)** Στο ανάπτυγμα του διωνύμου $(\alpha+\beta)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\beta^k$ θέτουμε $\alpha=\beta=1$.

Παίρνουμε $2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

**ii)** Στο ανάπτυγμα του διωνύμου $(\alpha+\beta)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\beta^k$ θέτουμε $\alpha=1$ και $\beta=-1$.

Παίρνουμε $0=0^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=\mathrm{A}-\mathrm{B}$, όπου $\mathrm{A}=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots$ και $\mathrm{B}=$ $\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots$ Από το προηγούμενο ζήτημα παίρνουμε $\mathrm{A}+\mathrm{B}=2^n$. Λύνοντας το σύστημα $\begin{cases}\mathrm{A}-\mathrm{B}=0\\ \mathrm{A}+\mathrm{B}=2^n\end{cases}$ παίρνουμε τις ζητούμενες σχέσεις.

**iii)** $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2\underset{\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}}{=}\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\binom{n}{2}\binom{n}{n-2}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}$.

Τώρα, ο συντελεστής του $x^n$ στο ανάπτυγμα $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}x^k$ του $(1+x)^{2n}$ είναι $\binom{2n}{n}$.

Αλλά, $(1+x)^{2n} =$ $(1+x)^n(1+x)^n$ και το $x^n$ προκύπτει στο δεξί μέλος της σχέσης αυτής από όλα τα γινόμενα $x^k$ και $x^{n-k}$ με συντελεστές $\binom{n}{k}$ και $\binom{n}{n-k}$ αντίστοιχα.

Επομένως $\binom{2n}{n}=\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\binom{n}{2}\binom{n}{n-2}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}$.

**iv)** Ο γενικός όρος του $1\cdot\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+3\cdot\binom{n}{3}+\cdots+n\cdot\binom{n}{n}$ είναι της μορφής

$$k\binom{n}{k}=\frac{k\cdot n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}=\frac{n(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}=n\binom{n-1}{k-1},$$ όπου $k>0$.

Επομένως

$$1\cdot\binom{n}{1}+2\cdot\binom{n}{2}+3\cdot\binom{n}{3}+\cdots+n\cdot\binom{n}{n}=n\left[\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}+\cdots+\binom{n-1}{n-1}\right]=n\cdot 2^{n-1}.$$

**v)** Ο γενικός όρος του $\frac{1}{1}\cdot\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\cdot\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\cdot\binom{n}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\cdot\binom{n}{n}$ είναι της μορφής

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{n!}{(k+1)k!(n-k)!}=\frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!}=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}.$$

Επομένως $\frac{1}{1}\cdot\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\cdot\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\cdot\binom{n}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\cdot\binom{n}{n}=\frac{1}{n+1}\left[\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\cdots+\binom{n+1}{n+1}\right]=$

$$=\frac{1}{n+1}\left[\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\cdots+\binom{n+1}{n+1}-1\right]=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

### Άλυτες ασκήσεις

**1.** Να υπολογιστεί ο συντελεστής του $x^{15}$ στο ανάπτυγμα του $(x-x^2)^9$.

**2.** Να αποδείξετε τις σχέσεις: **(i)** $1-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$ και

**(ii)** $\binom{n}{1}-\frac{1}{2}\binom{n}{2}+\frac{1}{3}\binom{n}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\binom{n}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$.

## 1.11 Οι μιγαδικοί αριθμοί

Γνωρίζουμε ότι $x^2\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως η εξίσωση $x^2=-1$ δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$. Για λόγους που δεν είναι άμεσα αντιληπτοί οι μαθηματικοί εισήγαγαν έναν νέο αριθμό, τη **φανταστική μονάδα i**, η οποία έχει την ιδιότητα $\mathbf{i}^2=-1$. Στην πραγματικότητα πέρασαν αρκετά χρόνια έως ότου οι μαθηματικοί αποδεχτούν τον νέο αριθμό και αφού προηγουμένως είχαν διαπιστώσει την χρησιμότητα του νέου συστήματος αριθμών που δημιουργούνταν.

Τα πραγματικά πολλαπλάσια $x\mathbf{i}$, $x\in\mathbb{R}$ του $\mathbf{i}$ ονομάζονται **φανταστικοί αριθμοί**. Συμβολίζουμε το σύνολό τους με **I**.

Οι φανταστικοί και οι πραγματικοί αριθμοί «παντρεύονται» μέσω της πρόσθεσης. Τα «παιδιά» τους είναι αριθμοί της μορφής $x + y\mathbf{i}$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$. Οι αριθμοί αυτοί λέγονται **μιγάδες** ή **μιγαδικοί**. Το σύνολό τους συμβολίζεται με $\mathbb{C}$.

Είναι δηλαδή, $\mathbb{C} = \{x + y\mathbf{i} \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Έστω $z = x + y\mathbf{i}$ ένας μιγαδικός αριθμός, όπου $x, y \in \mathbb{R}$. Ο αριθμός $x$ λέγεται το **πραγματικό μέρος** του $z$ και συμβολίζεται με $\mathrm{Re}(z)$. Ο αριθμός $y$ λέγεται το **φανταστικό μέρος** του $z$ και συμβολίζεται με $\mathrm{Im}(z)$.

Δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x_1 + y_1\mathbf{i}$ και $z_2 = x_2 + y_2\mathbf{i}$ είναι ίσοι αν έχουν το ίδιο πραγματικό και το ίδιο φανταστικό μέρος, δηλαδή $x_1 + y_1\mathbf{i} = x_2 + y_2\mathbf{i} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$.

Δεχόμαστε ότι $0 \cdot \mathbf{i} = 0 \in \mathbb{R}$. Έτσι, ένας πραγματικός αριθμός $x$ μπορεί να θεωρηθεί μιγαδικός αν θέσουμε $x = x + 0\mathbf{i}$.

Στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών ορίζουμε τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού ως εξής:

$$(x_1 + y_1\mathbf{i}) + (x_2 + y_2\mathbf{i}) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathbf{i} \text{ και}$$

$$(x_1 + y_1\mathbf{i}) \cdot (x_2 + y_2\mathbf{i}) = x_1x_2 + y_1y_2\mathbf{i}^2 + x_1y_2\mathbf{i} + x_1y_2\mathbf{i} = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_1y_2)\mathbf{i},$$

γιατί $\mathbf{i}^2 = -1$.

Οι μιγαδικοί αριθμοί έχουν ιδιότητες ανάλογες με αυτές των πραγματικών αριθμών που αναφέρονται στο αξίωμα 1.2.1.

**1.11.1 Πρόταση**

*Ισχύουν τα ακόλουθα:*

***i)*** $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, *για κάθε* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

***ii)*** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, *για κάθε* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

***iii)*** $z + 0 = z$, *για κάθε* $z \in \mathbb{C}$.

***iv)*** *Για κάθε μιγαδικό αριθμό z, υπάρχει ένας μιγαδικός* $-z$ *που λέγεται* ***αντίθετος*** *του z, με την ιδιότητα* $z + (-z) = 0$.

***v)*** $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$, *για κάθε* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

***vi)*** $z_1z_2 = z_2z_1$, *για κάθε* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

***vii)*** $z \cdot 1 = z$, *για κάθε* $z \in \mathbb{C}$.

***viii)*** *Για κάθε μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό z, υπάρχει ένας μιγαδικός* $z^{-1}$ *που λέγεται* ***αντίστροφος*** *του z, με την ιδιότητα* $zz^{-1} = 1$.

***ix)*** $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$, *για κάθε* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$*.(Επιμεριστική ιδιότητα).*

**Απόδειξη:** Θα αποδείξουμε μόνον το **(viii)**. (Τα υπόλοιπα είναι προφανή). Έστω λοιπόν $z = x + y\mathbf{i} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Τότε $x^2 + y^2 \neq 0$. Επομένως,

$z^{-1} = \dfrac{1}{x + y\mathbf{i}} = \dfrac{x - y\mathbf{i}}{(x + y\mathbf{i})(x - y\mathbf{i})} = \dfrac{x - y\mathbf{i}}{x^2 - y^2\mathbf{i}^2} \underset{\mathbf{i}^2=-1}{=} \dfrac{x - y\mathbf{i}}{x^2 + y^2} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - \dfrac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{i}$. Πράγματι,

εύκολα μπορεί να επαληθεύσει κανείς ότι $(x + y\mathbf{i})\left(\dfrac{x}{x^2 + y^2} - \dfrac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{i}\right) = 1$. ■

**Σχόλιο:** Εφόσον οι μιγαδικοί αριθμοί ικανοποιούν όλες τις βασικές αλγεβρικές ιδιότητες, οι οποίες ισχύουν για τους πραγματικούς αριθμούς (αξίωμα 1.2.1), όλες οι αλγεβρικές ταυτότητες της παραγράφου 1.2 ισχύουν και στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

### 1.11.2 Παραδείγματα

**1. (i)** Να προσδιοριστούν οι δυνάμεις $\mathbf{i}^n$, όπου $n \in \mathbb{Z}$.

**(ii)** Να υπολογιστεί το άθροισμα: $1 + \dfrac{1}{\mathbf{i}} + \dfrac{1}{\mathbf{i}^2} + \cdots + \dfrac{1}{\mathbf{i}^{2005}}$.

**(iii)** Να λυθούν στο $\mathbb{C}$ οι εξισώσεις: **(α)** $x^2 = -25$ και **(β)** $x^2 = -3$.

**Λύση: (i)** Παρατηρούμε ότι $\mathbf{i}^4 = (\mathbf{i}^2)^2 = (-1)^2 = 1$. Έτσι, αν $n = 4r,\ r \in \mathbb{Z}$ τότε $\mathbf{i}^n = (\mathbf{i}^4)^r = 1$. Αν $n = 4r + 1,\ r \in \mathbb{Z}$ τότε $\mathbf{i}^n = (\mathbf{i}^4)^r \mathbf{i} = \mathbf{i}$. Αν $n = 4r + 2,\ r \in \mathbb{Z}$ τότε $\mathbf{i}^n = (\mathbf{i}^4)^r \mathbf{i}^2 = \mathbf{i}^2 = -1$. Τέλος, αν $n = 4r + 3,\ r \in \mathbb{Z}$ τότε $\mathbf{i}^n = (\mathbf{i}^4)^r \mathbf{i}^3 = \mathbf{i}^3 = \mathbf{i}^2\mathbf{i} = -\mathbf{i}$.

**(ii)** Εφαρμόζουμε την ταυτότητα $1 + b + b^2 + \cdots + b^{n-1} = \dfrac{1 - b^n}{1 - b}$, όπου $b \neq 0$. Έχουμε:

$$1 + \frac{1}{\mathbf{i}} + \frac{1}{\mathbf{i}^2} + \cdots + \frac{1}{\mathbf{i}^{2005}} = \frac{1 - \dfrac{1}{\mathbf{i}^{2006}}}{1 - \dfrac{1}{\mathbf{i}}} \underset{\frac{1}{\mathbf{i}}=-\mathbf{i}}{=} \frac{1 - \dfrac{1}{(\mathbf{i}^4)^{501}\mathbf{i}^2}}{1 + \mathbf{i}} \underset{\mathbf{i}^2=-1}{=} \frac{2}{1 + \mathbf{i}} = \frac{2(1 - \mathbf{i})}{1 - \mathbf{i}^2} = \frac{2(1 - \mathbf{i})}{2} = 1 - \mathbf{i}.$$

**(iii) (α)** $x^2 = -25 = (5\mathbf{i})^2 \Leftrightarrow x = \pm 5\mathbf{i}$ και **(β)** $x^2 = -3 = (\mathbf{i}\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow x = \pm \mathbf{i}\sqrt{3}$.

**2.** Δείξτε ότι αν $a, b, c \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$ και $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, τότε οι λύσεις στο $\mathbb{C}$ της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$ δίνονται από τον τύπο: $\rho_{1,2} = \dfrac{-b \pm \mathbf{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

**Απόδειξη:** Έχουμε $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{|\Delta|}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\mathbf{i}\dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a} + \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)\left(x + \dfrac{b}{2a} - \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{2a} - \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ ή $x = -\dfrac{b}{2a} + \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

Για παράδειγμα, η εξίσωση $x^2+x+1=0$ έχει ρίζες τους αριθμούς $\dfrac{-1\pm\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$.

**3.** Να βρεθούν στο $\mathbb{C}$ οι λύσεις της εξίσωσης $z^2=7-24\mathbf{i}$.

**Λύση:** Έστω $z=x+y\mathbf{i}$, όπου $x,y\in\mathbb{R}$. Τότε $z^2=x^2-y^2+2xy\mathbf{i}$. Επομένως θα έχουμε τις σχέσεις: $\begin{cases} x^2-y^2=7 & (1)\\ 2xy=-24 & (2)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2-y^2)^2=49\\ 4x^2y^2=576\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4+y^4-2x^2y^2=49\\ 4x^2y^2=576\end{cases}$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε

$x^4+y^4+2x^2y^2=625 \Leftrightarrow (x^2+y^2)^2=25^2 \underset{x^2+y^2\geq 0}{\Leftrightarrow} x^2+y^2=25$. (3)

Από τις σχέσεις (1) και (3) έχουμε το σύστημα: $\begin{cases} x^2-y^2=7\\ x^2+y^2=25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=16\\ y^2=9\end{cases}$.

Εφόσον $2xy=-24<0$, θα έχουμε $x=4$ και $y=-3$, ή $x=-4$ και $y=3$. Πράγματι, εύκολα κανείς επαληθεύει ότι $\left(\pm(4-3\mathbf{i})\right)^2=7-24\mathbf{i}$.

**4.** Να βρεθούν στο $\mathbb{C}$ οι λύσεις της εξίσωσης $z^2-(2+\mathbf{i})z-1+7\mathbf{i}=0$.

**Λύση:** Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $(2+\mathbf{i})^2-4(-1+7\mathbf{i})=4-1+4\mathbf{i}+4-28\mathbf{i}=7-24\mathbf{i}$.

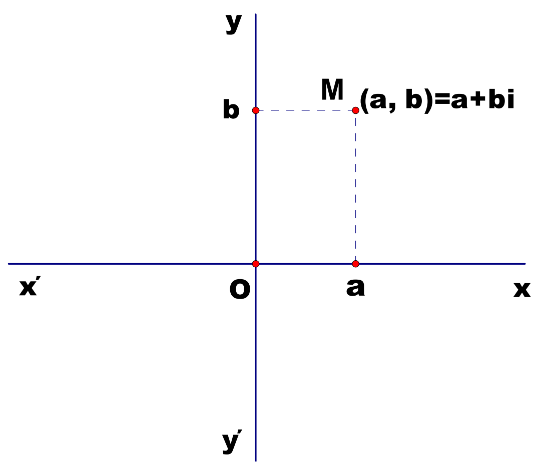
Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα, οι τετραγωνικές ρίζες της διακρίνουσας είναι οι αριθμοί $\pm(4-3\mathbf{i})$.

Επομένως, $z=\dfrac{2+\mathbf{i}\pm(4-3\mathbf{i})}{2}=\begin{cases} 3-\mathbf{i}\\ \text{ή}\\ -1+2\mathbf{i}\end{cases}$

## 1.12 Γεωμετρική παράσταση των μιγαδικών αριθμών

Θεωρούμε το καρτεσιανό επίπεδο $xOy$. Αν $z=a+b\mathbf{i}$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός, τότε το σημείο $(a,b)$ είναι η **εικόνα** του $z$ στο καρτεσιανό επίπεδο.

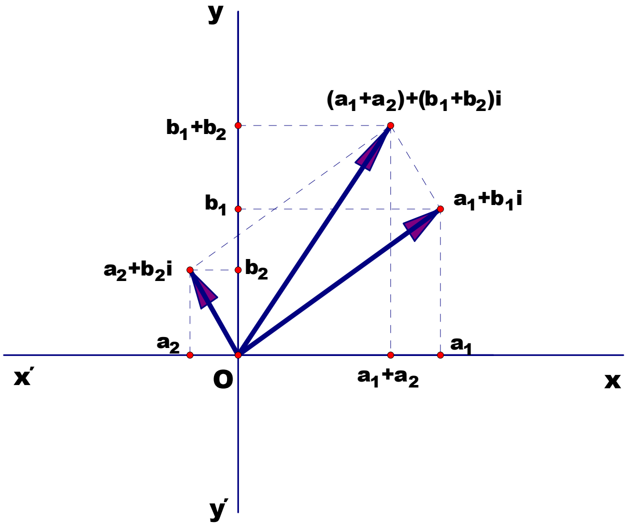
Σε κάθε λοιπόν μιγαδικό αριθμό αντιστοιχεί ένα μοναδικό σημείο του επιπέδου με τετμημένη το πραγματικό μέρος του μιγαδικού και τεταγμένη το φανταστικό του μέρος. Αντίστροφα, αν $M$ είναι ένα σημείο του επιπέδου με συντεταγμένες $(a,b)$, τότε αυτό ορίζει



έναν μοναδικό μιγαδικό αριθμό, τον $z = a + b\mathbf{i}$.

Είναι προφανές ότι οι πραγματικοί αριθμοί απεικονίζονται στα σημεία με τεταγμένη μηδέν. Αυτά αποτελούν τον άξονα $x'x$. Γι' αυτό και ο άξονας $x'x$ λέγεται **άξονας των πραγματικών αριθμών**. Παρόμοια οι φανταστικοί αριθμοί απεικονίζονται στα σημεία του άξονα $y'y$, ο οποίος γι' αυτό το λόγο λέγεται **άξονας των φανταστικών αριθμών**. Ολόκληρο το καρτεσιανό επίπεδο $xOy$ λέγεται **επίπεδο των μιγαδικών αριθμών** ή **μιγαδικό επίπεδο**.

Αντί του σημείου $M$ με συντεταγμένες $(a,b)$ θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ ως εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z = a + b\mathbf{i}$. Όπως εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς, **το άθροισμα δύο μιγαδικών αριθμών αντιστοιχεί στο άθροισμα των αντίστοιχων διανυσμάτων**.




## 1.13 Συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί

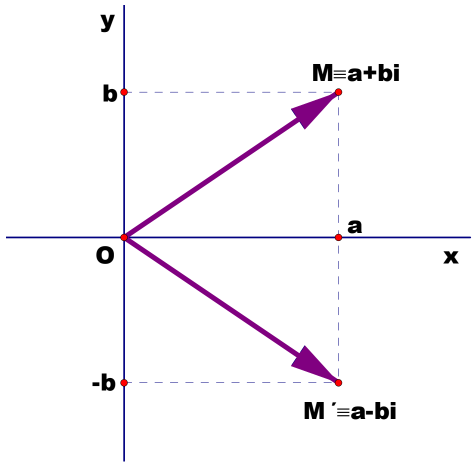
### 1.13.1 Ορισμός

*Αν $z = a + b\mathbf{i}$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός, όπου $a,b \in \mathbb{R}$, τότε θέτουμε $\overline{z} = a - b\mathbf{i}$. Ο αριθμός $\overline{z}$ ονομάζεται **συζυγής του z**. Είναι δηλαδή $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$ και $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$.*

### 1.13.2 Πόρισμα

*Έστω $z = a + b\mathbf{i}$. Τότε $z \in \mathbb{R}$ αν και μόνον αν $z = \overline{z}$.*

**Απόδειξη:** Άμεση, αφού $z \in \mathbb{R}$ αν και μόνον αν $\mathrm{Im}(z) = 0$. ■




**Σχόλιο:** Αν $M$ είναι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z = a + b\mathbf{i}$ στο μιγαδικό επίπεδο, τότε η εικόνα του $\overline{z} = a - b\mathbf{i}$ είναι το συμμετρικό του $M$ ως προς τον άξονα $x'x$.

Στη συνέχεια αναφέρουμε ορισμένες βασικές ιδιότητες των συζυγών μιγαδικών αριθμών.

### 1.13.3 Πρόταση

*Ισχύουν τα ακόλουθα:*

***(i)*** $\overline{(\overline{z})} = z$, *για κάθε* $z \in \mathbb{C}$, ***(ii)*** $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, *για κάθε* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

***(iii)*** $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$, *για κάθε* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *και* ***(iv)*** $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, *για κάθε* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *με* $z_2 \neq 0$.

**Απόδειξη:** Η **(i)** είναι προφανής.

Έστω $z_1 = a_1 + b_1\mathbf{i}$ και $z_2 = a_2 + b_2\mathbf{i}$, όπου $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε:

**(ii)** $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathbf{i}} = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)\mathbf{i} = (a_1 - b_1\mathbf{i}) + (a_2 - b_2\mathbf{i}) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

**(iii)** $\overline{z_1 z_2} = \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\mathbf{i}} = (a_1a_2 - b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)\mathbf{i} = (a_1 - b_1\mathbf{i})(a_2 - b_2\mathbf{i}) = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

**(iv)** Προφανώς $z_2 \neq 0 \Leftrightarrow \overline{z_2} \neq 0$. Έχουμε

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{a_1 + b_1\mathbf{i}}{a_2 + b_2\mathbf{i}}\right)} = \overline{\left(\frac{(a_1 + b_1\mathbf{i})(a_2 - b_2\mathbf{i})}{a_2^2 + b_2^2}\right)} = \overline{\left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{-a_1b_2 + a_2b_1}{a_2^2 + b_2^2}\mathbf{i}\right)} =$$

$$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_2^2 + b_2^2}\mathbf{i}$$

και $\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \dfrac{a_1 - b_1\mathbf{i}}{a_2 - b_2\mathbf{i}} = \dfrac{(a_1 - b_1\mathbf{i})(a_2 + b_2\mathbf{i})}{a_2^2 + b_2^2} = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \dfrac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_2^2 + b_2^2}\mathbf{i}$. Επομένως, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$. ■

**Σχόλιο:** Οι σχέσεις **(ii)** και **(iii)** της προηγούμενης πρότασης γενικεύονται για περισσότερους από δύο αριθμούς. Έτσι, μπορεί κανείς να αποδείξει με επαγωγή ότι $\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} =$ $= \overline{z_1} + \overline{z_2} + \cdots + \overline{z_n}$ και $\overline{z_1 z_2 \cdots z_n} = \overline{z_1}\,\overline{z_2} \cdots \overline{z_n}$, για κάθε *n* μιγαδικούς αριθμούς.

### 1.13.4 Παραδείγματα

**1.** Να υπολογίσετε τους συζυγείς των μιγαδικών αριθμών: $\mathbf{i}^3$, $\dfrac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}$, $\dfrac{\left(-1+\mathbf{i}\sqrt{2}\right)^2}{\left(1-\mathbf{i}\sqrt{3}\right)^3}$.

**Λύση:** $\overline{(\mathbf{i}^3)} = \overline{\mathbf{i}}^3 = (-\mathbf{i})^3 = \mathbf{i}$, $\overline{\left(\dfrac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}\right)} = \dfrac{\overline{1+\mathbf{i}}}{\overline{1-\mathbf{i}}} = \dfrac{1-\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}} = \dfrac{(1-\mathbf{i})^2}{2} = \dfrac{1-1-2\mathbf{i}}{2} = -\mathbf{i}$,

$$\overline{\left[\frac{\left(-1+\mathbf{i}\sqrt{2}\right)^2}{\left(1-\mathbf{i}\sqrt{3}\right)^3}\right]}=\frac{\overline{\left(-1+\mathbf{i}\sqrt{2}\right)}^2}{\overline{\left(1-\mathbf{i}\sqrt{3}\right)}^3}=\frac{\left(-1-\mathbf{i}\sqrt{2}\right)^2}{\left(1+\mathbf{i}\sqrt{3}\right)^3}=\frac{-1+2\mathbf{i}\sqrt{2}}{-8}=\frac{1}{8}-\frac{\mathbf{i}\sqrt{2}}{4}\mathbf{i}.$$

**2.** Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+\overline{z})$ και $\mathrm{Im}(z)=\frac{\mathbf{i}}{2}(\overline{z}-z)$, για κάθε μιγαδικό αριθμό *z*.

**Απόδειξη:** $z=\mathrm{Re}(z)+\mathbf{i}\,\mathrm{Im}(z)$ και $\overline{z}=\mathrm{Re}(z)-\mathbf{i}\,\mathrm{Im}(z)$. Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει το συμπέρασμα.

**3.** Να αποδείξετε ότι αν $z_1,z_2\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ με $z_1+z_2\in\mathbb{R}$ και $z_1z_2\in\mathbb{R}$, τότε $z_1=\overline{z}_2$.

**Απόδειξη:** Έστω $z_1=a_1+b_1\mathbf{i}$ και $z_2=a_2+b_2\mathbf{i}$, όπου $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$. Εφόσον $z_2\notin\mathbb{R}$, $b_2\neq 0$. Έχουμε τις σχέσεις:

$$\begin{cases}\mathrm{Im}(z_1z_2)=a_1b_2+a_2b_1=0\\ \mathrm{Im}(z_1+z_2)=b_1+b_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1b_2+a_2b_1=0\\ b_1=-b_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1b_2-a_2b_2=0\\ b_1=-b_2\end{cases}\underset{b_2\neq 0}{\Leftrightarrow}\begin{cases}a_1=a_2\\ b_1=-b_2\end{cases}$$

Επομένως, $z_1=a_1+b_1\mathbf{i}=a_2-b_2\mathbf{i}=\overline{z}_2$.

## 1.14 Μέτρο μιγαδικού αριθμού

### 1.14.1 Ορισμός

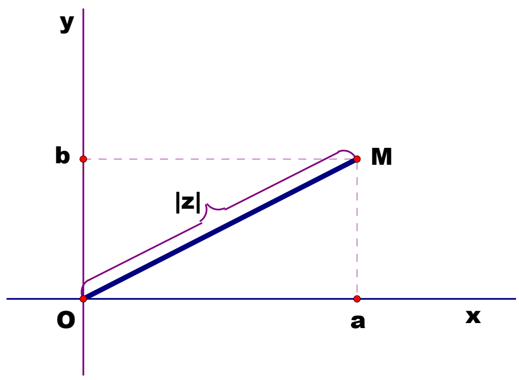
*Αν $z=a+b\mathbf{i}$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός, όπου $a,b\in\mathbb{R}$, τότε θέτουμε $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.*

*Προφανώς $|z|=|\overline{z}|=|-z|$.*

*Ο μη αρνητικός πραγματικός αριθμός $|z|$ λέγεται* ***μέτρο του z****.*

**Σχόλια:** **1.** Αν $z\in\mathbb{R}$ τότε το μέτρο του *z* συμπίπτει με την απόλυτη τιμή του.

**2.** Το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού *z* ισούται με το μήκος του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$, όπου *M* είναι η εικόνα του *z* στο μιγαδικό επίπεδο.




Η επόμενη πρόταση περιγράφει τις βασικές ιδιότητες του μέτρου μιγαδικών αριθμών.

**1.14.2 Πρόταση**

*Ισχύουν τα εξής:*

***(i)*** $|z|^2 = z\overline{z}$, *για κάθε* $z \in \mathbb{C}$, ***(ii)*** $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, *για κάθε* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

***(iii)*** $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, *για κάθε* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *με* $z_2 \neq 0$,

***(iv)*** $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, *για κάθε* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *(τριγωνική ανισότητα).*

**Απόδειξη:** **(i)** Έστω $z = a + b\mathbf{i}$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός, όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε $|z|^2 = a^2 + b^2 = (a + b\mathbf{i})(a - b\mathbf{i}) = z\overline{z}$.

**(ii)** Έστω $z_1 = a_1 + b_1\mathbf{i}$ και $z_2 = a_2 + b_2\mathbf{i}$, όπου $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Τότε $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\overline{(z_1 z_2)} = z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2} = (z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2$, σύμφωνα με το **(i)**. Επομένως, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

**(iii)** $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|^2 = \dfrac{z_1}{z_2} \cdot \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{z_1}{z_2} \cdot \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \dfrac{z_1\overline{z_1}}{z_2\overline{z_2}} = \dfrac{|z_1|^2}{|z_2|^2}$. Επομένως, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

**(iv)** Η τριγωνική ανισότητα έχει αποδειχθεί στο παράδειγμα 1.6.3.1. ■

**Σημείωση:** Στο σύνολο $\mathbb{C}$ δεν ισχύει η σχέση $|z|^2 = z^2$. Για παράδειγμα, αν $z = \mathbf{i}$, τότε $z^2 = -1$ και $|z|^2 = 1$.

**1.14.3 Παραδείγματα**

**1.** Να βρεθούν τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών $\dfrac{3-4\mathbf{i}}{1+2\mathbf{i}}$, $\dfrac{\left(\sqrt{2}+\mathbf{i}\right)^3}{\mathbf{i}\left(1-\mathbf{i}\sqrt{3}\right)^2}$ και $\left(\dfrac{2\mathbf{i}\left(\sqrt{3}+\mathbf{i}\sqrt{5}\right)\left(1-\mathbf{i}\sqrt{3}\right)}{4-\mathbf{i}\sqrt{3}}\right)^4$.

**Λύση:** $\left|\dfrac{3-4\mathbf{i}}{1+2\mathbf{i}}\right| = \dfrac{|3-4\mathbf{i}|}{|1+2\mathbf{i}|} = \dfrac{\sqrt{3^2+(-4)^2}}{\sqrt{1+2^2}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{5}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$, $\left|\dfrac{\left(\sqrt{2}+\mathbf{i}\right)^3}{\mathbf{i}\left(1-\mathbf{i}\sqrt{3}\right)^2}\right| = \dfrac{|\sqrt{2}+\mathbf{i}|^3}{|\mathbf{i}||1-\mathbf{i}\sqrt{3}|^2} =$

$= \dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^3}{1\cdot\left(\sqrt{4}\right)^2} = \dfrac{5\sqrt{5}}{4}$ και $\left|\left(\dfrac{2\mathbf{i}\left(\sqrt{3}+\mathbf{i}\sqrt{5}\right)\left(1-\mathbf{i}\sqrt{3}\right)}{4-\mathbf{i}\sqrt{3}}\right)^4\right| = \dfrac{|2\mathbf{i}|^4|\sqrt{3}+\mathbf{i}\sqrt{5}|^4|1-\mathbf{i}\sqrt{3}|^4}{|4-\mathbf{i}\sqrt{3}|^4} =$

$= \dfrac{|2\mathbf{i}|^4|\sqrt{3}+\mathbf{i}\sqrt{5}|^4|1-\mathbf{i}\sqrt{3}|^4}{|4-\mathbf{i}\sqrt{3}|^4} = \dfrac{16\cdot\left(\sqrt{3+5}\right)^4\left(\sqrt{1+3}\right)^4}{\left(\sqrt{16+3}\right)^4} = \dfrac{16\cdot 8^2\cdot 4^2}{19^2} = \dfrac{2^{14}}{19^2}$.

**2.** Δείξτε ότι για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει: $|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$.

**Απόδειξη:** $|z_1 \pm z_2|^2 = (z_1 \pm z_2)\overline{(z_1 \pm z_2)} = (z_1 \pm z_2)(\overline{z}_1 \pm \overline{z}_2) = z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 \pm z_1\overline{z}_2 \pm \overline{z}_1 z_2 =$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm (z_1\overline{z}_2 + \overline{(z_1\overline{z}_2)}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2)$.

**3.** Δείξτε ότι για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει: $|z_1 + z_2|^2 \leq (1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)$.

**Απόδειξη:** $|z_1 + z_2|^2 \leq (1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2) \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2) \leq 1 + |z_1|^2 + |z_2|^2 +$

$+ |z_1|^2 |z_2|^2 \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2) \leq 1 + |z_1|^2 |\overline{z}_2|^2 \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2) \leq 1 + |z_1\overline{z}_2|^2 \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2) \leq$

$\leq 1 + \left(\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2)\right)^2 + \left(\operatorname{Im}(z_1\overline{z}_2)\right)^2 \Leftrightarrow 1 + \left(\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2)\right)^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2) + \left(\operatorname{Im}(z_1\overline{z}_2)\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(1 - \operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2)\right)^2 + \left(\operatorname{Im}(z_1\overline{z}_2)\right)^2 \geq 0$, που ισχύει.

**4.** Δείξτε ότι για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και $\lambda > 0$ ισχύει: $|z_1 + z_2|^2 \leq (1+\lambda)|z_1|^2 + \left(1 + \dfrac{1}{\lambda}\right)|z_2|^2$.

**Απόδειξη:** $|z_1 + z_2|^2 \leq (1+\lambda)|z_1|^2 + \left(1 + \dfrac{1}{\lambda}\right)|z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2) \leq$

$\leq |z_1|^2 + \lambda|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dfrac{1}{\lambda}|z_2|^2 \Leftrightarrow 0 \leq \lambda|z_1|^2 + \dfrac{1}{\lambda}|z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \leq |\sqrt{\lambda} z_1|^2 + \left|\dfrac{z_2}{\sqrt{\lambda}}\right|^2 - 2\operatorname{Re}\left(\sqrt{\lambda} z_1 \overline{\left(\dfrac{z_2}{\sqrt{\lambda}}\right)}\right) \Leftrightarrow 0 \leq \left|\sqrt{\lambda} z_1 - \dfrac{z_2}{\sqrt{\lambda}}\right|^2$, που ισχύει.

**5. (i)** Δείξτε ότι αν $|z| = 1$, τότε $z^{-1} = \overline{z}$.

**(ii)** Δείξτε ότι αν $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ με $|z_1| = |z_2| = \cdots = |z_n| = 1$, τότε

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \cdots + \frac{1}{z_n}\right|.$$

**Απόδειξη: (i)** Έχουμε $z\overline{z} = |z|^2 = 1$. Επομένως $z^{-1} = \overline{z}$.

**(ii)** Με βάση το **(i)** έχουμε: $\left|\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \cdots + \dfrac{1}{z_n}\right| = |\overline{z}_1 + \overline{z}_2 + \cdots + \overline{z}_n| = |\overline{(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)}| =$

$= |z_1 + z_2 + \cdots + z_n|$.

**6.** Αν $\left|\dfrac{z_1 - \mathbf{i}}{z_1 + \mathbf{i}}\right| + \left|\dfrac{z_2 - \mathbf{i}}{z_2 + \mathbf{i}}\right| + \cdots + \left|\dfrac{z_n - \mathbf{i}}{z_n + \mathbf{i}}\right| < 1$, τότε $\left|\dfrac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n - \mathbf{i}}{z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \mathbf{i}}\right| < 1$.

**Απόδειξη:** Αρχικά θα αποδείξουμε ότι αν $z = a + b\mathbf{i}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) είναι ένας μιγαδικός αριθμός, τότε

$$\left|\frac{z - \mathbf{i}}{z + \mathbf{i}}\right| < 1 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) > 0.$$

Πράγματι, $\left|\frac{z-\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}}\right|<1 \Leftrightarrow |z-\mathbf{i}|^2<|z+\mathbf{i}|^2 \Leftrightarrow |z|^2+1-2\operatorname{Re}(z\overline{\mathbf{i}})<|z|^2+1+2\operatorname{Re}(z\overline{\mathbf{i}}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0<\operatorname{Re}(-z\mathbf{i}) \Leftrightarrow 0<\operatorname{Re}(b-a\mathbf{i}) \Leftrightarrow 0<b \Leftrightarrow 0<\operatorname{Im}(z)$.

Από τη σχέση $\left|\frac{z_1-\mathbf{i}}{z_1+\mathbf{i}}\right|+\left|\frac{z_2-\mathbf{i}}{z_2+\mathbf{i}}\right|+\cdots+\left|\frac{z_n-\mathbf{i}}{z_n+\mathbf{i}}\right|<1$ προκύπτει ότι $\left|\frac{z_k-\mathbf{i}}{z_k+\mathbf{i}}\right|<1$, για κάθε $k=1,2,\ldots,n$. Επομένως, $\operatorname{Im}(z_k)>0$, για κάθε $k=1,2,\ldots,n$.

Συνεπώς $\operatorname{Im}(z_1+z_2+\cdots+z_n)=\operatorname{Im}(z_1)+\operatorname{Im}(z_2)+\cdots+\operatorname{Im}(z_n)>0$ και άρα

$\left|\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n-\mathbf{i}}{z_1+z_2+\cdots+z_n+\mathbf{i}}\right|<1$.

**7.** Έστω $z\neq\pm\mathbf{i}$. Τότε ο αριθμός $\frac{z-\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}}$ είναι μη μηδενικός φανταστικός αν και μόνον αν $|z|=1$.

**Απόδειξη:** Έστω $\frac{z-\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}}=a\mathbf{i}$, όπου $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Τότε $z-\mathbf{i}=za\mathbf{i}-a \Leftrightarrow z(1-a\mathbf{i})=(\mathbf{i}-a) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\frac{-a+\mathbf{i}}{1-a\mathbf{i}}$. Επομένως, $|z|=\frac{|-a+\mathbf{i}|}{|1-a\mathbf{i}|}=\frac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{1+a^2}}=1$.

Αντίστροφα, έστω $|z|=1$. Τότε $\frac{z-\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}}=\frac{(z-\mathbf{i})(\overline{z}-\mathbf{i})}{(z+\mathbf{i})(\overline{z}-\mathbf{i})}=\frac{z\overline{z}-1-2\operatorname{Re}(z)}{|z+\mathbf{i}|^2}\mathbf{i}\underset{z\overline{z}=1}{=}-\frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z+\mathbf{i}|^2}\mathbf{i}\in\mathrm{I}$.

Αν $\operatorname{Re}(z)=0$, τότε $z=x\mathbf{i}$, όπου $x\in\mathbb{R}$ και επειδή $|z|=|x|=1$, παίρνουμε $z=\pm\mathbf{i}$, άτοπο. Άρα $\frac{z-\mathbf{i}}{z+\mathbf{i}}\in\mathrm{I}\setminus\{0\}$.

**8.** Έστω $z_1,z_2\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Τότε ισχύουν τα εξής: **(i)** $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2| \Leftrightarrow z_1\overline{z}_2>0 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}>0$ και **(ii)** $|z_1+z_2|=||z_1|-|z_2|| \Leftrightarrow z_1\overline{z}_2<0 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}<0$.

**Απόδειξη:** **(i)** Αρχικά θα αποδείξουμε ότι αν $z=x+y\mathbf{i}\neq 0$ με $x,y\in\mathbb{R}$, τότε $\operatorname{Re}(z)=|z| \Leftrightarrow z>0$. Πράγματι, $\operatorname{Re}(z)=|z| \Leftrightarrow x=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow x^2=x^2+y^2 \Leftrightarrow y=0$.

Επομένως $x=\sqrt{x^2}=|x|>0$ (αν $x=0$, τότε $z=x+y\mathbf{i}=0$, άτοπο). Άρα $z=x>0$.

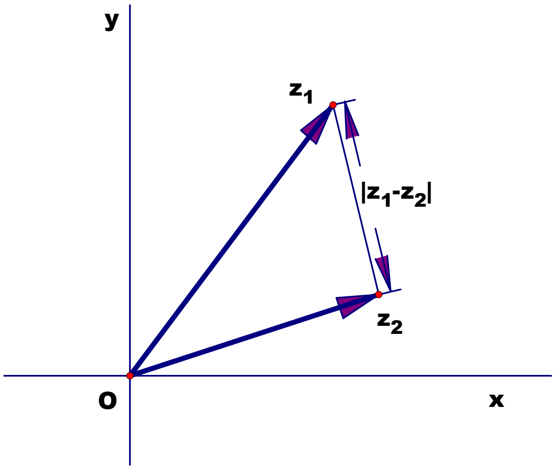
Αντίστροφα, αν $z\in\mathbb{R}^+$, τότε προφανώς $\operatorname{Re}(z)=z=|z|$.

Επειδή $z_1,z_2\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, ο αριθμός $z_1\overline{z}_2$ δεν είναι μηδέν.

Τώρα, έχουμε: $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2| \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1z_2| \Leftrightarrow |z_1|^2+|z_2|^2+$

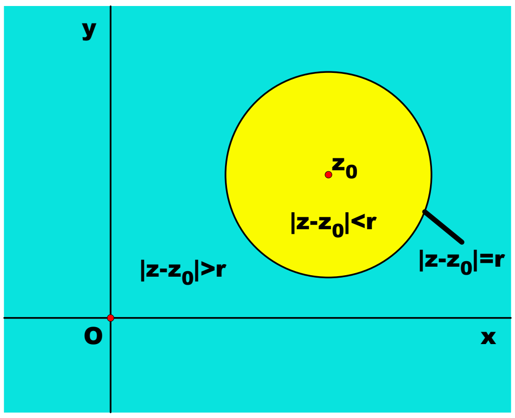
$+2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2)=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1\overline{z}_2| \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2)=|z_1\overline{z}_2| \Leftrightarrow z_1\overline{z}_2>0 \Leftrightarrow \frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2}>0 \Leftrightarrow \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2}>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2} > 0$. Η απόδειξη του **(ii)** είναι ανάλογη.




Ας ξαναγυρίσουμε στη γεωμετρική εποπτεία. Έχουμε ήδη δει ότι το άθροισμα δύο μιγαδικών αριθμών αντιστοιχεί στο άθροισμα των αντίστοιχων διανυσμάτων στο μιγαδικό επίπεδο. Επίσης, το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού ισούται με το μήκος του αντίστοιχου διανύσματος. Αν λοιπόν $z_1$ και $z_2$ είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί, τότε ο αριθμός $|z_1 - z_2|$ ισούται με την απόσταση των αντίστοιχων σημείων στο μιγαδικό επίπεδο.

Θεωρούμε τώρα έναν σταθερό μιγαδικό αριθμό $z_0$. Το σύνολο των μιγαδικών $z$ με την ιδιότητα $|z - z_0| = r$, όπου $r$ θετικός πραγματικός αριθμός, αντιστοιχεί στο σύνολο των σημείων που απέχουν από την εικόνα του $z_0$ απόσταση ίση με $r$. Είναι δηλαδή κύκλος με κέντρο την εικόνα του $z_0$ και ακτίνα $r$. Το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών $z$ με την ιδιότητα $|z - z_0| < r$ αποτελεί τό εσωτερικό του κύκλου αυτού. Οι εικόνες των μιγαδικών $z$ με την ιδιότητα $|z - z_0| > r$ αποτελούν το εξωτερικό του.




### 1.14.4 Παραδείγματα

**1.** Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z$ που ικανοποιούν τη σχέση $|z - 2\mathbf{i}|^2 + |z - 1|^2 = 4$.

**Λύση:** Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2)$ του παραδείγματος 1.14.3.2.

Έχουμε $|z - 2\mathbf{i}|^2 + |z - 1|^2 = 4 \Leftrightarrow (z - 2\mathbf{i})(\overline{z} + 2\mathbf{i}) + (z - 1)(\overline{z} - 1) = 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z\bar{z}+4+2z\mathbf{i}-2\mathbf{i}\bar{z}-2\bar{z}\mathbf{i}+z\bar{z}-z-\bar{z}+1=4\Leftrightarrow$$

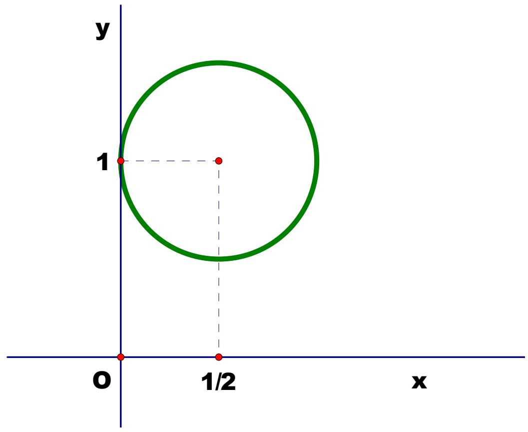
$$\Leftrightarrow 2|z|^2+z(2\mathbf{i}-1)-\bar{z}(2\mathbf{i}+1)=-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|z|^2+z(2\mathbf{i}-1)+\bar{z}(-2\mathbf{i}-1)=-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|z|^2+z(2\mathbf{i}-1)+\overline{\left(z(2\mathbf{i}-1)\right)}=-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z|^2+z\left(\mathbf{i}-\frac{1}{2}\right)+\overline{\left(z\left(\mathbf{i}-\frac{1}{2}\right)\right)}=-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z|^2+2\,\mathrm{Re}\left[z\left(\mathbf{i}-\frac{1}{2}\right)\right]=-1\Leftrightarrow$$




$$\Leftrightarrow |z|^2+2\,\mathrm{Re}\left[z\overline{\left(-\frac{1}{2}-\mathbf{i}\right)}\right]=-1\Leftrightarrow$$

$$|z|^2+2\,\mathrm{Re}\left[z\overline{\left(-\frac{1}{2}-\mathbf{i}\right)}\right]+\left|-\frac{1}{2}-\mathbf{i}\right|^2=-1+\left|-\frac{1}{2}-\mathbf{i}\right|^2\Leftrightarrow\left|z-\frac{1}{2}-\mathbf{i}\right|^2=-1+\frac{1}{4}+1\Leftrightarrow$$

$\left|z-\left(\frac{1}{2}+\mathbf{i}\right)\right|^2=\frac{1}{2^2}$. Έχουμε δηλαδή κύκλο με κέντρο το σημείο $\frac{1}{2}+\mathbf{i}$ και ακτίνα $\frac{1}{2}$.

**2. (Απολλώνιος κύκλος)** Έστω $z_1\neq z_2$ και $0<\lambda<1$. Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των των μιγαδικών αριθμών $z$ που ικανοποιούν τη σχέση $|z-z_1|=\lambda|z-z_2|$.

**Λύση:** Έχουμε $|z-z_1|=\lambda|z-z_2|\Leftrightarrow|z-z_1|^2=\lambda^2|z-z_2|^2\Leftrightarrow|z|^2+|z_1|^2-2\,\mathrm{Re}(z\bar{z}_1)=$
$=\lambda^2|z|^2+\lambda^2|z_2|^2-2\lambda^2\,\mathrm{Re}(z\bar{z}_2)\Leftrightarrow(1-\lambda^2)|z|^2-2\,\mathrm{Re}(z\bar{z}_1)+2\lambda^2\,\mathrm{Re}(z\bar{z}_2)=$
$=\lambda^2|z_2|^2-|z_1|^2\Leftrightarrow(1-\lambda^2)|z|^2-2\,\mathrm{Re}(z\overline{(z_1-\lambda^2z_2)})=\lambda^2|z_2|^2-|z_1|^2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow|z|^2-2\,\mathrm{Re}\left[z\cdot\overline{\left(\frac{z_1-\lambda^2z_2}{1-\lambda^2}\right)}\right]=\frac{\lambda^2|z_2|^2-|z_1|^2}{1-\lambda^2}\Leftrightarrow|z|^2-2\,\mathrm{Re}\left[z\cdot\overline{\left(\frac{z_1-\lambda^2z_2}{1-\lambda^2}\right)}\right]+\left|\frac{z_1-\lambda^2z_2}{1-\lambda^2}\right|^2=$$

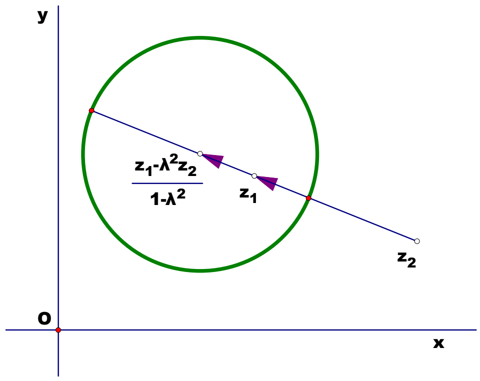
$$=\frac{\lambda^2|z_2|^2-|z_1|^2}{1-\lambda^2}+\left|\frac{z_1-\lambda^2z_2}{1-\lambda^2}\right|^2\Leftrightarrow\left|z-\frac{z_1-\lambda^2z_2}{1-\lambda^2}\right|^2=\frac{\lambda^2|z_2|^2-|z_1|^2}{1-\lambda^2}+\frac{|z_1-\lambda^2z_2|^2}{(1-\lambda^2)^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|z-\frac{z_1-\lambda^2z_2}{1-\lambda^2}\right|^2=\frac{\lambda^2|z_2|^2-|z_1|^2-\lambda^4|z_2|^2+\lambda^2|z_1|^2+|z_1|^2+\lambda^4|z_2|^2-2\lambda^2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)}{(1-\lambda^2)^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|z-\frac{z_1-\lambda^2z_2}{1-\lambda^2}\right|^2=\frac{\lambda^2(|z_1|^2+|z_1|^2-2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2))}{(1-\lambda^2)^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|z-\frac{z_1-\lambda^2z_2}{1-\lambda^2}\right|^2=\frac{\lambda^2|z_1-z_1|^2}{(1-\lambda^2)^2}$$

Η εξίσωση $\left|z-\frac{z_1-\lambda^2z_2}{1-\lambda^2}\right|^2=\frac{\lambda^2|z_1-z_1|^2}{(1-\lambda^2)^2}$ είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο το $\frac{z_1-\lambda^2z_2}{1-\lambda^2}$ και ακτίνα $\frac{\lambda|z_1-z_1|}{1-\lambda^2}$.

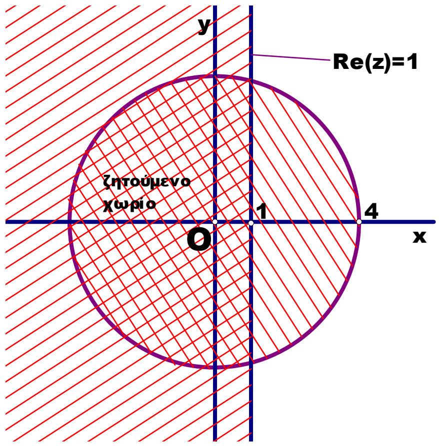


Σημειώνουμε πως το σημείο $\dfrac{z_1-\lambda^2 z_2}{1-\lambda^2}$ βρίσκεται στην ευθεία που ορίζουν τα $z_1$ και $z_2$ και κείται προς το μέρος του $z_1$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\dfrac{z_1-\lambda^2 z_2}{1-\lambda^2}-z_2=k(z_1-z_2)$, όπου $k>1$.

Πράγματι, $\dfrac{z_1-\lambda^2 z_2}{1-\lambda^2}-z_2=\dfrac{z_1-\lambda^2 z_2-z_2+\lambda^2 z_2}{1-\lambda^2}=\dfrac{1}{1-\lambda^2}(z_1-z_2)$ και $\dfrac{1}{1-\lambda^2}>1$.

**3.** Να βρεθούν στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες των μιγαδικών που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις: $|z-8|>2|z-2|$ και $|z-2|<|z|$.

**Λύση:** Από τη πρώτη εξίσωση έχουμε: $|z-8|^2>4|z-2|^2 \Leftrightarrow |z|^2+64-16\text{Re}(z)>4|z|^2+$ $+16-16\text{Re}(z) \Leftrightarrow 48>3|z|^2 \Leftrightarrow |z|<4$. Επομένως το σύνολο των σημείων που επαληθεύουν τη σχέση $|z-8|>2|z-2|$ αποτελεί το εσωτερικό του κύκλου με κέντρο το $(0,0)\equiv 0+0\mathbf{i}$ και ακτίνα 4.

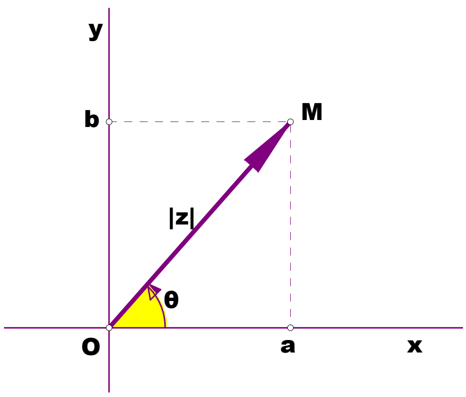



Από τη δεύτερη εξίσωση έχουμε:
$|z-2|^2<|z|^2 \Leftrightarrow |z|^2+4-4\text{Re}(z)>|z|^2 \Leftrightarrow \text{Re}(z)<1$.

Επομένως το σύνολο των σημείων που επαληθεύουν τη σχέση $|z-2|<|z|$ αποτελεί το αριστερό ημιεπίπεδο (χωρίς την ακμή) που ορίζεται από την κατακόρυφη ευθεία $\text{Re}(z)=1 \Leftrightarrow x=1$.
Η τομή των παραπάνω χωρίων αποτελεί το ζητούμενο σημειοσύνολο.

## 1.15 Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

Θεωρούμε στο μιγαδικό επίπεδο την εικόνα $M$ ενός μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού $z=a+b\mathbf{i}$.




Παρατηρούμε ότι αν $\theta$ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ με τον άξονα των πραγματικών, έχουμε τις σχέσεις:

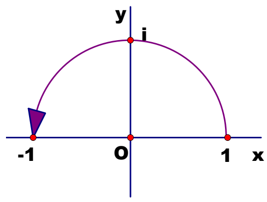
$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{|z|} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = |z|\cos\theta \\ b = |z|\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow z = a + b\mathbf{i} = |z|(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta).$$

Η γωνία $\theta$ λαμβάνεται κατά φορά αντίθετη με αυτήν της κίνησης των δεικτών του ρολογιού και ανήκει στο διάστημα $[0, 2\pi)$. Η γωνία αυτή λέγεται **πρωτεύον όρισμα** του μιγαδικού αριθμού $z$ και συμβολίζεται με $Arg(z)$. Η γραφή $z = |z|(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)$ ονομάζεται **τριγωνομετρική μορφή** του $z$. Κάθε άλλη γωνία $\theta'$ με την ιδιότητα $z = |z|(\cos\theta' + \mathbf{i}\sin\theta')$ θα έχει το ίδιο ημίτονο και το ίδιο συνημίτονο με την $\theta$. Άρα θα διαφέρει από αυτήν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του $2\pi$. Μια τέτοια γωνία λέγεται απλά **όρισμα** του $z$.

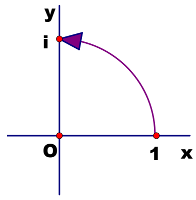
### 1.15.1 Παράδειγμα

**1.** Να γραφούν σε τριγωνομετρική μορφή οι αριθμοί: $-1$, $\mathbf{i}$, $1+\mathbf{i}$, $1-\mathbf{i}$ και $-1+\mathbf{i}\sqrt{3}$.

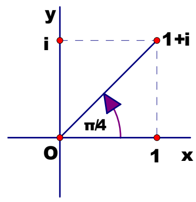
**Λύση:** $-1 = \cos\pi + \mathbf{i}\sin\pi$,




$\mathbf{i} = \cos\dfrac{\pi}{2} + \mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{2}$,



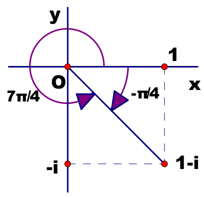

$$1+\mathbf{i} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathbf{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{4}\right),$$



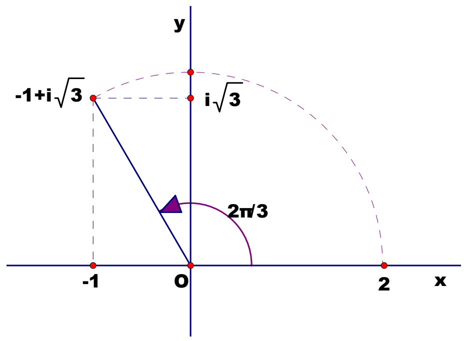

$$1-\mathbf{i} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \mathbf{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathbf{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \mathbf{i}\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right),$$




$$-1+\mathbf{i}\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$




### 1.15.2 Πρόταση

*Έστω* $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + \mathbf{i}\sin\theta_1)$ *και* $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + \mathbf{i}\sin\theta_2)$ *δύο μιγαδικοί αριθμοί (σε τριγωνομετρική μορφή). Τότε*

$$z_1z_2 = |z_1z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathbf{i}\sin(\theta_1+\theta_2)).$$

*Γενικότερα, αν* $z_k = |z_k|(\cos\theta_k + \mathbf{i}\sin\theta_k)$, $k = 1,2,\dots,n$, *τότε*

$$z_1z_2\cdots z_n = |z_1z_2\cdots z_n|(\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+\mathbf{i}\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)). \quad (1)$$

**Απόδειξη:** Έχουμε: $z_1z_2 = |z_1z_2|(\cos\theta_1+\mathbf{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2+\mathbf{i}\sin\theta_2) =$

$= |z_1z_2|((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathbf{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2))$.

Γνωρίζουμε από την τριγωνομετρία ότι $\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 = \cos(\theta_1+\theta_2)$ και $\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2 = \sin(\theta_1+\theta_2)$.

Επομένως, $z_1z_2 = |z_1z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathbf{i}\sin(\theta_1+\theta_2))$.

Υποθέτουμε ότι $z_1z_2\cdots z_n = |z_1z_2\cdots z_n|(\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots\theta_n)+\mathbf{i}\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots\theta_n))$, όπου $z_k = |z_k|(\cos\theta_k+\mathbf{i}\sin\theta_k)$, για κάθε $k = 1,2,\dots,n$. Αν $z_{n+1} = |z_{n+1}|(\cos\theta_{n+1}+\mathbf{i}\sin\theta_{n+1})$, τότε

$$z_1z_2\cdots z_nz_{n+1} = |z_1z_2\cdots z_nz_{n+1}|(\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+\mathbf{i}\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n))(\cos(\theta_{n+1})+\mathbf{i}\sin(\theta_{n+1})) =$$
$$= |z_1z_2\cdots z_nz_{n+1}|(\cos((\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+\theta_{n+1})+\mathbf{i}\sin((\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+\theta_{n+1})) =$$
$$= |z_1z_2\cdots z_nz_{n+1}|(\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n+\theta_{n+1})+\mathbf{i}\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n+\theta_{n+1}))$$

και επομένως η σχέση (1) ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο *n*. ■

### 1.15.3 Πόρισμα (Θεώρημα de Moivre)

*Έστω* $z = |z|(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)$ *και n θετικός ακέραιος. Τότε*

$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta)+\mathbf{i}\sin(n\theta)).$$

■

### 1.15.4 Πρόταση

*Έστω* $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1+\mathbf{i}\sin\theta_1)$ *και* $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2+\mathbf{i}\sin\theta_2)$. *Αν* $z_2 \neq 0$, *τότε*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathbf{i}\sin(\theta_1-\theta_2)).$$

*Ειδικά για* $z_1 = 1 = \cos 0 + \mathbf{i}\sin 0$, *παίρνουμε*

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{|z_2|}(\cos(-\theta_2)+\mathbf{i}\sin(-\theta_2)) = |z_2|^{-1}(\cos\theta_2 - \mathbf{i}\sin\theta_2).$$

**Απόδειξη:** $\dfrac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathbf{i}\sin(\theta_1-\theta_2))\cdot z_2 = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathbf{i}\sin(\theta_1-\theta_2))\cdot|z_2|$

$(\cos\theta_2+\mathbf{i}\sin\theta_2) = |z_1|(\cos((\theta_1-\theta_2)+\theta_2)+\mathbf{i}\sin((\theta_1-\theta_2)+\theta_2)) = |z_1|(\cos\theta_1+\mathbf{i}\sin\theta_1) = z_1$.

Επομένως, $\dfrac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathbf{i}\sin(\theta_1-\theta_2)) = \dfrac{z_1}{z_2}$. ■

### 1.15.5 Παραδείγματα

**1.** Δείξτε ότι το θεώρημα de Moivre ισχύει και για $n \leq 0$.

**Απόδειξη:** Προφανώς το θεώρημα ισχύει για $n = 0$. Έστω τώρα ότι $n < 0$. Τότε $-n > 0$. Επομένως, $z^n = \dfrac{1}{z^{-n}} \underset{-n>0}{=} \dfrac{1}{|z|^{-n}\,(\cos(-n\theta) + \mathbf{i}\sin(-n\theta))} = \dfrac{|z|^n}{\cos(n\theta) - \mathbf{i}\sin(n\theta)} =$

$= \dfrac{|z|^n\,(\cos(n\theta) + \mathbf{i}\sin(n\theta))}{\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta)} = |z|^n\,(\cos(n\theta) + \mathbf{i}\sin(n\theta))$.

**2.** Δείξτε ότι: **(i)** $(\sqrt{3} + \mathbf{i})^{150} = -2^{150}$, **(ii)** $(1+\mathbf{i})^n + (1-\mathbf{i})^n = 2^{(n+2)/2}\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$ και $(1+\mathbf{i})^n - (1-\mathbf{i})^n = \mathbf{i}2^{(n+2)/2}\sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$, για κάθε $n = 0,1,\dots$,

**(iii)** $(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)^n + (\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)^{-n} = 2\cos(n\theta)$ και $(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)^n - (\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)^{-n} =$ $= 2\mathbf{i}\sin(n\theta)$, για κάθε $n = 0,1,\dots$

**Απόδειξη:** **(i)** Παρατηρούμε ότι $\sqrt{3} + \mathbf{i} = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathbf{i}\cdot\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$. Επομένως,

$(\sqrt{3} + \mathbf{i})^{150} = 2^{150}\left(\cos\dfrac{150\pi}{6} + \mathbf{i}\sin\dfrac{150\pi}{6}\right) = 2^{150}\left(\cos(24\pi + \pi) + \mathbf{i}\sin(24\pi + \pi)\right) =$

$= 2^{150}\left(\cos\pi + \mathbf{i}\sin\pi\right) = 2^{150}(-1) = -2^{150}$

**(ii)** Στο παράδειγμα 1.15.1.1 είδαμε ότι $1 + \mathbf{i} = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ και $1 - \mathbf{i} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathbf{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$. Επομένως $(1+\mathbf{i})^n = 2^{n/2}\left(\cos\dfrac{n\pi}{4} + \mathbf{i}\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$ και $(1-\mathbf{i})^n = 2^{n/2}\left(\cos\left(-\dfrac{n\pi}{4}\right) + \mathbf{i}\sin\left(-\dfrac{n\pi}{4}\right)\right) = 2^{n/2}\left(\cos\dfrac{n\pi}{4} - \mathbf{i}\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

Άρα $(1+\mathbf{i})^n + (1-\mathbf{i})^n = 2\cdot 2^{n/2}\cos\dfrac{n\pi}{4} = 2^{(n+2)/2}\cos\dfrac{n\pi}{4}$ και $(1+\mathbf{i})^n - (1-\mathbf{i})^n = 2\cdot 2^{n/2}\mathbf{i}\sin\dfrac{n\pi}{4} =$ $= 2^{(n+2)/2}\mathbf{i}\sin\dfrac{n\pi}{4}$.

**(iii)** $(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)^n + (\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)^{-n} = \cos(n\theta) + \mathbf{i}\sin(n\theta) + \cos(-n\theta) + \mathbf{i}\sin(-n\theta) =$ $= \cos(n\theta) + \mathbf{i}\sin(n\theta) + \cos(n\theta) - \mathbf{i}\sin(n\theta) = 2\cos(n\theta)$. Η απόδειξη του άλλου τύπου είναι παρόμοια.

**3.** Να εκφράσετε τα $\cos 5\theta$ και $\sin 5\theta$ σαν πολυώνυμα των $\cos\theta$ και $\sin\theta$ αντίστοιχα.

**Λύση:** Έστω $z = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta$. Από το θεώρημα de Moivre παίρνουμε $z^5 = \cos 5\theta + \mathbf{i}\sin 5\theta$. Με βάση το διώνυμο του Newton έχουμε $z^5 = (\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)^5 =$

$= \cos^5\theta + 5\cos^4\theta\mathbf{i}\sin\theta + 10\cos^3\theta\mathbf{i}^2\sin^2\theta + 10\cos^2\theta\mathbf{i}^3\sin^3\theta + 5\cos\theta\mathbf{i}^4\sin^4\theta + \mathbf{i}^5\sin^5\theta =$

$= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + \mathbf{i}(5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta)$.

Επομένως, $\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta(1-\cos^2\theta) +$
$+5\cos\theta\sin^4\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta(1-\cos^2\theta) + 5\cos\theta(1-\cos^2\theta)^2 =$
$= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$
και $\sin 5\theta = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta = 5(1-\sin^2\theta)^2\sin\theta - 10(1-\sin^2\theta)\sin^3\theta +$
$+\sin^5\theta = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$.

**4.** Αν $|z|=1$, να δειχθεί ότι $\dfrac{z^n}{1+z^{2n}} \in \mathbb{R}$.

**Απόδειξη:** Εφόσον $|z|=1$, θα είναι $z = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta$, για κάποιο $\theta$. Επομένως,

$$\frac{(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)^n}{1+(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)^{2n}} = \frac{\cos(n\theta)+\mathbf{i}\sin(n\theta)}{1+\cos(2n\theta)+\mathbf{i}\sin(2n\theta)} = \frac{\cos(n\theta)+\mathbf{i}\sin(n\theta)}{1+2\cos^2(n\theta)-1+2\mathbf{i}\sin(n\theta)\cos(n\theta)} =$$
$$= \frac{\cos(n\theta)+\mathbf{i}\sin(n\theta)}{2\cos(n\theta)(\cos(n\theta)+\mathbf{i}\sin(n\theta))} = \frac{1}{2\cos(n\theta)} \in \mathbb{R}.$$

**5.** Αν $\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3 = 0$ και $\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3 = 0$, να δειχθεί ότι $\cos 3\theta_1 + \cos 3\theta_2 + \cos 3\theta_3 = 3\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$ και $\sin 3\theta_1 + \sin 3\theta_2 + \sin 3\theta_3 =$
$= 3\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$.

**Απόδειξη:** Έστω $z_1 = \cos\theta_1 + \mathbf{i}\sin\theta_1$, $z_2 = \cos\theta_2 + \mathbf{i}\sin\theta_2$ και $z_3 = \cos\theta_3 + \mathbf{i}\sin\theta_3$. Παρατηρούμε ότι $z_1+z_2+z_3 = \cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3 + \mathbf{i}(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3) = 0$. Με βάση την ταυτότητα του Euler έχουμε $z_1^3+z_2^3+z_3^3 = 3z_1z_2z_3$.
Αλλά $z_1^3+z_2^3+z_3^3 = (\cos\theta_1+\mathbf{i}\sin\theta_1)^3 + (\cos\theta_2+\mathbf{i}\sin\theta_2)^3 + (\cos\theta_3+\mathbf{i}\sin\theta_3)^3 \underset{\text{de Moivre}}{=}$
$= (\cos 3\theta_1 + \mathbf{i}\sin 3\theta_1) + (\cos 3\theta_2 + \mathbf{i}\sin 3\theta_2) + (\cos 3\theta_3 + \mathbf{i}\sin 3\theta_3) = (\cos 3\theta_1 + \cos 3\theta_2 + \cos 3\theta_3) +$
$+\mathbf{i}(\sin 3\theta_1 + \sin 3\theta_2 + \sin 3\theta_3)$ και
$3z_1z_2z_3 = 3(\cos\theta_1+\mathbf{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2+\mathbf{i}\sin\theta_2)(\cos\theta_3+\mathbf{i}\sin\theta_3) = 3\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3) +$
$+3\mathbf{i}\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$. Συγκρίνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη παίρνουμε τις αποδεικτέες σχέσεις.

**6.** Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα:
**(i)** $\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$ και $\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)$, **(ii)** $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)$ και $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)$.

**Λύση:** **(i)** Αν $x = 2r\pi$, $r\in\mathbb{Z}$, τότε $\cos(kx)=1$ για κάθε $k = 0,1,\ldots,n$. Επομένως, $\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = n+1$. Ακόμη, $\sin(kx)=0$ για κάθε $k=0,1,\ldots,n$ και άρα $\sum_{k=1}^{n}\sin(kx) = 0$.

Έστω $x \neq 2r\pi$ , $r \in \mathbb{Z}$. Θέτουμε $z = \cos x + \mathbf{i}\sin x$. Έχουμε $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z} =$

$$= \frac{1 - \cos((n+1)\theta) - \mathbf{i}\sin((n+1)\theta)}{1 - \cos\theta - \mathbf{i}\sin\theta} = \frac{1 - 1 + 2\sin^2\dfrac{(n+1)\theta}{2} - 2\mathbf{i}\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}\cos\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{1 - 1 + 2\sin^2\dfrac{\theta}{2} - 2\mathbf{i}\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}\left(\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2} - \mathbf{i}\cos\dfrac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\dfrac{\theta}{2}\left(\sin\dfrac{\theta}{2} - \mathbf{i}\cos\dfrac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}\left(\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2} - \mathbf{i}\cos\dfrac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$$

$$\left(\sin\frac{\theta}{2} + \mathbf{i}\cos\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}\left(\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2} + \cos\dfrac{(n+1)\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\right)}{\sin\dfrac{\theta}{2}} +$$

$$+\mathbf{i}\frac{\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}\left(\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} - \cos\dfrac{(n+1)\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}\right)}{\sin\dfrac{\theta}{2}} = \frac{\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}\cos\dfrac{n\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}} +$$

$$+\mathbf{i}\frac{\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}\sin\dfrac{n\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$$

Εξ άλλου, $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \sum_{k=0}^{n}(\cos(kx) + \mathbf{i}\sin(kx)) = \sum_{k=0}^{n}\cos(kx) + \mathbf{i}\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)$. (Γιατί sin0=0). Επομένως, $\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \dfrac{\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}\cos\dfrac{n\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$ και $\sum_{k=1}^{n}\sin(kx) = \dfrac{\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}\sin\dfrac{n\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$.

**(ii)** Θέτουμε $z = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta$. Χρησιμοποιούμε το διώνυμο του Newton σε συνδυασμό με το θεώρημα του de Moivre.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta) + \mathbf{i}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos(k\theta) + \mathbf{i}\sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k = (1+z)^n =$$

$$= (1 + \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)^n = \left(2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\mathbf{i}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^n = 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \mathbf{i}\sin\frac{\theta}{2}\right)^n =$$

$$= 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{n\theta}{2} + \mathbf{i}\sin\frac{n\theta}{2}\right) = 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2} + 2^n\mathbf{i}\cos^n\frac{\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}$$

Επομένως, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta) = 2^n\cos^n\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{n\theta}{2}$ και $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta) = 2^n\cos^n\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{n\theta}{2}$.

## 1.16 Ρίζες μιγαδικών αριθμών

Ξεκινάμε με μία βασική πρόταση:

### 1.16.1 Πρόταση

*Έστω* $w = |w|(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta) \neq 0$ *και* $n$ *θετικός ακέραιος. Τότε η εξίσωση* $z^n = w$ *έχει* $n$ *το πλήθος ρίζες* $z_0, \ldots, z_{n-1}$ *που δίνονται από τον τύπο*

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

**Απόδειξη:** Από το θεώρημα de Moivre έχουμε:

$$z_k^n = |w|\left(\cos\left(n\cdot\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + \mathbf{i}\sin\left(n\cdot\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) = |w|\big(\cos(\theta + 2k\pi) + \mathbf{i}\sin(\theta + 2k\pi)\big) =$$

$= |w|\big(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta\big) = w$, για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Αντίστροφα, αν $u = |u|(\cos\phi + \mathbf{i}\sin\phi)$ είναι μια ρίζα της εξίσωσης $z^n = w$, τότε $w = u^n = |u|^n(\cos(n\phi) + \mathbf{i}\sin(n\phi))$. Επομένως, $|w| = |u|^n |\cos(n\phi) + \mathbf{i}\sin(n\phi)| = |u|^n \Rightarrow |u| = \sqrt[n]{|w|}$.

Ακόμη, από τη σχέση $\cos(n\phi) + \mathbf{i}\sin(n\phi) = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta$ προκύπτει ότι $\begin{cases}\cos(n\phi) = \cos\theta \\ \sin(n\phi) = \sin\theta\end{cases} \Leftrightarrow n\phi = \theta + 2k\pi \Leftrightarrow \phi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$, όπου $k \in \mathbb{Z}$.

Αν $k = nr + k'$, $0 \le k' < n$ είναι η διαίρεση του $k$ δια του $n$, τότε $\phi = \dfrac{\theta + 2k'\pi}{n} + 2r\pi$ και επομένως, $u = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\dfrac{\theta + 2k'\pi}{n} + 2r\pi\right) + \mathbf{i}\sin\left(\dfrac{\theta + 2k'\pi}{n} + 2r\pi\right)\right) = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\dfrac{\theta + 2k'\pi}{n}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\dfrac{\theta + 2k'\pi}{n}\right)\right) = z_{k'}$.

Οι ρίζες $z_k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, είναι διακεκριμένες. Πράγματι, αν $0 \le k \le k' \le n-1$ και $z_k = z_{k'}$, τότε $\begin{cases}\cos\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right) = \cos\left(\dfrac{\theta + 2k'\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right) = \sin\left(\dfrac{\theta + 2k'\pi}{n}\right)\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} = \dfrac{\theta + 2k'\pi}{n} + 2r\pi$, για κάποιον ακέραιο $r$. Επομένως, $k - k' = rn \Rightarrow 0 \le |r| = \dfrac{|k - k'|}{n} \underset{0 \le k \le k' < n}{<} 1$. Επειδή ο $r$ είναι ακέραιος παίρνουμε $r = 0 \Leftrightarrow k = k'$. ■

Ας δούμε κάποια παραδείγματα:

### 1.16.2 Παραδείγματα

**1.** Να λύσετε τις εξισώσεις: **(i)** $z^3=-64\mathbf{i}$, **(ii)** $z^3=-1+\mathbf{i}\sqrt{3}$ και **(iii)** $z^4=-1$.

**Λύση:** **(i)** Έχουμε $-64\mathbf{i}=64\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathbf{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right)$. Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης $z^3=-64\mathbf{i}$ είναι οι αριθμοί $z_0=\sqrt[3]{64}\left(\cos\frac{3\pi/2}{3}+\mathbf{i}\sin\frac{3\pi/2}{3}\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)=4\mathbf{i}$,

$$z_1=\sqrt[3]{64}\left(\cos\frac{3\pi/2+2\pi}{3}+\mathbf{i}\sin\frac{3\pi/2+2\pi}{3}\right)=4\left(\cos\frac{7\pi}{6}+\mathbf{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right)=4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathbf{i}\right)=$$

$=-2\left(\sqrt{3}+\mathbf{i}\right)$ και $z_2=\sqrt[3]{64}\left(\cos\frac{3\pi/2+4\pi}{3}+\mathbf{i}\sin\frac{3\pi/2+4\pi}{3}\right)=4\left(\cos\frac{11\pi}{6}+\mathbf{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right)=$

$$=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathbf{i}\right)=2\left(\sqrt{3}-\mathbf{i}\right).$$

**(ii)** Έχουμε $-1+\mathbf{i}\sqrt{3}=2\left(-\frac{1}{2}+\mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης $z^3=-1+\mathbf{i}\sqrt{3}$ είναι οι αριθμοί

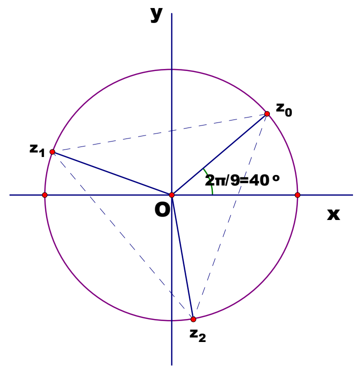
$$z_0=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi/3}{3}+\mathbf{i}\sin\frac{2\pi/3}{3}\right)=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9}+\mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{9}\right),$$

$$z_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi/3+2\pi}{3}+\mathbf{i}\sin\frac{2\pi/3+2\pi}{3}\right)=$$

$\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9}+\mathbf{i}\sin\frac{8\pi}{9}\right)$ και

$$z_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi/3+4\pi}{3}+\mathbf{i}\sin\frac{2\pi/3+2\pi}{3}\right)=$$

$$=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9}+\mathbf{i}\sin\frac{14\pi}{9}\right).$$




Στό σχήμα παρατηρούμε ότι οι ρίζες $z_0$, $z_1$ και $z_2$ είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $\sqrt[3]{2}$.

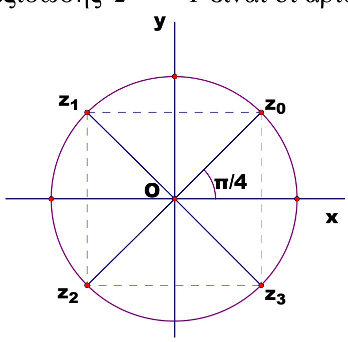
**(iii)** Έχουμε $-1=\cos\pi+\mathbf{i}\sin\pi$. Επομένως οι ρίζες της εξίσωσης $z^4=-1$ είναι οι αριθμοί

$$z_0=\cos\frac{\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_1=\cos\frac{3\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_2=\cos\frac{5\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$$ και

$$z_3=\cos\frac{7\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$




Στό σχήμα παρατηρούμε ότι οι ρίζες $z_0$, $z_1$, $z_2$ και $z_3$ είναι κορυφές τετραγώνου εγγεγραμμένου στον μοναδιαίο κύκλο.

**2.** Δείξτε ότι οι ρίζες της εξίσωσης $(1+z)^n+(1-z)^n=0$ δίνονται από τον τύπο:

$$z=\mathbf{i}\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n},\ k=0,1,\ldots,2n-1.$$

**Απόδειξη:** Παρατηρούμε ότι $z\neq 1$. Επομένως, $(1+z)^n+(1-z)^n=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n=-1=$

$=\cos\pi+\mathbf{i}\sin\pi \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{n}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{n}$, όπου $k=0,1,\ldots,2n-1$.

Η σχέση $\frac{1+z}{1-z}=\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+\mathbf{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση

$$z=\frac{\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+\mathbf{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}-1}{1+\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}-\mathbf{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}}=\frac{1-2\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2n}+2\mathbf{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}-1}{1+2\cos^2\frac{(2k+1)\pi}{2n}-1-2\mathbf{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}}=$$

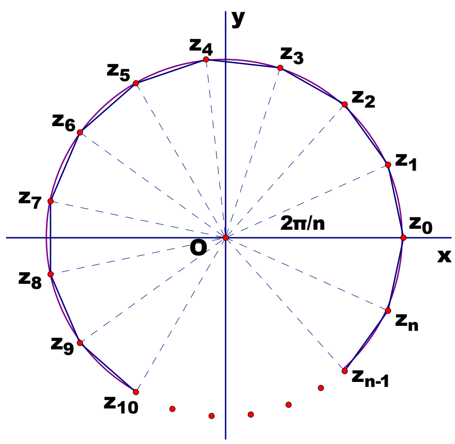
$$=\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}\left(-\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}+\mathbf{i}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}{\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}-\mathbf{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}=$$

$$=\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\frac{\left(-\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}+\mathbf{i}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}-\mathbf{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}{\cos^2\frac{(2k+1)\pi}{2n}+\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2n}}=$$

$$=\tan\frac{(2k+1)\pi}{2n}\mathbf{i}.$$

Στη συνέχεια θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στις λύσεις της εξίσωσης $z^n=1$, δηλαδή στις ***n*-στές ρίζες της μονάδας**. Οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι οι αριθμοί $z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathbf{i}\sin\frac{2k\pi}{n}=z_1^k$, $k=0,1,\ldots,n-1$.

Οι εικόνες των μιγαδικών αυτών αριθμών είναι κορυφές κανονικού *n*-γώνου εγγεγραμμένου στον μοναδιαίο κύκλο.




### 1.16.3 Πρόταση

*Έστω n θετικός ακέραιος και $z,w$ n-στές ρίζες της μονάδας.*

*Τότε: **(i)** Ο $z^{-1}=\bar{z}$ είναι n-στή ρίζα της μονάδας και **(ii)** ο $zw$ είναι n-στή ρίζα της μονάδας.* ■

Η απόδειξη της πρότασης είναι εύκολη. (Θυμηθείτε ότι $|z|=1$ και άρα $z^{-1}=\overline{z}$ ).

### 1.16.4 Παραδείγματα

**1.** Έστω $z_1, z_2$ οι μη πραγματικές κυβικές ρίζες της μονάδας. Δείξτε ότι: **(i)** $z_1^2 = z_2$ και $z_2^2 = z_1$,

**(ii)** $1+z_1+z_1^2=0$ και $1+z_2+z_2^2=0$, **(iii)** $(1+2z_1+3z_2)(1+2z_2+3z_1)=3$,

**(iv)** $(1+z_1-z_2)^3=(1-z_1+z_2)^3$.

**Απόδειξη:** **(i)** Ο αριθμός $z_1^2$ είναι μη πραγματική κυβική ρίζα της μονάδας και $z_1^2 \neq z_1$, γιατί $z_1 \neq 0$ και $z_1 \neq 1$. Επομένως, $z_1^2 = z_2$. Παρόμοια, $z_2^2 = z_1$.

**(ii)** $1+z_1+z_1^2 = \dfrac{z_1^3-1}{z_1-1} \underset{z_1^3=1}{=} 0$. Παρόμοια, $1+z_2+z_2^2=0$.

**(iii)** Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $z_1 = \dfrac{-1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$ και $z_2 = \dfrac{-1-\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$. Έχουμε λοιπόν: $\left(1+2\dfrac{-1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}-3\dfrac{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}\right)\left(1-2\dfrac{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}+3\dfrac{-1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}\right)=3$.

**(iv)** $(1+z_1-z_2)^3 = (z_2^3+z_2^2-z_2)^3 = z_2^3(z_2^2+z_2-1)^3 = (z_2^2+z_2-1)^3 = (z_1+z_2-1)^3$ και παρόμοια, $(1+z_2-z_1)^3=(z_1+z_2-1)^3$. Επομένως, $(1+z_1-z_2)^3=(1-z_1+z_2)^3$.

**2.** Έστω $z$ μια μη πραγματική κυβική ρίζα της μονάδας. Αν $k$ είναι άρτιος θετικός ακέραιος, δείξτε ότι: $(1-z+z^2)(1-z^2+z^4)(1-z^4+z^8)\cdots(1-z^{2^{k-1}}+z^{2^k})=2^k$.

**Απόδειξη:** Χωρίζουμε τις παρενθέσεις σε $k/2$ ζεύγη της μορφής

$$(1-z^{2^{\lambda-1}}+z^{2^\lambda})(1-z^{2^\lambda}+z^{2^{\lambda+1}}), \text{ όπου } \lambda=0,2,4,\ldots,k.$$

Θέτουμε $w_\lambda = z^{2^{\lambda-1}}$. Το $w_\lambda$ είναι προφανώς μια μη πραγματική κυβική ρίζα της μονάδας. Παρατηρούμε ότι

$(1-z^{2^{\lambda-1}}+z^{2^\lambda})(1-z^{2^\lambda}+z^{2^{\lambda+1}}) = (1-w_\lambda+w_\lambda^2)(1-w_\lambda^2+w_\lambda^4)$

$=(1-w_\lambda+w_\lambda^2)(1-w_\lambda^2+w_\lambda)=(1-w_\lambda+\overline{w}_\lambda)(1-\overline{w}_\lambda+w_\lambda)=|1-w_\lambda+\overline{w}_\lambda|^2=|1-2\mathbf{i}\,\mathrm{Im}(w_\lambda)|^2=$

$=|1\pm\mathbf{i}\sqrt{3}|^2=4$, γιατί $w_\lambda = -\dfrac{1}{2}\pm\mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Επομένως, $(1-z+z^2)(1-z^2+z^4)(1-z^4+z^8)\cdots(1-z^{2^{k-1}}+z^{2^k})=4^{k/2}=2^k$.

## 1.17 Πολυωνυμικές εξισώσεις στο $\mathbb{C}$

Ας ανακαλέσουμε τη σχετική ορολογία:

### 1.17.1 Ορισμός

*Ένα μη μηδενικό πολυώνυμο (ως προς z) με μιγαδικούς συντελεστές είναι μια παράσταση της μορφής:*

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \text{, όπου } a_k \in \mathbb{C} \text{, για κάθε } k = 0,1,\ldots,n \text{ και } a_n \neq 0.$$

*Ο ακέραιος n λέγεται* ***βαθμός*** *του* $f(z)$ *και συμβολίζεται με* $\deg f(z)$.

*Αν* $a_k = 0$*, για κάθε* $k = 0,1,\ldots,n$*, τότε παίρνουμε το* ***μηδενικό πολυώνυμο****. Το μηδενικό πολυώνυμο δεν έχει βαθμό.*

Προφανώς τα πολυώνυμα μηδενικού βαθμού είναι οι μη μηδενικές σταθερές στο $\mathbb{C}$.

Αν τώρα έχουμε δύο πολυώνυμα $f(z)$ και $g(z)$ με $g(z) \neq 0$, υπάρχουν μοναδικά πολυώνυμα $\pi(z)$ και $\upsilon(z)$ με $\upsilon(z) = 0$ ή $\deg \upsilon(z) < \deg g(z)$, τέτοια ώστε

$$f(z) = g(z)\pi(z) + \upsilon(z).$$

Τα $\pi(z)$ και $\upsilon(z)$ λέγονται αντίστοιχα **πηλίκο** και **υπόλοιπο** της διαίρεσης $f(z) : g(z)$.

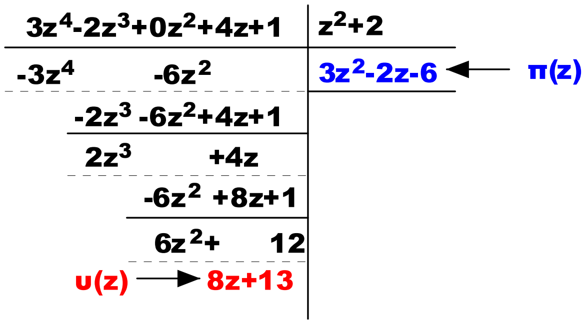
Η διαδικασία για της εύρεση των $\pi(z)$ και $\upsilon(z)$ έχει ως εξής:

Αν $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ και $g(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0$, τότε ο μεγιστοβάθμιος όρος του $\pi(z)$ είναι ίσος με $\dfrac{a_n}{b_m} z^{n-m}$. Πολλαπλασιάζουμε το $g(z)$ με $\dfrac{a_n}{b_m} z^{n-m}$ και το αποτέλεσμα το αφαιρούμε από το $f(z)$. Το νέο πολυώνυμο $f(z) - \dfrac{a_n}{b_m} z^{n-m} g(z)$ έχει μικρότερο βαθμό από το $f(z)$ ή είναι μηδέν. Στη δεύτερη περίπτωση σταματάμε. Στην πρώτη περίπτωση αντικαθιστούμε το $f(z)$ με το $f(z) - \dfrac{a_n}{b_m} z^{n-m} g(z)$ και συνεχίζουμε παρόμοια. Η διαδικασία θα σταματήσει όταν βρούμε ένα πολυώνυμο, το $\upsilon(z)$ με μικρότερο βαθμό από το $g(z)$ ή όταν αυτό είναι μηδέν.

### 1.17.2 Παράδειγμα

Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $(3z^4 - 2z^3 + 4z + 1) : (z^2 + 2)$.

**Λύση:** Η όλη διαδιακασία περιγράφεται στο ακόλουθο σχήμα:




Αν $\deg g(z)=1$, τότε το υπόλοιπο είναι μια σταθερά $\upsilon$. Αν $g(z)=z-\rho$, όπου $\rho\in\mathbb{C}$ τότε, θέτοντας $z=\rho$ στη σχέση $f(z)=(z-\rho)\pi(z)+\upsilon$ παίρνουμε $\upsilon=f(\rho)$. Επομένως, ισχύει

$$f(z)=(z-\rho)\pi(z)+f(\rho)\,.$$

**1.17.3 Πόρισμα**

*Ο αριθμός $\rho\in\mathbb{C}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $f(z)$ αν και μόνον αν το $f(z)$ διαιρείται με το $z-\rho$.* ∎

Η εύρεση του πηλίκου $\pi(z)$ και του υπόλοιπου $f(\rho)$ της διαίρεσης $f(z):(z-\rho)$ επιτυγχάνεται πιο σύντομα με το λεγόμενο **σχήμα του Horner**.

Ας υποθέσουμε ότι $f(z)=-2z^3-(1+\mathbf{i})z^2-\mathbf{i}z+1$ και $\rho=\mathbf{i}$. Γράφουμε τους συντελεστές $-2,-(1+\mathbf{i}),-\mathbf{i},1$ στην πρώτη από τις τρεις γραμμές ενός $3\times 4$ (γενικότερα $3\times(n+1)$) πίνακα.

| | | | |
|---|---|---|---|
| -2 | -(1+i) | -i | 1 |
| | -2i | 3-i | 2+3i |
| -2 | -(1+3i) | 3-2i | 3+3i |

Κατεβάζουμε το 2 στην 3η γραμμή. Το πολλαπλασιάζουμε με **i** και το γινόμενο $-2\mathbf{i}$ το γράφουμε στη 2η γραμμή, κάτω από τον επόμενο συντελεστή $-(1+\mathbf{i})$. Προσθέτουμε κατακόρυφα. Το αποτέλεσμα $-(1+3\mathbf{i})$ γράφεται στην 3η γραμμή, στην ίδια στήλη. Συνεχίζουμε όπως στο σχήμα. Ο αριθμός με μπλε είναι το $f(\mathbf{i})$. Οι αριθμοί με κόκκινο είναι οι συντελεστές του $\pi(z)$.

**1.17.4 Πρόταση (Θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας)**

*Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο $f(z)$ με μιγαδικούς συντελεστές έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{C}$.* ■

**1.17.5 Πόρισμα**

*Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο $f(z)$ με μιγαδικούς συντελεστές αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.*

**Απόδειξη:** Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας, το $f(z)$ έχει μία ρίζα $z_1 \in \mathbb{C}$. Τότε $f(z) = (z - z_1)f_1(z)$ για κάποιο μιγαδικό πολυώνυμο $f_1(z)$. Ο βαθμός του $f_1(z)$ είναι κατά μία μονάδα μικρότερος του βαθμού του $f(z)$. Αν εφαρμόσουμε επαγωγή στο βαθμό θα συμπεράνουμε ότι το $f_1(z)$ γράφεται στη μορφή $f_1(z) = a(z - z_2)\cdots(z - z_n)$, όπου $a$ είναι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του (άρα και του $f(z)$) και $z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Επομένως, $f(z) = a(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$. ■

Γενικά οι ρίζες $z_1, \ldots, z_n$ δεν είναι διακεκριμμένες. Αν $\rho_1, \ldots, \rho_k$ είναι οι διακεκριμμένες ρίζες, τότε υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $s_1, \ldots, s_k$, τέτοιοι ώστε

$$f(z) = a(z - \rho_1)^{s_1}(z - \rho_2)^{s_2}\cdots(z - \rho_k)^{s_k}.$$

Ο ακέραιος $s_t$ λέγεται **πολλαπλότητα** της ρίζας $\rho_t$, ($t = 1, 2, \ldots, k$).

**1.17.6 Παραδείγματα**

**1.** Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση $z^3 + (1 + \mathbf{i})z^2 + az + 2 = 0$ αν γνωρίζουμε ότι μια ρίζα της είναι ο αριθμός $z_1 = \mathbf{i}$.

**Λύση:** Έχουμε $\mathbf{i}^3 + (1 + \mathbf{i})\mathbf{i}^2 + a\mathbf{i} + 2 = 0 \Leftrightarrow -\mathbf{i} - 1 - \mathbf{i} + a\mathbf{i} + 2 = 0 \Leftrightarrow a\mathbf{i} = -1 + 2\mathbf{i} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = -\mathbf{i}(-1 + 2\mathbf{i}) = 2 + \mathbf{i}$.

Εφαρμόζουμε το σχήμα Horner και παίρνουμε

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1$ | $1+\mathbf{i}$ | $2+\mathbf{i}$ | $2$ |
| | $\mathbf{i}$ | $-2+\mathbf{i}$ | $-2$ |
| $1$ | $1+2\mathbf{i}$ | $2\mathbf{i}$ | $0$ |

Επομένως, $z^3 + (1 + \mathbf{i})z^2 + (1 + 2\mathbf{i})z + 2 = (z - \mathbf{i})(z^2 + (1 + 2\mathbf{i})z + 2\mathbf{i})$. Υπολογίζουμε την διακρίνουσα του τριωνύμου $z^2 + (1 + 2\mathbf{i})z + 2\mathbf{i}$. $\Delta = (1 + 2\mathbf{i})^2 - 8\mathbf{i} = -3 + 4\mathbf{i} - 8\mathbf{i} = -3 - 4\mathbf{i} =$

$=1-4-4\mathbf{i}=(1-2\mathbf{i})^2$. Επομένως οι άλλες δύο ρίζες είναι οι αριθμοί $z_2=\dfrac{-1-2\mathbf{i}+(1-2\mathbf{i})}{2}=$ $=-2\mathbf{i}$ και $z_3=\dfrac{-1-2\mathbf{i}-(1-2\mathbf{i})}{2}=-1$.

**2.** Να δείξετε ότι $\sin\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n}\sin\dfrac{3\pi}{n}\cdots\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$.

**Απόδειξη:** Θεωρούμε το πολυώνυμο $z^n-1$ με ρίζες τις $n$-στές ρίζες της μονάδας $z_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+\mathbf{i}\sin\dfrac{2k\pi}{n}$, $k=0,1,\ldots,n-1$. Από το πόρισμα 1.17.5 παίρνουμε $z^n-1=(z-1)\cdot$ $(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{n-1})\Rightarrow(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{n-1})=\dfrac{z^n-1}{z-1}=1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}$.

Θέτουμε στη $z=1$ σχέση $(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{n-1})=1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}$ και παίρνουμε $(1-z_1)(1-z_2)\cdots(1-z_{n-1})=n\Rightarrow|1-z_1||1-z_2|\cdots|1-z_{n-1}|=n$.

Αλλά, $1-z_k=1-\cos\dfrac{2k\pi}{n}-\mathbf{i}\sin\dfrac{2k\pi}{n}=1-1+2\sin^2\dfrac{k\pi}{n}-2\mathbf{i}\sin\dfrac{k\pi}{n}\cos\dfrac{k\pi}{n}=$ $=2\sin\dfrac{k\pi}{n}\left(\sin\dfrac{k\pi}{n}-\mathbf{i}\cos\dfrac{k\pi}{n}\right)$ και $\left|\sin\dfrac{k\pi}{n}-\mathbf{i}\cos\dfrac{k\pi}{n}\right|=1$, για κάθε $k=1,2,\ldots,n-1$.

Επομένως $2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n}\sin\dfrac{3\pi}{n}\cdots\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}=n$, απ' όπου προκύπτει η αποδεικτέα.

Στη συνέχεια ασχολούμαστε με πραγματικά πολυώνυμα.

### 1.17.7 Πρόταση

*Έστω $f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Αν ο μιγαδικός αριθμός ζ είναι ρίζα του $f(z)$, τότε και ο συζυγής του $\bar{\zeta}$ είναι ρίζα του $f(z)$.*

**Απόδειξη:** Είναι

$$f(\bar{\zeta})=a_n(\bar{\zeta})^n+a_{n-1}(\bar{\zeta})^{n-1}+\cdots+a_1\bar{\zeta}+a_0=a_n\overline{(\zeta^n)}+a_{n-1}\overline{(\zeta^{n-1})}+\cdots+a_1\bar{\zeta}+a_0=$$

$=\overline{a_n\zeta^n}+\overline{a_{n-1}\zeta^{n-1}}+\cdots+\overline{a_1\zeta}+\overline{a_0}=$ (επειδή οι συντελεστές είναι πραγματικοί)

$=\overline{a_n\zeta^n+a_{n-1}\zeta^{n-1}+\cdots+a_1\zeta+a_0}=\overline{f(\zeta)}=\bar{0}=0$. ■

### 1.17.8 Πόρισμα

*Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο $f(z)$ με πραγματικούς συντελεστές αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων ή δευτεροβάθμιων με αρνητική διακρίνουσα.*

**Απόδειξη:** Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας, το $f(z)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $\rho$ στο $\mathbb{C}$ και επομένως $f(z)=(z-\rho)f_1(z)$, για κάποιο πολυώνυμο $f_1(z)$.

Αν η $\rho$ είναι πραγματικός αριθμός τότε το $f_1(z)$ είναι πραγματικό πολυώνυμο και $\deg f_1(z) = \deg f(z) - 1$. Εφαρμόζουμε επαγωγή επί του βαθμού και τελειώσαμε. Αν $\rho = a + b\mathbf{i}$ με $b \neq 0$, τότε και ο συζυγής $\overline{\rho} = a - b\mathbf{i}$ είναι ρίζα του $f(z)$. Επειδή $\overline{\rho} \neq \rho$, από τη σχέση $0 = f(\overline{\rho}) = (\overline{\rho} - \rho) f_1(\overline{\rho})$ προκύπτει ότι το $\overline{\rho}$ είναι ρίζα του $f_1(z)$. Επομένως, $f_1(z) = (z - \overline{\rho}) f_2(z)$, για κάποιο πολυώνυμο $f_2(z)$. Επομένως, $f(z) = (z - \rho)(z - \overline{\rho}) f_2(z) =$ $= (z - a - b\mathbf{i})(z - a + b\mathbf{i}) f_2(z) = (z^2 - 2az + a^2 + b^2) f_2(z)$ και το $f_2(z)$ είναι πραγματικό με $\deg f_2(z) = \deg f(z) - 2$. Επαγωγή επί του βαθμού και τελειώσαμε.

Σημειώνουμε ότι η διακρίνουσα του $z^2 - 2az + a^2 + b^2$ είναι αρνητική. ■

**1.17.9 Παράδειγμα**

Να αναλυθεί το πολυώνυμο $f(z) = z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 4z + 7$ σε γινόμενο ανάγωγων πραγματικών πολυωνύμων αν γνωρίζουμε ότι το $\mathbf{i}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου αυτού.

**Λύση:** Εφόσον το $\mathbf{i}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου, και το $-\mathbf{i}$ θα είναι ρίζα αυτού. Επομένως το $f(z)$ διαιρείται με το $f(z) = (z - \mathbf{i})(z + \mathbf{i}) = z^2 + 1$. Εκτελούμε τη διαίρεση $f(z) : (z^2 + 1)$.

$$
\begin{array}{l|l}
z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 4z + 7 & z^2 + 1 \\
\hline
-z^4 \qquad\quad - z^2 & z^2 + 4z + 7 \\
\quad 4z^3 + 7z^2 + 4z + 7 & \\
\quad -4z^3 \qquad\quad - 4z & \\
\qquad\quad 7z^2 \qquad + 7 & \\
\qquad\quad -7z^2 \qquad - 7 & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Επομένως, $z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 4z + 7 = (z^2 + 1)(z^2 + 4z + 7)$ και η διακρίνουσα του $z^2 + 4z + 7$ είναι $-12 < 0$.

Η επόμενη πρόταση είναι χρήσιμη όταν αναζητούμε ρίζες πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές.

**1.17.10 Πρόταση**

*Έστω* $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ *με* $a_n \neq 0$ *και* $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{Z}$. *Αν* $\rho = \dfrac{s}{t}$ *είναι ένα ανάγωγο ρητό κλάσμα (*$s, t \in \mathbb{Z}$ *και ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των s και t είναι μονάδα), το οποίο είναι ρίζα του* $f(z)$, *τότε το s είναι διαιρέτης του σταθερού όρου* $a_0$ *και το t είναι διαιρέτης του* $a_n$. *Ειδικά για* $\rho = s \in \mathbb{Z}$, *το ρ είναι διαιρέτης του* $a_0$.

**Απόδειξη:** Είναι $f\left(\frac{s}{t}\right)=a_n\frac{s^n}{t^n}+a_{n-1}\frac{s^{n-1}}{t^{n-1}}+\cdots+a_1\cdot\frac{s}{t}+a_0=0\Rightarrow a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}t+\cdots+$ $+a_1st^{n-1}+a_0t^n=0$. Επομένως, $s(a_ns^{n-1}+a_{n-1}s^{n-2}t+\cdots+a_1t^{n-1})=-a_0t^n$. Επειδή ο αριθμός $a_ns^{n-1}+a_{n-1}s^{n-2}t+\cdots+a_1t^{n-1}$ είναι ακέραιος, ο $s$ διαιρεί το γινόμενο $a_0t^n$. Αλλά ο $s$ και ο $t^n$ είναι πρώτοι μεταξύ τους. Επομένως ο $s$ διαιρεί τον $a_0$.

Επίσης, η σχέση $a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}t+\cdots+a_1st^{n-1}+a_0t^n=0$ συνεπάγεται τη σχέση $t(a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1st^{n-2}+a_0t^{n-1})=-a_ns^n$, απ' όπου, όπως προηγουμένως προκύπτει ότι ο t διαιρεί τον $a_n$. ■

### 1.17.11 Παραδείγματα

**1.** Να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης $2z^3-5z^2+5z-3=0$ στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

**Λύση:** Η εξίσωση έχει ακέραιους συντελεστές. Εξετάζουμε αν έχει ρητή ρίζα. Μια τέτοια ρίζα θα είναι της μορφής $\frac{s}{t}$, όπου το $s$ είναι διαιρέτης του -3 και το $t$ διαιρέτης του 2. Αν πάρουμε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς θα έχουμε ως υποψήφιες ρίζες τις ακόλουθες: $1,-1,3,-3,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2}$. Εξετάζοντας μία προς μία τις περιπτώσεις καταλήγουμε στο ότι ο αριθμός $z_1=\frac{3}{2}$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης. Πράγματι, $2\left(\frac{3}{2}\right)^3-5\left(\frac{3}{2}\right)^2+5\cdot\frac{3}{2}-3=$ $=2\cdot\frac{27}{8}-5\cdot\frac{9}{4}+\frac{15}{2}-3=\frac{27-45+30-12}{4}=0$.

Μπορούμε να διαιρέσουμε το πολυώνυμο $2z^3-5z^2+5z-3$ με το $z-\frac{3}{2}$ ή καλύτερα με το $2z-3$ (για να μην έχουμε παρονομαστές).

$$\begin{array}{r|l}
2z^3-5z^2+5z-3 & 2z-3 \\ \hline
-2z^3+3z^2 \quad\quad\quad & z^2-z+1 \\ \hline
-2z^2+5z-3 & \\
2z^2-3z \quad & \\ \hline
2z-3 & \\
-2z+3 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

Επομένως, $2z^3-5z^2+5z-3=(2z-3)(z^2-z+1)$. Τέλος, λύνουμε την εξίσωση $z^2-z+1=$ $=0$ και βρίσκουμε τις ρίζες $z_2=\frac{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$ και $z_3=\frac{1-\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$.

**2.** Να λύσετε την εξίσωση $x^3-x^2-11x+3=0$.

**Λύση:** Αναζητούμε ακέραιες ρίζες οι θα πρέπει να διαιρούν το 3. Οι μόνες περιπτώσεις είναι $1, -1, 3, -3$. Με το σχήμα Horner (ή απλά με άμεσες πράξεις) βρίσκουμε ότι το $x_1 = -3$ είναι ρίζα.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | –1 | –11 | 3 | –3 |
| | –3 | 12 | –3 | |
| 1 | –4 | 1 | 0 | |

Επομένως $x^3 - x^2 - 11x + 3 = (x+3)(x^2 - 4x + 1)$. Λύνουμε την εξίσωση $x^2 - 4x + 1 = 0$ και βρίσκουμε τις ρίζες $x_2 = 2 + \sqrt{3}$ και $x_3 = 2 - \sqrt{3}$.

### 1.17.12 Πρόταση

*Έστω* $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ *με* $a_n \neq 0$. *Αν* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *είναι οι ρίζες του πολυωνύμου* $f(z)$ *(όχι απαραίτητα διακεκριμένες), τότε ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις που είναι γνωστές* ***ως σχέσεις του Vieta****:*

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + \cdots + z_1 z_n + z_2 z_3 + \cdots + z_2 z_n + \cdots + z_{n-1} z_n = \sum_{1 \le k_1 < k_2 \le n} z_{k_1} z_{k_2} = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$z_1 z_2 z_3 + \cdots + z_1 z_2 z_n + \cdots + z_{n-2} z_{n-1} z_n = \sum_{1 \le k_1 < k_2 < k_3 \le n} z_{k_1} z_{k_2} z_{k_3} = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$z_1 z_2 \cdots z_{n-1} z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

*Αντίστροφα, αν* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *είναι n μιγαδικοί αριθμοί, όχι απαραίτητα διακεκριμένοι, και* $E_r = \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_r \le n} z_{k_1} \cdots z_{k_r}$ *για κάθε* $r = 1, 2, \ldots, n$, *τότε*

$$z^n - E_1 z^{n-1} + E_2 z^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} E_{n-1} z + (-1)^n E_n = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

**Απόδειξη:** Έχουμε $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$. Αν εκτελέσουμε τις πράξεις στο δεξιό μέλος της σχέσης αυτής θα διαπιστώσουμε ότι η δύναμη $z^r$ προκύπτει αν από $r$ παρενθέσεις επιλέξουμε το $z$ και από τις υπόλοιπες $n - r$ τις ρίζες που απομένουν. Αν οι ρίζες αυτές είναι οι $z_{k_1}, z_{k_2}, \ldots, z_{k_{n-r}}$, όπου $1 \le k_1 < \cdots < k_{n-r} \le n$, τότε θα προκύψει ο όρος $(-1)^r z_{k_1} z_{k_2} \cdots z_{k_{n-r}} z^r$. Αν αθροίσουμε όλους τους όρους αυτής της μορφής θα προκύψει το άθροισμα $(-1)^r \left( \sum_{1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_{n-r} \le n} z_{k_1} z_{k_2} \cdots z_{k_{n-r}} \right) z^r$. Για να βρούμε τον συντελεστή του $z^r$ θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με $a_n$. Επομένως θα έχουμε:

$$a_r = a_n (-1)^r \left( \sum_{1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_{n-r} \le n} z_{k_1} z_{k_2} \cdots z_{k_{n-r}} \right) \Leftrightarrow \sum_{1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_{n-r} \le n} z_{k_1} z_{k_2} \cdots z_{k_{n-r}} = (-1)^r \frac{a_r}{a_n}.$$

Αντιστρόφως, αν $z_1, z_2, \ldots, z_n$ είναι $n$ μιγαδικοί αριθμοί, όχι απαραίτητα διακεκριμένοι, θέτουμε $E_r = \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_r \le n} z_{k_1} \cdots z_{k_r}$ για κάθε $r = 1, 2, \ldots, n$. Αν επιχειρηματολογήσουμε όπως πριν, θα συμπεράνουμε ότι συντελεστής του $z^r$ στο ανάπτυγμα του γινομένου $(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$ είναι ίσος με $(-1)^{n-r} E_{n-r}$. ■

**1.17.13 Παραδείγματα**

**1.** Να υπολογίσετε τις παραστάσεις $z_1 + z_2 + z_3$, $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$ και $z_1 z_2 z_3$, όπου $z_1, z_2, z_3$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου $-2z^3 + 3z^2 + \mathbf{i}z + 1$.

**Λύση:** Από τις σχέσεις Vieta έχουμε: $z_1 + z_2 + z_3 = -\dfrac{3}{-2} = \dfrac{3}{2}$, $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = \dfrac{\mathbf{i}}{-2} = -\dfrac{1}{2}\mathbf{i}$ και $z_1 z_2 z_3 = -\dfrac{1}{-2} = \dfrac{1}{2}$.

**2.** Να υπολογίσετε το άθροισμα των κύβων των ριζών του πολυωνύμου του προηγούμενου παραδείγματος.

**Λύση:** Από την ταυτότητα του Euler παίρνουμε: $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 3z_1 z_2 z_3 + (z_1 + z_2 + z_3)$ $(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1) = 3E_3 + E_1(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - E_2)$.

Γνωρίζουμε ότι $(z_1 + z_2 + z_3)^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1) \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 =$ $= (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1) = E_1^2 - 2E_2$.

Επομένως, $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 3E_3 + E_1(E_1^2 - 3E_2) = E_1^3 - 3E_1 E_2 + 3E_3 = \dfrac{3^3}{2^3} - 3 \cdot \dfrac{3}{2} \cdot \left(-\dfrac{\mathbf{i}}{2}\right) + 3 \cdot \dfrac{1}{2} =$ $= \dfrac{39}{8} + \dfrac{9\mathbf{i}}{4}$.

**3.** Δίνεται το πολυώνυμο $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ με $a_n a_0 \neq 0$ και ρίζες τους $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Να βρείτε ένα πολυώνυμο που να έχει ρίζες τους αριθμούς $\dfrac{1}{z_1}, \dfrac{1}{z_2}, \ldots, \dfrac{1}{z_n}$.

**Λύση:** Επειδή $z_1 z_2 \cdots z_{n-1} z_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n} \neq 0$, όλες οι ρίζες αντιστρέφονται.

Θέτουμε $E_r' = \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_r \le n} \dfrac{1}{z_{k_1} \cdots z_{k_r}}$, $r = 1, 2, \ldots, n$.

Παρατηρούμε ότι $E_r' E_n = \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_r \le n} \dfrac{z_1 z_2 \cdots z_n}{z_{k_1} \cdots z_{k_r}} = \sum_{1 \le l_1 < \cdots < l_{n-r} \le n} z_{l_1} \cdots z_{l_{n-r}}$, όπου $z_{l_1}, \ldots, z_{l_{n-r}}$ είναι οι υπόλοιπες ρίζες (για τους δείκτες $l_1 < \cdots < l_{n-r}$ που προκύπτουν αν από το σύνολο $\{1, 2, \ldots, n\}$ αφαιρέσουμε τους δείκτες $k_1, k_2, \ldots, k_r$).

Επομένως, $E'_r E_n = E_{n-r} \Leftrightarrow E'_r = \frac{E_{n-r}}{E_n} = \frac{(-1)^{n-r}\frac{a_r}{a_n}}{(-1)^n \frac{a_0}{a_n}} = (-1)^r \frac{a_r}{a_0}$. Το πολυώνυμο είναι λοιπόν το $z^n + \frac{a_1}{a_0} z^{n-1} + \frac{a_2}{a_0} z^{n-2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_0} z + \frac{a_n}{a_0}$ ή ισοδύναμα το $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$.